

ある 4 近傍ファジーセルオートマトンの漸近解と その基本図について

金井 紗和 高橋 大輔

早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

概要. 時間 1 階空間 4 近傍の粒子セルオートマトンを 2 つ取り上げ, そのファジー化を行った. そのファジー化は, 流量のルール表を多項式によって連続化することで実現している. さらに, これらファジーセルオートマトンについて時間無限大での漸近解の一般形を導出した. また, 得られた解を用いて基本図を示した.

On Asymptotic Solutions and Fundamental Diagrams of Some Fuzzy Cellular Automata with 4 Neighbors

Sawa Kanai Daisuke Takahashi

Department of Pure and Applied Mathematics,
School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

Abstract. We fuzzificate two particle cellular automata of first order on time and with 4 neighbors. The fuzzification is realized by giving continuous polynomial rules from the rule tables of flow of cellular automata. We derive asymptotic solutions at infinite time step for the fuzzy cellular automata. Moreover, fundamental diagrams for the systems are also obtained using their solutions.

1. はじめに

セルオートマトンあるいはセルラーオートマトン (Cellular Automaton, CA) とは独立変数 (空間, 時間など) と従属変数 (状態変数) がすべて離散的で, さらに従属変数の値域が有限集合になっているような時間発展系のことをいう [1]. 本論文では, ファジー化の対象として, 離散的な時空間内を移動する多粒子系を表す CA を取り上げる. 1 次元サイト j と時刻 n を整数の独立変数とし, (j, n) に存在する粒子の個数を u_j^n とする. 各サイトにはせいぜい 1 個の粒子までが存在し得るとする. 粒子の移動規則を表す時間発展方程式は, $r_1 < r_2$ を満たす整数 r_1, r_2 を用いて,

$$(1.1) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j+r_1}^n, u_{j+r_1+1}^n, \dots, u_{j+r_2-1}^n) - q(u_{j+r_1+1}^n, u_{j+r_1+2}^n, \dots, u_{j+r_2}^n)$$

と一般に表すことができる [2]. u_j^n は任意の時刻 n で, 周期境界条件や $\lim_{j \rightarrow \pm\infty} u = 0$ などの適切な境界条件の下に

$$\sum_j u_j^n = \sum_j u_j^{n+1}$$

を満たす, すなわち粒子数の保存則が成り立つ. このように定義された CA は, 近傍数が $R = r_2 - r_1 + 1$ であり, 粒子の移動を表す系として particle を意味する P および近傍数 R を付けて PCAR と呼ぶことにする. 近傍数 R を定めても r_1 あるいは r_2 の自由度が残るが, c を任意の整数として $j' = j + cn$, $n' = n$ の座標変換を施す, すなわち斜交座標を導入することで, 次の時刻 u_j^{n+1} に対する現在の時刻の依存範囲 (すなわち近傍の範囲) を自由に移動できるので, r_1 あるいは r_2 を適当に固定して構わない. なお, 2.1 節と 3.1 節で, この座標変換を具体的に用いているので参照されたい. 以上より, PCA3 と PCA4 の形式を次のように定める.

$$(1.2) \quad \text{PCA3} \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-1}^n, u_j^n) - q(u_j^n, u_{j+1}^n),$$

$$(1.3) \quad \text{PCA4} \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n) - q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n).$$

近傍数については, u_j^{n+1} に真に依存する u_j^n の範囲の大きさで数えることにすると, 例えば 3 近傍形式の (1.2) で $q(a, b) = a$ とすると $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$ となり 1 近傍, 4 近傍の形式の (1.3) で $q(a, b, c) = \tilde{q}(b, c)$ とすると 3 近傍になる. この数え方で独立な PCA は, 3 近傍のものは 1 種類, 4 近傍では 4 種類存在することが知られている. 本論文では 4 近傍の 4 種類のうち 2 つを取り上げて議論する. (1.2), (1.3) は, 現在の時刻の粒子数に左から流入する量を足し, 右へ流出する量を引くことによって, 次の時刻の粒子数が与えられると解釈できる. したがって, 式中の q は物理で用いられる流量に準じる量であるので, 以降では流量と呼ぶことにする. それらの流量 q はそれぞれ以下の表のルールで与えられる [4].

