

数理解析研究所講究録650

戸田格子とその周辺

京都大学数理解析研究所

1988年4月

戸田格子とその周辺

研究集会報告集

1987年11月 9日～11月11日

研究代表者 薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)

目 次

1. 非線形波動から超伝導まで	1
放送大 戸田 盛和 (Morikazu Toda)	
2. 戸田格子を実現する電気回路	14
静岡大・教養 長島 弘幸 (Hiroyuki Nagashima)	
横浜国大・工 渡辺 慎介 (Shinsuke Watanabe)	
横浜国大・工 石渡 信吾 (Shingo Ishiwata)	
3. QUANTITATIVE STUDY OF THE DISSIPATIVE TODA LATTICE	29
Univ. of Turku T.Kuusela	
Univ. of Turku J.Hietariata	
4. 異なるバネで結ばれた非線形格子中の孤立波	46
横浜国大・工 岡田 佳子 (Yoshiko Okada)	
横浜国大・工 渡辺 慎介 (Shinsuke Watanabe)	
5. 戸田格子ソリトン解の複素 $t$ 平面上での振舞	58
日大・理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)	
6. 相互作用戸田方程式と線形方程式 (付: 直接法に於ける或る現象)	78
静岡大・理 米山 徹 (Tohru Yoneyama)	
7. The 3+1 Dimensional Toda Equation and its Exact Solutions	87
大阪外大・教養 中村 明 (Akira Nakamura)	
8. 戸田分子方程式	93
広大・工 広田 良吾 (Ryogo Hirota)	

9.	2次元戸田格子方程式の線形 Bäcklund 変換の解	100
	横浜国大・工 湯浅 富久子 (Fukuko Yuasa)	
	横浜国大・工 瀧澤 英一 (Ei Iti Takizawa)	
10.	離散時間戸田格子の周期解について	117
	横浜国大・工 斎藤 革子 (Noriko Saitoh)	
11.	可解な二次元格子模型とテータ関数恒等式	129
	東大・教養 国場 敦夫 (Atsuo Kuniba)	
	東大・教養 矢嶋 徹 (Tetsu Yajima)	
12.	1次元ハバード模型の可積分性	148
	東大・教養 和達 三樹 (Miki Wadati)	
13.	統計力学における可解格子模型	161
	京大・数理研 神保 道夫 (Michio Jimbo)	
	京大・数理研 三輪 哲二 (Tetsuji Miwa)	
	京大・数理研 尾角 正人 (Masato Okado)	
14.	Algorithmic Construction of the Recursion Operators of Toda and Landau-Lifshitz Equation	179
	Clarkson Univ. E.Barouch	
	Clarkson Univ. A.S.Fokas	
	Clarkson Univ. V.G.Papageorgiou	
15.	多次元空間での非線形 Klein-Gordon および Liouville方程式の厳密解	196
	山口大・教養 松野 好雅 (Yoshimasa Matsuno)	
16.	マグマ方程式について	207
	東大・工 高橋 大輔 (Daisuke Takahashi)	
	東大・工 薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)	

## マグマ方程式について

東大・工 高橋大輔 ( Daisuke Takahash )

東大・工 薩摩順吉 ( Junkichi Satsuma )

### § 1. はじめに

地中のマントルにおいて、岩盤（以下単に岩）の一部は溶けて溶岩になっている。その岩の融解率は約10%以下であり、溶けた部分は複雑な3次元の網目を構成している。溶岩は比重が岩よりやや小さく、浮力の効果によって岩を押し分け、徐々に上昇していく。この上昇過程における溶岩の体積分率の分布を記述するモデル方程式が、何人かの研究者によって立てられた。<sup>1)-4)</sup> Scott と Stevenson<sup>5)</sup> は溶岩と岩がそれぞれ完全につながっており、水平面内での溶岩の体積分率は一様であり、鉛直方向の溶岩の運動のみが許される仮定の下において、以下の無次元化されたモデル方程式を提出した。

