

差分方程式の無限遠点におけるトロピカル線形化と安定性解析

Tropical linearization and stability analysis of difference equations at infinity

西田 優樹 (Yuki Nishida)¹, 渡邊 扇之介 (Sennosuke Watanabe)²,
渡邊 芳英 (Yoshihide Watanabe)³

¹ 京都府立大学 (Kyoto Prefectural University),

² 福知山公立大学 (The University of Fukuchiyama), ³ 同志社大学 (Doshisha University)

e-mail : y-nishida@kpu.ac.jp

1 概要

差分方程式の不動点のまわりでの安定性解析においては、線形化行列の固有値を調べるのが一般的な手法の1つである [1]。この方法は Jacobi 行列の計算、すなわち微分演算を必要とするため、max 演算を含む超離散系などの微分不可能な力学系に対して適用することが困難である。超離散力学系の不動点のまわりでの挙動は様々なモデルで解析がなされているが [2, 3]、個々のモデルの枠を超えて統一的に研究されているものはほとんどない。そこで、本研究では超離散系を含む力学系をトロピカル半環の意味で線形化することを考える。トロピカル半環における零元は $-\infty$ であるため、この意味での n 次元空間の原点はすべての座標が $-\infty$ であるような n 次元ベクトルである。本研究ではこのような無限遠点でのまわりでトロピカル Jacobi 行列を定義し、その最大固有値の値によって力学系の安定性を判定できることを示す。

2 トロピカル半環

トロピカル半環 (max-plus 代数) とは集合 $\mathbb{R}_{\max} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 上に加法 \oplus と乗法 \otimes をそれぞれ

$$a \oplus b := \max(a, b), \quad a \otimes b := a + b \quad (a, b \in \mathbb{R}_{\max})$$

で定義した代数系である。加法 \oplus についての単位元 (零元) は $\varepsilon := -\infty$ 、乗法 \otimes についての単位元は 0 である。2つの演算 \oplus と \otimes は加法に関する逆元の存在を除いて環の公理をみたしており、このような代数系は一般に半環とよばれる。なお、除法は $a \oslash b := a - b$ で定義されている。トロピカル半環上のベクトルや行列の演算は、通常の線形代数の場合と同様に定義される。零ベクトル、すなわちトロピカル線形空間の原点は $\varepsilon := (\varepsilon, \dots, \varepsilon)^T$ で与えられる。行列 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ に対して、スカラー $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}^n$ と非自明なベクトル $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$ が存在して

$$A \otimes \mathbf{x} = \lambda \otimes \mathbf{x}$$

が成り立つとき、 λ を A の固有値、 \mathbf{x} を λ に属する A の固有ベクトルという。トロピカル行列の固有値については、次の結果が知られている。

命題 1 ([4]) 行列 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ の最大固有値は、 A を重み付き隣接行列に持つ有向グラフの最大平均閉路重みに一致する。行列 A が既約であるときはこれが唯一の固有値である。

命題 2 ([5]) 既約行列 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ の唯一の固有値を λ とするとき、正の整数 T と σ が存在して、

$$A^{\otimes(t+\sigma)} = \lambda^{\otimes\sigma} \otimes A^{\otimes t}$$

が任意の $t \geq T$ について成り立つ。

3 差分方程式のトロピカル線形化

以下ではベクトル値関数 $f: \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$ で定義される差分方程式

$$\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(t)})$$

が無限遠点 ε を不動点に持つ, すなわち $\mathbf{f}(\varepsilon) = \varepsilon$ が成り立つ場合を考える. 関数 $g: \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$ と $i = 1, \dots, n$ に対して, 極限

$$D_i g := \lim_{x_i \rightarrow \varepsilon} g((\varepsilon, \dots, x_i, \dots, \varepsilon)^\top) \oslash x_i$$

が \mathbb{R}_{\max} において存在するとき, これを ε におけるトロピカル偏微分係数と定義する. また, $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_n)^\top: \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$ について, ε におけるトロピカル偏微分係数 $D_j g_i$ がすべて存在するとき, ε におけるトロピカル Jacobi 行列を $J\mathbf{g} := (D_j g_i) \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ で定義する.