Table 1. Rule table of q of PCA3

PCA3	a, b	11	10	01	00
	$q(a, b)$	0	1	0	0

Table 2. Rule table of q of PCA4-1

PCA4-1	a, b, c	111	110	101	100	011	010	001	000
	$q(a, b, c)$	0	1	0	1	0	1	0	0

Table 3. Rule table of q of PCA4-2

PCA4-2	a, b, c	111	110	101	100	011	010	001	000
	$q(a, b, c)$	0	1	0	0	0	0	-1	0

空間サイトには周期境界条件が与えられ, 1 周期分のサイト数を K とする. 粒子数および流量の空間平均をそれぞれ

$$\rho = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^n, \quad \bar{q}^n = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K q(u_j^n, u_{j+1}^n, \dots, u_{j+R-1}^n)$$

とおく. 十分時間が経ったとき, 上記の PCA は定常状態にすべて落ち着き, \bar{q}^n は ρ のみ依存する一定値に収束するので [4], その値を

$$Q = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{q}^n$$

と定義する．横軸に ρ ，縦軸に Q をとったグラフは，交通流では自由走行相，渋滞相の相転移を表す重要なものであり，基本図と呼ばれている．本論文でも，このグラフを基本図と呼ぶことにする．それぞれの PCA について，基本図が Fig.1~3 で与えられる．

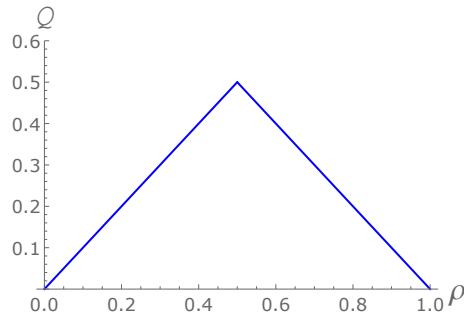


Fig. 1. Fundamental diagram of PCA3.

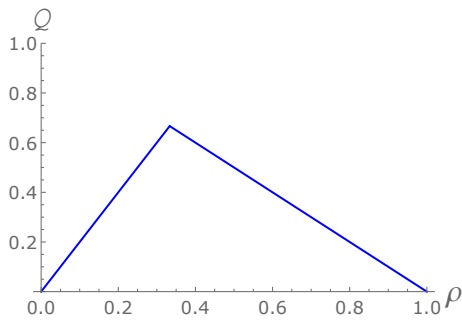


Fig. 2. Fundamental diagram of PCA4-1.

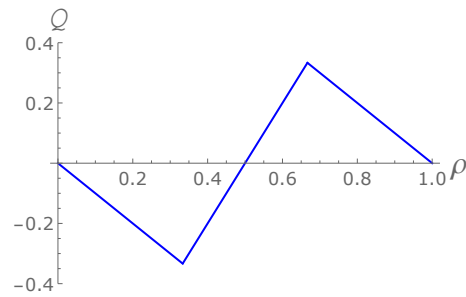


Fig. 3. Fundamental diagram of PCA4-2.

次に，本論文の目的である粒子モデルのファジー化について述べる．ファジー化とは，CA のルール表を基にして，従属変数が実数値をとるようにルールを連続化することである．PCA についても東らが PCA3 を多項式でファジー化し，Fig.4 の基本図を導いた [3]. その時間発展方程式では，流量を

$$(1.4) \quad q(a, b) = a(1 - b)$$

としている． u は $[0, 1]$ で閉じ，粒子数の代わりに粒子の存在割合を表している．また， $u \in \{0, 1\}$ に制限すると，元の PCA3 が再現される．Fig.4 の基本図では，最上部の青の折れ線は，初期値が $u \in \{0, 1\}$ で実現され，その下の青い領域は，それ以外の初期値から得られる周期 2 あるいは一様の漸近解で実現され，オレンジの曲線が各密度における最小値である．

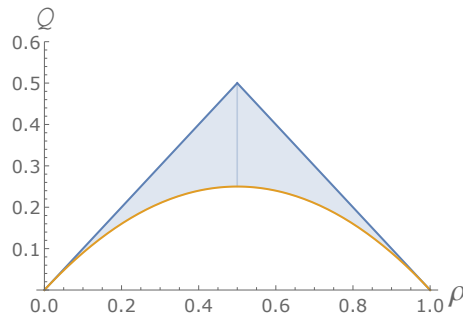


Fig. 4. Fundamental diagram of fuzzy CA defined by (1.4).