$$u_t = [u^n \{ (u^{-m} u_t)_x - 1 \}]_x \quad (1)$$

ここで  $u$  は溶岩の体積分率、 $t$  は時間、 $x$  は鉛直方向の空間座標を表わす。この方程式は、溶岩と岩の質量保存の式、およびエネルギー保存の式をカップルして得られるが、その際、溶岩と岩は非圧縮とし、接触面での摩擦エネルギーによってエネルギーをやりとりするとしている。また、溶岩が多孔性媒質中の流れを形成するとして、そのときの透過係数が  $u^n$  に比例し、岩の変形過程における実効的な粘性率が  $u^{-m}$  に比例すると仮定することから (1) 式中の指数  $n$ 、 $m$  が現われる。実際の  $n$ 、 $m$  の値の範囲は大体  $2 \leq n \leq 5$ 、 $0 \leq m \leq 1$  とされている。この (1) 式を我々

はマグマ方程式と呼ぶ。

今、(1) 式の進行波解を考え、 $z = x - ct$  とおくと、(1) 式を  $z$  に関して 2 回積分して

$$\frac{c}{2} u^2 + \frac{1}{1-m} u^{m+1} + \frac{2A}{1-m-n} u^{m-n+1} - \frac{c}{2-m-n} u^{m-n+2} - Bu^{2m} = 0 \quad (2)$$

が得られる。ここで  $A, B$  は積分定数である。(ただし、 $m \neq 1, m+n \neq 1, 2$  とする。) Scott と Stevenson は上式を数値的に積分することにより進行波解を求め、その進行波解をいくつか重ね合わせたときの相互作用がソリトンのためであったので、それらをマグモン (magmon) と呼んだ。しかし、Barcilon と Richter<sup>6)</sup> は、少し異なるモデル式ではあるが、より詳細な数値計算を行ない、進行波解が相互作用した後で小さなさざ波 (ripple) が現われることを示し、ソリトンは存在しないことを示唆した。我々も (1) 式で同様の数値計算を行なったがやはりさざ波が現われた。

しかしながら、(1) 式の方程式には、係数に  $u$  のべき依存性が入っており、また対応するモデル実験<sup>7)</sup> を見ても、コンパクト・サポート解の存在の可能性がうかがわれ、非常に興味深い。そこで我々はまず (1) 式の進行波解の解析解を求めた。その際、

$$\zeta = \int^z u^\alpha dz \quad (3)$$

の形の変換を行なうと解の形が簡単に表わせる。§ 2 では指数  $n, m$  を  $n=3, m=0$  の場合限定してこの変換によって得られた解の例を挙げ、同時にコンパクト・サポート解の可能性を議論する。また同じ指数の組で (1) 式の一部を少し修正した方程式について、元の変数  $x, t$  について (3) と同様の変換を行なうと、KdV 方程式に帰着し、コンパクト・サポートをもつソリトン解が存在することがわかった。

§ 3 ではこの変換と解の例を示す。

§ 2.  $n=3, m=0$  の場合の解

ここでは (1) 式の  $n, m$  を  $n=3, m=0$  とおいた式

$$u_t = [u^3 (u_{xt} - 1)]_x \quad (4)$$

についてのみ考える。(進行波解については、いくつかの他の  $n, m$  の値の組についても同様な議論が行える。)  $z = x - ct$  とおき、(1) 式を 2 回積分した式は