トロピカル線形空間 \mathbb{R}_{\max}^n の 2 点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top, \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^\top$ の距離を

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \max_{i=1,2,\dots,n} |e^{x_i} - e^{y_i}|$$

で定義する. また, $\|\mathbf{x}\| = d(\mathbf{x}, \varepsilon)$ とする. 無限遠点 ε を不動点にもつ関数 $\mathbf{f}: \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$ と行列 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ を考える. 任意の $\alpha > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して

$$\|\mathbf{x}\| < \delta \quad \Rightarrow \quad d(\mathbf{f}(\mathbf{x}), A \otimes \mathbf{x}) < \alpha \|\mathbf{x}\|$$

が成り立つとき, \mathbf{f} は A でトロピカル線形近似可能であるという. 以上の準備のものとて, 差分方程式の安定性に関する次の定理を示すことができる.

定理 3 ベクトル値関数 $\mathbf{f}: \mathbb{R}_{\max}^n \rightarrow \mathbb{R}_{\max}^n$ が ε を不動点に持ち, かつ $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ でトロピカル線形近似可能であるとき, $A = J\mathbf{f}$ が成り立つ. さらにこのとき, $J\mathbf{f}$ の最大固有値が負なら ε は漸近安定な不動点であり, $J\mathbf{f}$ の最大固有値が正なら ε は不安定な不動点である.

トロピカル半環では減法が定義できないため, 原点 ε について得られた安定性の結果を, このままの形では原点以外の不動点の場合に適用できない. そのため, ε 以外の点でのトロピカル偏微分の定義を改めて考える必要があるが, それは今後の課題である.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 22K13964 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] S. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, 3rd ed., Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [2] S. Gibo and H. Ito, Discrete and ultradiscrete models for biological rhythms comprising a simple negative feedback loop, *J. Theor. Biol.*, **378** (2015), 89–95.
- [3] Y. Yamazaki and S. Ohmori, Ultradiscretization in discrete limit cycles of tropically discretized and max-plus Sel'kov models, *JSIAM Letters*, **16** (2024), 85–88.
- [4] R. A. Cuninghame-Green, *Minimax Algebra*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1979.
- [5] G. Cohen, D. Dubois, J. P. Quadrat and M. Viot, A linear-system-theoretic view of discrete-event processes and its use for performance evaluation in manufacturing, *IEEE Trans. Automat. Control*, **30** (1985), 210–220,

二次元箱玉系について

Two-dimensional Box and Ball System

粟田 円佳 (Madoka Awada)¹, 高橋 大輔 (Daisuke Takahashi)¹,

¹ 早稲田大学 (Waseda University)

e-mail : madoka-awada@fuji.waseda.jp

1 概要

箱玉系 [1] とは、玉 1 つを収容できる箱を横 1 列に並べ、配置した玉をあるルールに従って右へ運ぶ系である。これを空間二次元に拡張する。[2] つまり、あるルールに従って玉を右へ 1 回、上へ 1 回運ぶ系を考え、これを二次元箱玉系と呼ぶ。このとき、元の玉と同じ配置に戻る「周期パターン」があり、これに着目する。本研究の最終目標は、周期パターンとなる形状についての一般条件を求め、無限系列を具体的に提示することである。講演では、部分的に解決した結果について解説を行う。

2 箱玉系の二次元化

箱玉系では、図 1 のように時間発展が見られる。玉の運び方は、現在対象としている箱が空の場合、手持ちの玉があればそのうちの 1 つを箱に入れ、手持ちの玉がなければ何もしない。箱に玉がある場合は、その玉を取り出して手に持つ。なお、手に持てる玉の個数に上限はないとする。