本論文では PCA4-1, PCA4-2 を題材とし, それらをファジー化した系について議論する. それらの系について時間が十分経過した後の漸近解を提出し, どのような基本図が得られるかを示す.

2. PCA4-1 のファジー化について

2.1 ファジー化と漸近解

Table.2 で表される流量を多項式で表すことでファジー化する. この表において, $(a, c) = (1, 0)$ または $(a, b, c) = (0, 1, 0)$ のときのみ $q(a, b, c) = 1$ となる. これを満たす q の多項式には様々なものが考えられるが, 本論文ではなるべく次数の小さいものとして

$$(2.1) \quad q(a, b, c) = a(1 - c) + (1 - a)b(1 - c)$$

を採用し, この多項式を (1.3) に代入した時間発展方程式を fPCA4-1 と呼ぶ.

漸近解の解析を容易にするため, (1.3) の形式の fPCA4-1 の変数に以下の変換を施す.

$$u' = 1 - u, \quad j' = j + n, \quad n' = n.$$

この変換は, 元の格子座標 (j, n) に斜交座標 (j', n') を導入することになる. すなわち $u_{j'}^{n'} = u_{j+n}^n = 1 - u_j^n$ となるので, 時刻 n の u の空間分布を右へ n だけずらし, 値を $1 - u$ に変更するということになる. この変換の逆変換は $u_j^n = 1 - u_{j-n}^{n'}$ であり, u_j^n の時間発展から $u_{j'}^{n'}$ の時間発展を, そしてその逆も一意的に得ることができる. 状態値を線形変換し, 解の時間発展を空間方向に斜めにずらしたただけであるので, 後に述べる解の周期性については変数変換の前後で変わらない. (2.1) を (1.3) に代入し, この変換を用い, さらに煩雑さを避けるために記号のダッシュを取ると,

$$(2.2) \quad u_j^{n+1} = u_{j-3}^n u_{j-2}^n u_{j-1}^n + u_j^n (1 - u_{j-2}^n u_{j-1}^n)$$

が得られる. 以下ではこの方程式を用いる. なお, Fig.5 (a), (b) に, 変数変換前後の解の様子を示す. 表示をわかりやすくするため, (a) の初期値に $\{0, 1/2, 1\}$ の乱数を用い,

比較のため (b) の初期値は (a) の初期値を $1 - u$ によって変換している. j 軸, n 軸の正方向はそれぞれ右, 下である.

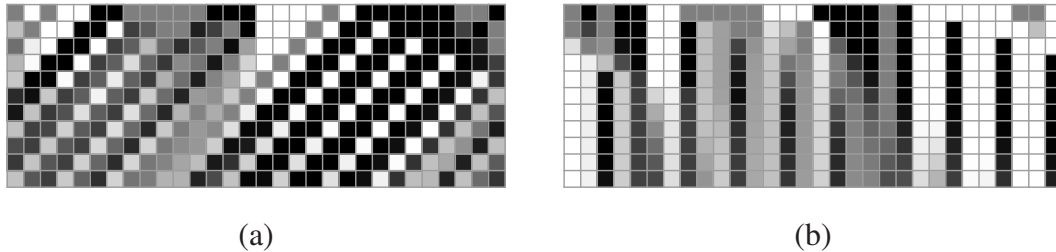


Fig. 5. Example of change of a solution through transformation of variables. (a) Solution to fPCA4-1 defined by (1.3) and (2.1), (b) Solution to (2.2) derived by the transformation.