$$\frac{c}{2} u_z^2 = -u + B - \frac{c}{u} + \frac{A}{2} \quad (5)$$

となる。岩と比べて溶岩の比重が小さく、浮力は溶岩に対して常に鉛直上向きに働くという物理的な要請から、進行波の速度  $c$  は正とする。

ここで  $z$  から  $\zeta$  の変数変換

$$\zeta = \int^z u^{-1} dz \quad (6)$$

を行なうと (5) 式は次式

$$\frac{c}{2} u_\zeta^2 = -(u^3 - Bu^2 + cu - A) \equiv -f(u) \quad (7)$$

となり、楕円積分形に帰着する。こうして、 $u = u(\zeta)$  が求まれば逆変換

$$z = \int^\zeta u d\zeta \quad (8)$$

より、 $z = z(\zeta)$  が求まり、 $\zeta$  をパラメータとして  $u = u(z)$  が求まる。解の例としては、

$$f(u) = (u - u_1)(u - u_2)(u - u_3), \quad (u_1 \leq u_2 \leq u_3) \quad (9)$$

とおくことにより、

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_2 + (u_3 - u_2) \operatorname{cn}^2 p \zeta \\ z = u_1 \zeta + \sqrt{2c(u_3 - u_1)} E(\varphi; k) \\ \text{ただし } p = \sqrt{(u_3 - u_1)/2c}, \quad c = u_1 u_2 + u_2 u_3 + u_3 u_1 \\ \sin \varphi = \operatorname{sn} p \zeta, \quad k = \sqrt{(u_3 - u_2)/(u_3 - u_1)} \end{array} \right. \quad (10)$$

が得られる (図1)。また、その極限形として  $u_1 = u_2$  とおくことにより、

$$\left\{ \begin{array}{l} u = u_2 + (u_3 - u_2) \operatorname{sech}^2 p \zeta \\ z = u_2 \zeta + \sqrt{2c(u_3 - u_2)} \tanh p \zeta \end{array} \right. \quad (11)$$

という  $\operatorname{sech}^2$ -タイプの解が得られる (図2)。これらはいずれも安定に進行する解であることを数値計算により確認した。また、この種の解を2つ相互作用させると、先に述べたように相互作用後小さなさざ波が現われる (図3)。

次に  $z - \zeta$  変換を

$$z = \int^{\zeta} u^{3/2} d\zeta \quad (12)$$

とすると、解

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \frac{u_1 - u_3 \cos^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} \\ z = \frac{u_1 \sqrt{u_2}}{p} \left[ F(\varphi; \kappa) - \left(1 - \frac{u_3}{u_1}\right) \left( E(\varphi; \kappa) + \cot \varphi \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} \right) \right] \\ \text{ただし } \operatorname{sn}^2 p \zeta = 1 - \frac{u_3}{u_1} \cos^2 \varphi, \quad p = \sqrt{u_2 (u_3 - u_1)/2c} \\ \kappa = \sqrt{\frac{u_3 - u_2}{u_3 - u_1}} \end{array} \right. \quad (13)$$

が得られる。この解を図4に示す。uは0と $u_1$ の間の値をとる周期解であり、 $u=0$ ではグラフの傾きが無限大になっている。これは弱解として存在する解であるが、今、コンパクト・サポートをもつ解として一周期の山だけを取り出して、それを初期値としてみるとどうであろうか。その数値計算の例を図5に示す。元の解の形は崩れるが、安定なコンパクト・サポート解らしきものが発生しているのがわかる。なお数値計算のスキームは、uのポテンシャル $v(v = \int^x u dx)$ を用いた陰スキーム

$$\frac{1}{\Delta t} (v^{n+1} - v^n) = \frac{1}{2} \left( v_x^{n+1} + v_x^n \right) \left( \frac{1}{\Delta t} (v_{xx}^{n+1} - v_{xx}^n) - 1 \right) \quad (14)$$