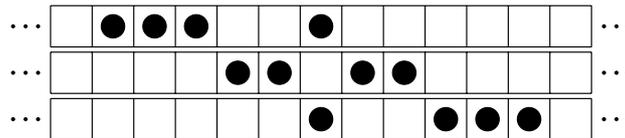


図 1: 箱玉系の時間発展

ここから、箱玉系を空間二次元に拡張する。まず箱玉系と同様に玉を用意し、箱を縦、横に碁盤のように並べる。次に、運搬人（玉を移し替える人）は、任意の時刻 n で各行に対して玉を右へ動かす。玉の動かし方は箱玉系と同様である。各行に対して全ての箱を一巡したら、次は各列に対して玉を上へ動かす。各列に対して全ての箱を一巡したら、時刻が 1 増えて $n+1$ になる。例を図 2 に示す。

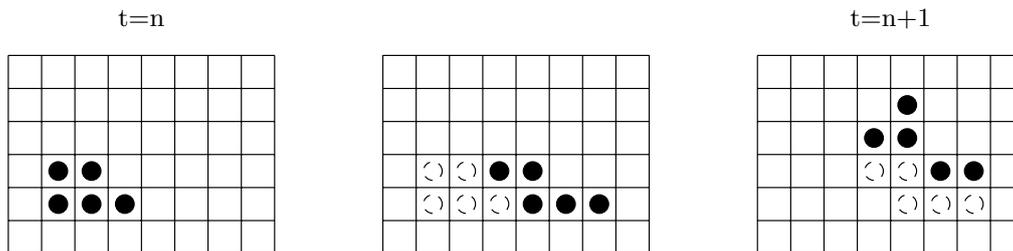


図 2: 二次元箱玉系の箱と玉の並べ方

3 二次元箱玉系の周期パターン

二次元箱玉系において、一般に図形パターンを時間発展させるとその形は崩れ、元には戻らない。しかし、中には時間が経つと、元と同じパターンに戻るものが存在し、これを周期パターンと呼ぶ。

周期パターンとして、長方形など簡単な例以外のものが3例見つかった（図3）。[2] ただしそれらは、プログラムによる探索が可能な、大きさが 6×6 以内のもののみである。なお、簡単のため、左右方向、上下方向の移動が終了した後の玉の配置をそれぞれ赤、青で示している。

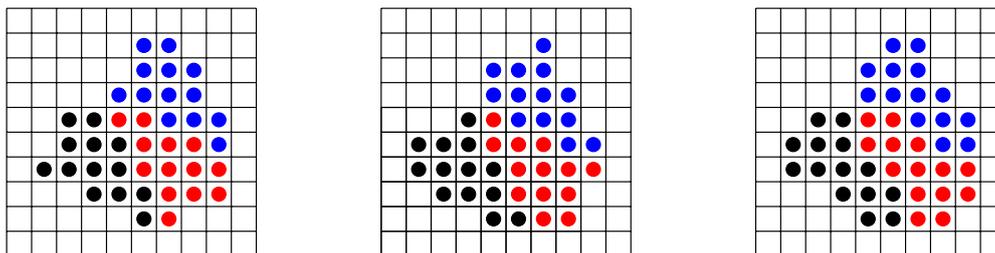


図3: 二次元箱玉系の周期パターン例

4 新たな周期パターンの探索

大きさが 7×7 以上の周期パターンはプログラムによる探索が困難なため、既出の3例から周期パターンとなる必要条件を導いていく。まず、一辺 x の正方形から、右上と左下を切り取って周期パターンを作ると考える。その操作の例を図4に示す。正方形の右上、左下を矢印の位置から切り取っていき、下、右へ向かって進むマス数をそれぞれ $C1[s]$ 、 $C2[s]$ とする。（ s は、これらの配列の要素数とする。）このとき、 $C1[s]$ 、 $C2[s]$ は対称的、が周期パターンとなる必要条件の一つ目である。

また、周期パターンの各列の玉の数を、左の列から順に $B1[x]$ に、各行の玉の数を、下の行から順に $B2[x]$ に入れる。このとき、 $B1[x] = B2[x]$ が周期パターンとなる必要条件の二つ目である。これらの二つの条件を元に、C言語でプログラムを作成し、新たに63個の周期パターン（無限系列を含む）を発見した。これらの詳細について、講演にて紹介する。



図4: 周期パターンの考察

参考文献

- [1] D.Takahashi and J.Satsuma, *A soliton cellular automaton*, J. Phys. Soc. Japan **59** (1990), 3514–3519.
- [2] 古井充, “箱玉系の2次元化について”, 早稲田大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻高橋研究室, 2006年度修士論文.