左辺の u_j^{n+1} は, u_{j-3}^n と u_j^n について比 $u_{j-2}^n u_{j-1}^n$ の補間で与えられるとみなせる [5]. よって, 時間発展において u が $[0, 1]$ あるいは $(0, 1)$ で閉じることは明らかである. 次に, 初期値 u を $(0, 1)$ の範囲に限定し, $n \rightarrow \infty$ の漸近解を調べる. 時刻 n における $\{u_{3j}^n\}_j$ の最小値を s , 最大値を t とし, $s < t$ と仮定する. さらに $\{u_{3j}^n\}_j$ に, 連続して s の値をとる $l+1$ 個の列

$$u_{3j}^n = \cdots = u_{3(j+l)}^n = \alpha, \quad u_{3(j-1)}^n, u_{3(j+l+1)}^n > s$$

が存在するとする. このとき, (2.2) より,

$$u_{3j}^{n+1} > s, \quad u_{3(j+1)}^{n+1} = \cdots = u_{3(j+l)}^{n+1} = s$$

が成り立つ. よって, $l+1$ 個の s の列は 1 個減って l 個となる. これを繰り返すと, 有限時間後に最小値 s の列は消滅し, 最小値が s より大きくなる. 補間の性質により, 最大値についても同様である. 以上のことから, $n \rightarrow \infty$ で $\{u_{3j}^n\}_j$ の最小値と最大値は同じ値に収束し, すべての値が等しくなる. $\{u_{3j+1}^n\}_j$ と $\{u_{3j+2}^n\}_j$ もそれぞれ同様に, すべての値が等しくなる. よって, $u \in (0, 1)$ であるとき, $n \rightarrow \infty$ において u_j^n は空間サイズ K が 3 の倍数なら空間周期 3 の周期解 (一様解も含む) に収束することが示された. また, K が 3 の倍数でないときは, 初期値のコピーを 3 つ分並べて空間サイズを $3K$ とし, その初期値問題を考えると, 空間サイズが 3 の倍数の場合に帰着するので, 解は空間周期 3 の周期解に収束する. しかしながら, 初期値の周期性により, 解は常に $u_j^n = u_{j+K}^n = u_{j+2K}^n$ を満たす必要がある. K が 3 の倍数でないので, このことは $\{u_{3j}^n\}_j, \{u_{3j+1}^n\}_j, \{u_{3j+2}^n\}_j$ の収束値が同じ値に収束することを意味する. よって, 空間サイズが 3 の倍数でない場合は, 一様解に収束することになる. なお, $u \in [0, 1]$ のときは, 0 や 1 の値が生き残る局所パターンが存在し, その証明はより複雑であり, 現在は未完成である.

次に, (2.2) に摂動 $|\varepsilon_j^n| (\ll u_j^n)$ を加え, ε の 2 次以上の項を 0 とみなした式から (2.2) を辺々引くと,

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_j^n + (\varepsilon_{j-3}^n - \varepsilon_j^n) u_{j-2}^n u_{j-1}^n + \varepsilon_{j-2}^n u_{j-3}^n u_{j-1}^n + \varepsilon_{j-1}^n u_{j-3}^n u_{j-2}^n - \varepsilon_{j-1}^n u_{j-2}^n u_j^n - \varepsilon_{j-2}^n u_{j-1}^n u_j^n$$

となる. 周期 3 のとき $n \rightarrow \infty$ で $u_{j-3}^n = u_j^n$ であるのでこれを上式に代入すると,

$$\varepsilon_j^{n+1} = \varepsilon_{j-3}^n u_{j-2}^n u_{j-1}^n + \varepsilon_j^n (1 - u_{j-2}^n u_{j-1}^n)$$

となり, (2.2) と同じ補間の形になる. つまり, 周期 3 の解に摂動を加えてもその摂動を取り込んだまま周期 3 の解に落ち着く. 一様解も同様である.

2.2 基本図

基本図については, PCA4-1 との比較のため, 元の系, すなわち (2.1) を (1.3) に代入した方程式を用いる. 空間サイズ K が 3 の倍数で, 初期値が $u \in (0, 1)$ の場合を考える. この場合は 2.1 節より, 十分時間が経ったときその周期解が値 α, β, γ の繰り返しであるとする. このとき, (2.1) を用いると,

$$\rho(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma), \quad Q(\alpha, \beta, \gamma) = 2\rho - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) + \alpha\beta\gamma$$

と書くことができる. 新たに関数 g を

$$g(\alpha, \beta) = Q(\alpha, \beta, 3\rho - \alpha - \beta) = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta - \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + 2\rho - 3\alpha\rho - 3\beta\rho + 3\alpha\beta\rho$$