を反復計算により各時間ステップで数値積分している。再び、この新しく生まれた数値計算上のコンパクト・サポート解を取り出して、それを初期値として数値シミュレートすると今度は山の形が崩れず、安定に進行することが確認された。また、この種の解をいくつか取り出してその相互作用をみると(図6)、相互作用した後に小さなさざ波が発生するが、各山自身は安定に存在するという、定性的には図3と同様の結果が得られた。この安定なコンパクト・サポート解は解析的には得られず、図5の数値計算のように元の解が崩れて得られたものであり、また、元の解は周期解ならば弱解になっているが、単独の山としては解 $u=0$ との接続が悪いことから、(4)式の解析的に安定なコンパクト・サポート解の存在の可能性は殆ど無いように思われる。しかし、数値計算上、一見あたかも安定な解が得られたことから、(4)式に例えば何らかの項を付加するなどの修正を加えることにより、解析的にも安定なコンパクト・サポート解が得られることが強く示唆される。その修正が物理的にどういう意味を持っているかが問題となるであろうが、今後の興味深い課題として残されている。

### § 3. 修正マグマ方程式とソリトン解



今、(4) 式の右辺第一項の時間微分を空間微分に置き換えた式

$$u_t + [u^3 (3u_{xx} + 1)]_x = 0 \quad (15)$$

を考える。この方程式は現実の物理から導かれた式ではないが、遷滅摂動法を用いると、元のマグマ方程式とは最も低次の式が一致するという関連がある。この方程式を以下簡便のため修正マグマ方程式と呼ぶことにする。実は、この方程式は次のような  $x-t$  から  $\xi-\tau$  への変換：

$$\begin{cases} \xi = \int^x \frac{1}{u} dx \\ \tau = t \end{cases} \quad (16)$$

により、KdV 方程式：

$$u_\tau + 3u_\xi \xi_\xi + 6uu_\xi = 0 \quad (17)$$

に帰着することがわかった。また修正マグマ方程式 (15) 自身も無限個の保存密度を持っており、対応する KdV 方程式 (17) の保存密度を  $I_n$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ) とすると、 $I_n/u$  で与えられることが (16) の変換を用いて導かれる。ただし、 $I_n$  は

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_{-\infty}^{\infty} I_n d\xi = 0 \quad (18)$$

と定義する。ちなみに、修正マグマ方程式の保存密度を伊藤と加古<sup>8)</sup> が数式処理言語 REDUCE で低次の方からいくつか計算している。

次に修正マグマ方程式の解の例であるが、対応する KdV 方程式の解から  $N$  ソリトン解が構成される。まず、1 ソリトン解は、KdV 方程式の 1 ソリトン解

$$u = 6k^2 \operatorname{sech}^2(k(\xi - 12k^2\tau)) \quad (19)$$

に対応して、

$$u = 6k^2 - \frac{x^2}{6} \quad (20)$$

となる。(20) 式は静止解であり、(15) 式の  $3u_{xx} + 1 = 0$  を満足しているコンパクト

ト・サポート解である(図7)。プロットからも明らかなように、この解は前のマグマ方程式で人為的につくったコンパクト・サポート解と異なり、 $u=0$ のところでグラフは有限の傾きを持っている。同様にして  $N$  ソリトン解を KdV 方程式から構成できる。例として KdV 方程式での 2 ソリトン解の追い抜きと、それに対応する修正マグマ方程式の解の時間変化を図8に示す。 $t \rightarrow \infty$  の極限で修正マグマ方程式の解は、複数個の(20)式の解がふもとで接した形で定常状態となる。また、静止解以外に進行波解としてのコンパクト・サポート解を求めてみたが、マグマ方程式と同様数値計算で崩れない解は求まらなかった。

#### § 4. おわりに

ここでは、まず、マグマ方程式(1)の  $n=3, m=0$  の場合に、進行波解の解析的な表現が(8),(12)式の変換を用いれば容易に与えられることを示し、解の例をいくつか与えた。次に、コンパクト・サポート解の存在を数値計算によって議論した。数値計算の示すところでは、コンパクト・サポート解の存在は否定的である。しかしながら、方程式に何らかの修正を施すことで、コンパクト・サポート解を得る可能性はあり、今後の課題として残されている。そして、修正マグマ方程式(15)は、(16)式の変数変換により KdV 方程式(17)に帰着することを示し、同時にコンパクト・サポートを持つ  $N$  ソリトン解が存在することを示した。このタイプの解を含む方程式では、特に解の相互作用について、まだよく知られていないことが多く、さらに解明して行く必要があるように思われる。