再帰 max-plus 方程式の高階化で得られる漸近安定系について

Asymptotically stable system obtained by a higher-order extension of recursive max-plus equation

大藪 連 (Ren Oyabu)¹, 高橋 大輔 (Daisuke Takahashi)¹,¹ 早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

e-mail : renoyb.189e@toki.waseda.jp

1 概要

max-plus 演算で定義される再帰方程式について, 解の周期性を利用して高階化を行う. このような高階化を行うと, 一般に再帰性が失われるが, 任意の初期値から一定の安定多様体に落ち込む系が得られることが多い. 講演では, このような高階化の手法について説明し, 解の挙動について具体例を示しながら説明する. 解の漸近性を示すために重要な量となるのがリアプノフ関数であるが, 最終的に落ち込む安定多様体の max-plus 表現を利用すると, いくつかの系でリアプノフ関数を構成することに成功した. この関数の構成方法, および, 時間発展における関数の単調性の証明などについて説明を行う.

2 再帰方程式の高階化

周期 5 の再帰方程式

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1} \quad (1)$$

を, 解の周期性に着目して高階化すると, 例えば次の 5 つの方程式が得られる.

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-2}) - X_n \quad (2)$$

$$X_{n+1} = \max(0, \max(0, X_{n-1}) - X_{n-2}) - X_{n-1} \quad (3)$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - (\max(0, X_{n-2}) - X_{n-3}) \quad (4)$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-2}, X_{n-1}) + X_n - X_{n-1} - \max(0, X_{n-1}) \quad (5)$$

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-1}, 2X_n + X_{n-2}) - X_{n-2} - X_{n-1} - X_n \quad (6)$$

また, 周期 8 の再帰方程式

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - 2X_n - X_{n-1} \quad (7)$$

の高階化として, 例えば次のようなものがある.

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-1}, 2X_{n-1} + X_{n-2}) - X_{n-2} - 3X_{n-1} - 2X_n \quad (8)$$

3 リアプノフ関数

安定多様体の max-plus 表現を利用すると, (3) のリアプノフ関数は

$$C_n = x + z - \max(0, y) \quad (9)$$

と書ける. ここで, (3) の相空間の座標に対する写像は,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} y \\ z \\ \max(x, y, 0) - x - y \end{pmatrix} \quad (10)$$

と書ける. ここで $C_n (\neq 0)$ 上の任意の点を初期値にスタートしても, いずれは $C_n = 0$ に落ち込むことが予想される.

4 リアプノフ関数の広義単調性の証明

$|C_n| - |C_{n+1}| \geq 0$ を示す. リアプノフ関数 $C_n = X_{n-1} + X_{n+1} - \max(0, X_n)$ に (3) 式を変形した $X_{n+1} = \max(X_{n-2}, X_{n-1}, 0) - X_{n-2} - X_{n-1}$ を代入することで,

$$|C_n| - |C_{n+1}| = \max(x, x + 2y, 0, z, 2x + 3z, 2x + y + 3z, 3y, 3y + z, 3x + 2z, 3x + 3z) - \max(2x + 3z, 2x + y + 3z, \underline{2x + z}, \underline{2x + y + z}, z, 3y + z) \quad (11)$$

となるが, ここで 2 番目の \max 内の下線部以外は全て 1 番目の \max の項に含まれている. さらに, 2 つの下線部の値は, 1 番目の \max による凸包に含まれているので, (実際, $2x + z = (x + (3x + 2z))/2$, $2x + y + z = ((x + 2y) + (3x + 2z))/2$ である.) (11) 式は,

$$|C_n| - |C_{n+1}| = \max(x, x + 2y, 0, z, 2x + 3z, 2x + y + 3z, 3y, 3y + z, 3x + 2z, 3x + 3z, \underline{2x + z}, \underline{2x + y + z}) - \max(2x + 3z, 2x + y + 3z, 2x + z, 2x + y + z, z, 3y + z) \quad (12)$$

と書いても構わない. したがって, 2 番目の \max の全ての項は 1 番目の \max の中に含まれている. 以上より, $|C_n| - |C_{n+1}| \geq 0$ であることが示せた.