とおき, $(\alpha, \beta) : (0, 1) \times (0, 1)$ の領域において極値判定の定理を用いると極小値 $g(\rho, \rho) = \rho^3 - 3\rho^2 + 2\rho$ が存在することがわかる. この極小値と領域の境界における $g(\alpha, \beta)$ の最小値, 最大値を用いることにより, $g(\alpha, \beta)$ すなわち $Q(\alpha, \beta, 3\rho - \alpha - \beta)$ の最小値が,

$$(2.3) \quad \rho^3 - 3\rho^2 + 2\rho$$

となり, 最大値が

$$(2.4) \quad \begin{cases} 2\rho & \left(0 \leq \rho \leq \frac{1}{3}\right), \\ 1 - \rho & \left(\frac{1}{3} \leq \rho \leq 1\right) \end{cases}$$

となることが示される. α, β, γ の値は任意に選ぶことができ, $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ は連続である. よって, 基本図は Fig.6 のように最小値 (2.3) と最大値 (2.4) のグラフによって囲まれた閉領域となる. なお, 最大値 (2.4) は元の PCA4-1 の基本図のグラフと一致しており, $u \in \{0, 1\}$ の場合に相当する. K が 3 の倍数ではなく $u \in (0, 1)$ の初期値の場合は一様解に収束し, Q は (2.3) で与えられるので, そのときの基本図は Fig.6 の境界の下の曲線のみとなる. Fig.7 は数値計算により基本図を再現したものである.

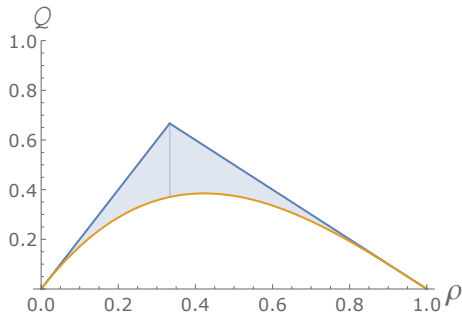


Fig. 6. Fundamental diagram of fPCA4-1.

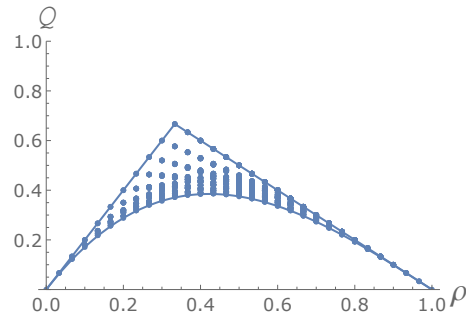


Fig. 7. Fundamental diagram of fPCA4-1 obtained by numerical calculation.

3. PCA4-2 のファジー化

3.1 ファジー化と漸近解

2.1 節と同様に Table.3 のファジー化として,

$$(3.1) \quad q(a, b, c) = ab(1 - c) - (1 - a)(1 - b)c$$

を採用し, この多項式を (1.3) に代入した時間発展方程式を fPCA4-2 と呼ぶ.

fPCA4-2 についても, $u \in (0, 1)$ であるとき, fPCA4-1 と同様の方法で空間周期 3 の周期解に収束することが示される. まず, fPCA4-2 の変数について, fPCA4-1 と同様に $u' = 1 - u, j' = j + n, n' = n$ の変換を施し, 煩雑さを避けるためにダッシュを取ると, 時間発展方程式

$$(3.2) \quad u_j^{n+1} = u_{j-3}^n(u_{j-2}^n + u_{j-1}^n - 2u_{j-2}^n u_{j-1}^n) + u_j^n(1 - (u_{j-2}^n + u_{j-1}^n - 2u_{j-2}^n u_{j-1}^n))$$

が得られる. u_j^{n+1} は u_{j-3}^n と u_j^n について比 $u_{j-2}^n + u_{j-1}^n - 2u_{j-2}^n u_{j-1}^n$ の補間とみなすことができる. よって, 時間発展において u が $[0, 1]$ あるいは $(0, 1)$ で閉じることは明らかである. 補間の性質から, $\{u_{3j}^n\}_j, \{u_{3j+1}^n\}_j, \{u_{3j+2}^n\}_j$ の最小値と最大値は $n \rightarrow \infty$ でそれぞれ同じ値に収束する. 以上のことから $u \in (0, 1)$ であるとき, $n \rightarrow \infty$ において空間サイズ K が 3 の倍数なら, 空間周期 3 の周期解 (一様解も含む) に収束し, 3 の倍数でなければ 2.1 節の fPCA4-1 で述べた理由と同様にして, 一様解に収束する. なお, $u \in [0, 1]$ のときは, 0 や 1 の値が生き残る局所パターンが存在し, その証明はより複雑であり, 現在は未完成である. また, 周期 3 の解に摂動 $|\varepsilon_j^n| (\ll u_j^n)$ を加えるとその摂動を取り込んだまま周期 3 の解に落ち着く. このことは一様解も同様である.