#### 参考文献

- 1) N.H. Sleep : Geol. Soc. Am. Bull. **85** (1974) 1225.
- 2) D.J. Stevenson : Trans. Am. Geophys. Un. EOS. **61** (1980) 1021.
- 3) A.C. Fowler : Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics **28** (1984) 99.
- 4) D.P. Mckenzie : J. Petrol. **25** (1984) 713.
- 5) D.R. Scott and D.J. Stevenson : Geophys. Res. Lett. **11** (1984) 1161.
- 6) V. Barcilon and F.M. Richter : J. Fluid Mech. **164** (1986) 429.
- 7) P. Olson and U. Chiristensen : J. Geophys. Res. **91** (1986) 6367.
- 8) M. Ito and F. Kako : Comp. Phys. Comm. **38** (1985) 415.

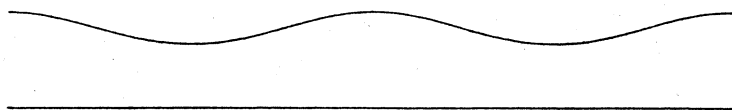


図 1 : (10)式の進行波解の例

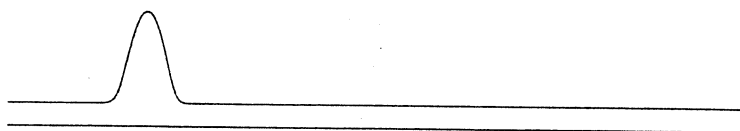


図 2 : (11)式の進行波解の例

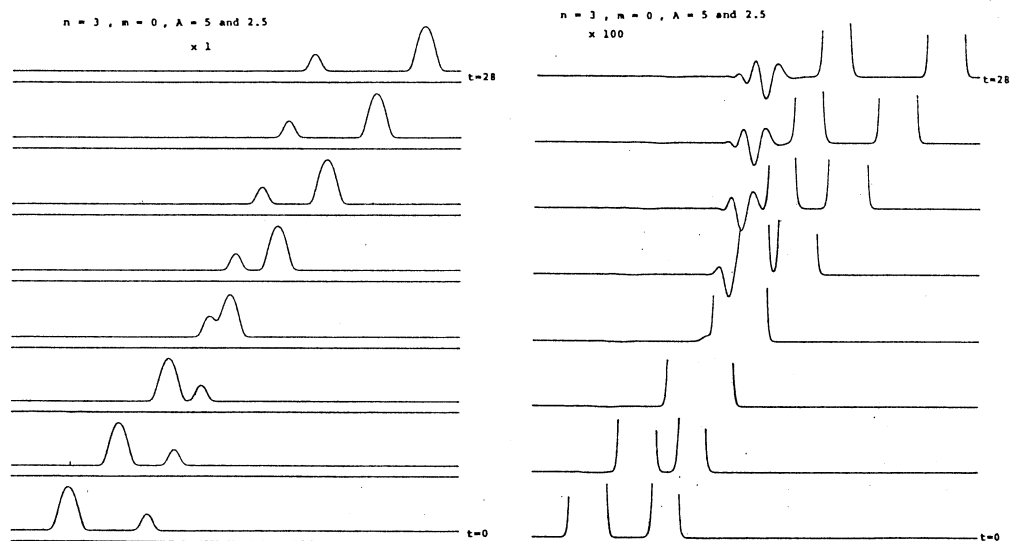


図 3 : (11)式の進行波解の相互作用  