5 逆超離散化された再帰方程式の広義単調性の証明

(3) 式とそのリアプノフ関数を逆超離散化すると,

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-2} + x_{n-1}}{x_{n-2}x_{n-1}} \\ f_n = \frac{x_{n-1}x_{n+1}}{1 + x_n} + \frac{1 + x_n}{x_{n-1}x_{n+1}} \end{cases} \quad (13)$$

のようになる. この f_n について逆超離散化された差分方程式を用いると,

$$f_n - f_{n+1} = \frac{x_{n-1}(1 + x_{n-1} - x_{n-2}x_n)^2(1 + x_{n-1} + x_{n-2}(2 + x_{n-1} + x_n))}{x_{n-2}(1 + x_{n-2})(1 + x_{n-1})(1 + x_{n-2} + x_{n-1})(1 + x_n)(1 + x_{n-1} + x_n)} \quad (14)$$

となる. よって, $x_n > 0$ の範囲で $f_n \geq f_{n+1}$ となり, f_n は $n \rightarrow \infty$ で最小値 2 に収束し, このとき $\frac{x_{n-1}x_{n+1}}{1+x_n} = 1$ が成り立ち, 超離散化の結果と符合する.

参考文献

- [1] 大藪 連, “max-plus 再帰方程式の高階化と解の漸近解析”, 早稲田大学基幹理工学部 2024 年度卒業論文.
- [2] 広田良吾, 高橋大輔, 『差分と超離散』, 共立出版 (2003).

ロバストカオスを生じる超離散力学系

An Ultradiscrete Dynamical System Exhibiting Robust Chaos

大森 祥輔 (Ohmori Shousuke)¹, 山崎 義弘 (Yamazaki Yoshihiro)²,

¹ 法政大学 (Hosei University), ² 早稲田大学 (Waseda University)

e-mail : 42261timemachine@ruri.waseda.jp

1 概要

本発表では、ロバストカオス (robust chaos) を生じる超離散 max-plus モデルの性質について報告する。ロバストカオスは周期窓の出ないカオスとして知られており、特に区分線形力学系にてその存在が確認されてきた [1]。ロバストカオスを生じる代表的な二次元力学系として、以下の Lozi 写像が知られている。

$$\begin{cases} X_{n+1} = 1 + Y_n - aX_n \\ Y_{n+1} = bX_n \end{cases} \quad (1)$$

ここで a, b は分岐パラメータであり、例えば $b = 0.3$ と固定し a を 0.1 から大きくしていくと、周期窓のない分岐ダイアグラムを見出すことができる。

我々はこれまで、以下の二次元 max-plus 離散モデルの力学的性質について議論してきた [2, 3]。

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n + \max(0, TX_n) \\ Y_{n+1} = B - \max(0, DX_n) \end{cases} \quad (2)$$

ここで、 B および $T, D (\geq 0)$ は分岐パラメータである。式 (2) はいくつかの力学系モデルからトロピカル差分を介して得られる超離散方程式の一般化になっている。例えば、 $T = D$ のとき、式 (2) は解糖系の数理モデルとして知られる Selkov モデルの超離散方程式に対応し [4]、 $T = 0, D > 0$ のときは、ネガティブフィードバックを有する力学モデルの超離散方程式に対応する [5]。更に式 (2) は次の max-plus 離散モデルの特別な場合として考えることができる。

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n + \max(L_1X_n, R_1X_n) \\ Y_{n+1} = B - \max(L_2X_n, R_2X_n) \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 B および L_1, L_2, R_1, R_2 は分岐パラメータであり、 $L_i \leq R_i$ ($i = 1, 2$) を仮定する。