右図は左図を縦方向に100倍に拡大したもの

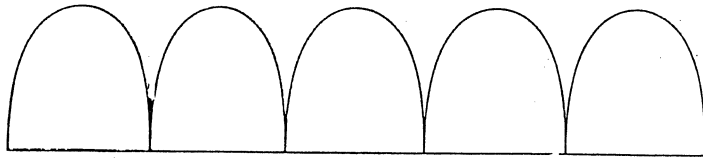


図4：(13)式の進行波解の例

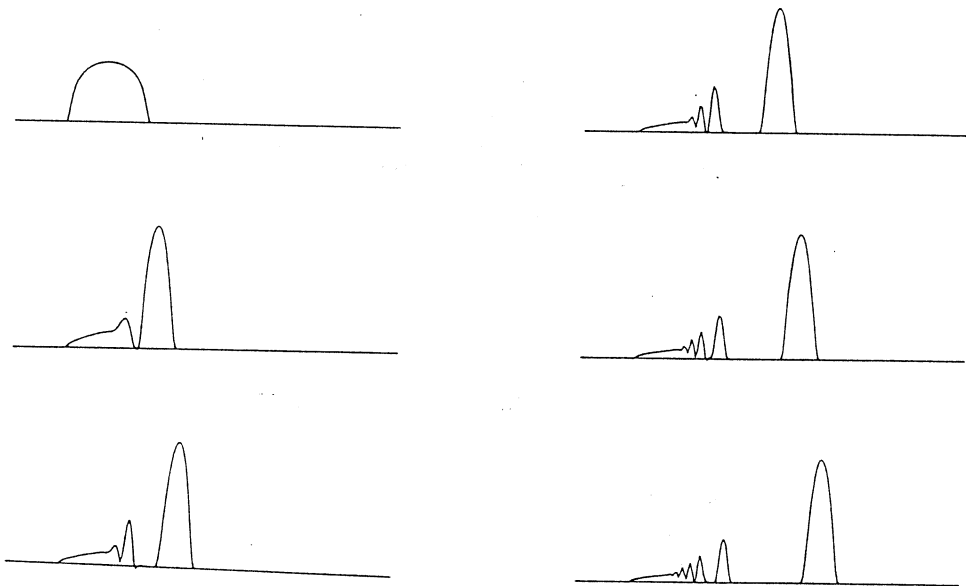


図5：(13)式の解の一部を初期値としたときの  
数値シミュレーション

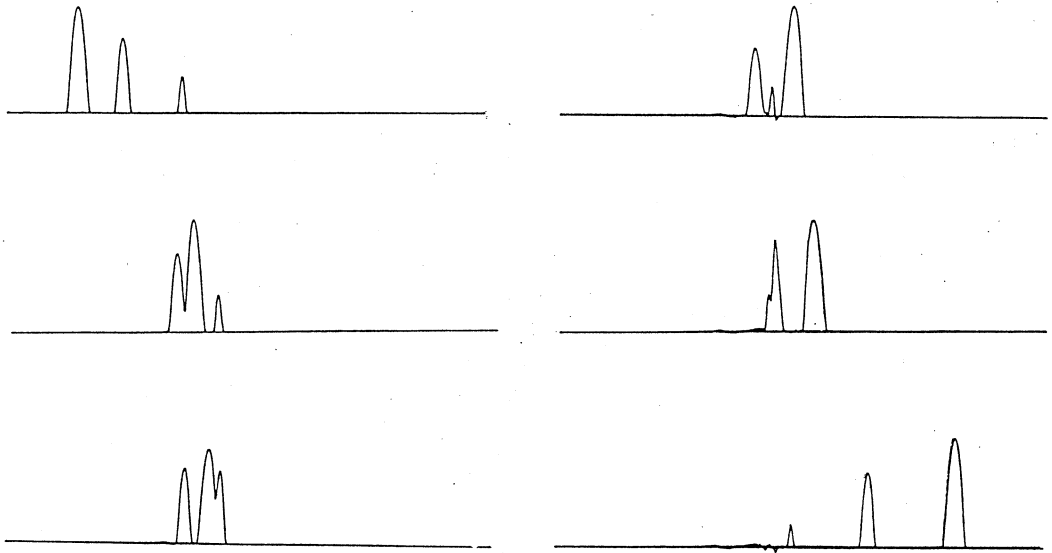


図 6 : 数値計算で得られたコンパクト・サポート解の相互作用

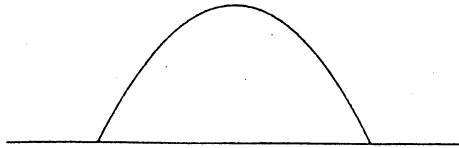


図 7 : 修正マグマ方程式の 1 ソリトン解

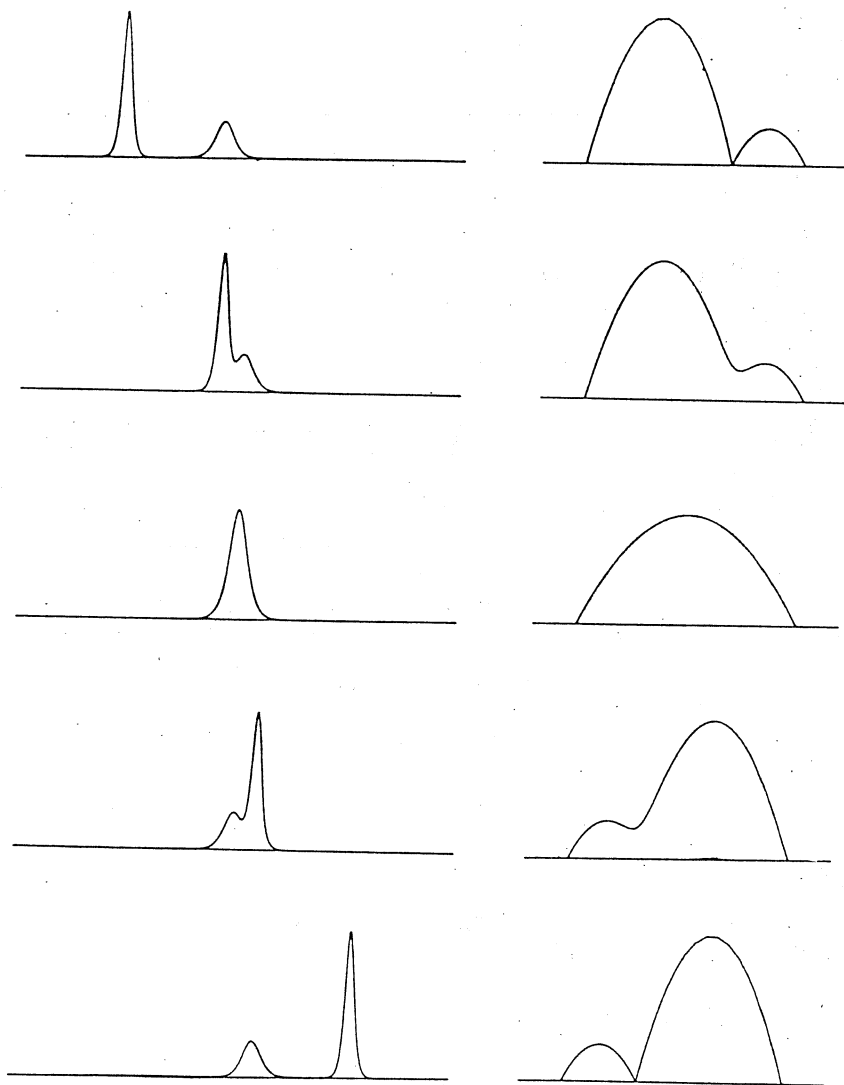


図 8 : 2 ソリトン解の相互作用  
 左図は対応する KdV 方程式の 2 ソリトン解