式 (3) は特別な場合として Lozi 写像 (1) のダイナミクスを含む。実際、Lozi 写像 (1) に対して変数変換

$$-X_n \rightarrow X_n, \quad -(1 + Y_n) \rightarrow Y_n, \quad (4)$$

を行い、 $|X_n| = \max(X_n, -X_n)$ に注意すれば、Lozi 写像と力学的に同値 (区分的位相共役) な離散力学系

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n + \max(-aX_n, aX_n) \\ Y_{n+1} = -1 - bX_n \end{cases} \quad (5)$$

を導出することができる。式 (5) を max-plus Lozi 写像と呼ぼう。そして、この max-plus Lozi 写像 (5) は、式 (3) に対してパラメータを $R_1 = a, R_2 = -a, L_1 = L_2 = -b, B = -1$ と定めた式に対

応する. 図 1 は max-plus Lozi 写像の (a) ストレンジアトラクター ($a = 1.7, b = 0.3$) と (b) 分岐ダイアグラムである. (b) において, 周期窓が無いことが確認できる. なお, これらの力学的性質は Lozi 写像 (2) のそれと力学的同値である.

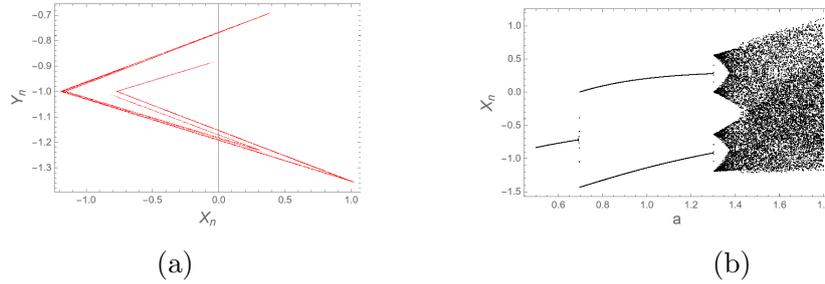


図 1. 式 (5) における (a) ストレンジアトラクター ($a = 1.7, b = 0.3$) および (b) 分岐ダイアグラム.

さて, 式 (3) が超離散方程式の一般化として得られた過程を念頭において, max-plus Lozi 写像を超離散化によって導出する微分・差分方程式について考える. 本発表では, トロピカル Selkov モデル型の以下の差分方程式を採用する.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{x_n + \tau y_n (x_n^{-a} + x_n^a)}{1 + \tau} \\ y_{n+1} = \frac{y_n + \tau/2}{1 + \tau x_n^{-b}} \end{cases} \quad (6)$$

式 (6) は超離散化によって式 (5) となる一方, 連続力学系 $dx/dt = -x + y(x^a + x^{-a}), dy/dt = 1/2 - yx^{-b}$ の正值差分化によって導出できる. 本発表では, 式 (6) の時間幅 τ を大きくすることで周期倍分岐が起こり系がカオスとなること, そして超離散化によって式 (5) へ一致していき, カオスのロバスト性が生じていくことを示す.

謝辞 本研究は JSPS 科研費 22K03442, 22K13963, 25K00212, および 25K07140 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] Z. Elhadj, J. C. Sprott, Robust Chaos And Its Applications, World Scientific Publishing, 2011.
- [2] Y. Yamazaki and S. Ohmori, Periodicity of Limit Cycles in a Max-plus Dynamical System, J. Phys. Soc. Jpn. Vol.90 (2021) 103001.
- [3] S. Ohmori and Y. Yamazaki, A generalization for ultradiscrete limit cycles in a certain type of max-plus dynamical systems, J. Math. Phys. Vol.65 (2024) 082705.
- [4] S. Ohmori and Y. Yamazaki, Poincaré map approach to limit cycles of a simplified ultradiscrete Sel'kov model, JSIAMLetters Vol.14 (2022) 127–130.
- [5] S. Ohmori and Y. Yamazaki, Dynamical properties of discrete negative feedback models, arXiv:2305.05908.