3.2 基本図

基本図については、2.2 節と同様、元の系、すなわち (3.1) を (1.3) に代入した方程式を用いる。空間サイズ K が 3 の倍数で $u \in (0, 1)$ の初期値を考えると、周期 3 の解に収束する。十分時間が経ったとき α, β, γ の繰り返しとなる周期 3 の解に収束するとして、基本図を考える。 $\rho = \frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$ であり、(3.1) を用いると、

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha - 2\alpha\beta\gamma - \rho$$

となる。 $Q(\alpha, \beta, 3\rho - \alpha - \beta)$ について、 $(\alpha, \beta) : (0, 1) \times (0, 1)$ の領域において極値判定の定理を用いると、極値 $Q(\rho, \rho, \rho) = -2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho$ が存在することがわかる。この極値は、 $0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$ のとき極大値、 $\frac{1}{2} \leq \rho \leq 1$ のとき極小値となる。領域の境界の最小値は、

$$\begin{cases} -\rho & (\alpha, \beta, \gamma \text{ のうち 2 つが } 0 \text{ をとるとき}), \\ -\frac{1}{4}(9\rho - 5)(\rho - 1) & (\alpha, \beta, \gamma \text{ のうち 1 つが } 1 \text{ をとり, 残り 2 つは等しい値をとるとき}) \end{cases}$$

となり、最大値は、

$$\begin{cases} \frac{9}{4}\rho^2 - \rho & (\alpha, \beta, \gamma \text{ のうち 1 つが } 0 \text{ をとり, 残り 2 つは等しい値をとるとき}), \\ 1 - \rho & (\alpha, \beta, \gamma \text{ のうち 2 つが } 1 \text{ をとるとき}) \end{cases}$$

である。これらを用いることにより、 $Q(\alpha, \beta, 3\rho - \alpha - \beta)$ の最小値は、

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\rho & \left(0 \leq \rho \leq \frac{1}{3}\right), \\ -\frac{1}{4}(9\rho - 5)(\rho - 1) & \left(\frac{1}{3} \leq \rho \leq \frac{5}{8}\right), \\ -2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho & \left(\frac{5}{8} \leq \rho \leq 1\right) \end{cases}$$

となり、最大値は、

$$(3.4) \quad \begin{cases} -2\rho^3 + 3\rho^2 - \rho & \left(0 \leq \rho \leq \frac{3}{8}\right), \\ \frac{9}{4}\rho^2 - \rho & \left(\frac{3}{8} \leq \rho \leq \frac{2}{3}\right), \\ 1 - \rho & \left(\frac{2}{3} \leq \rho \leq 1\right) \end{cases}$$

となることが示される。 α, β, γ の値は任意に選ぶことができ、 $Q(\alpha, \beta, \gamma)$ は連続である。よって、基本図は Fig.8(a) のように最小値 (3.3) と最大値 (3.4) のグラフによって囲まれた閉領域となる。なお、Fig.8(b) に元の PCA4-2 の基本図と fPCA4-2 の一様解の基本図を

重ねて示す. PCA4-2 の基本図は $0 \leq \rho \leq \frac{1}{3}$, $\frac{2}{3} \leq \rho \leq 1$ のとき Fig.8(a) の境界として現われている. しかしながら $\frac{1}{3} < \rho < \frac{2}{3}$ のときの PCA4-2 の基本図と, $\frac{3}{8} < \rho < \frac{5}{8}$ のときの一様解の基本図は Fig.8(a) の内部領域に埋もれている. 基本図の領域の境界が $\{0, 1\}$ の解と一様解だけで作られていた fPCA4-1 と異なる特徴である. なお, Fig.8(c) は数値計算により基本図を再現したものである.

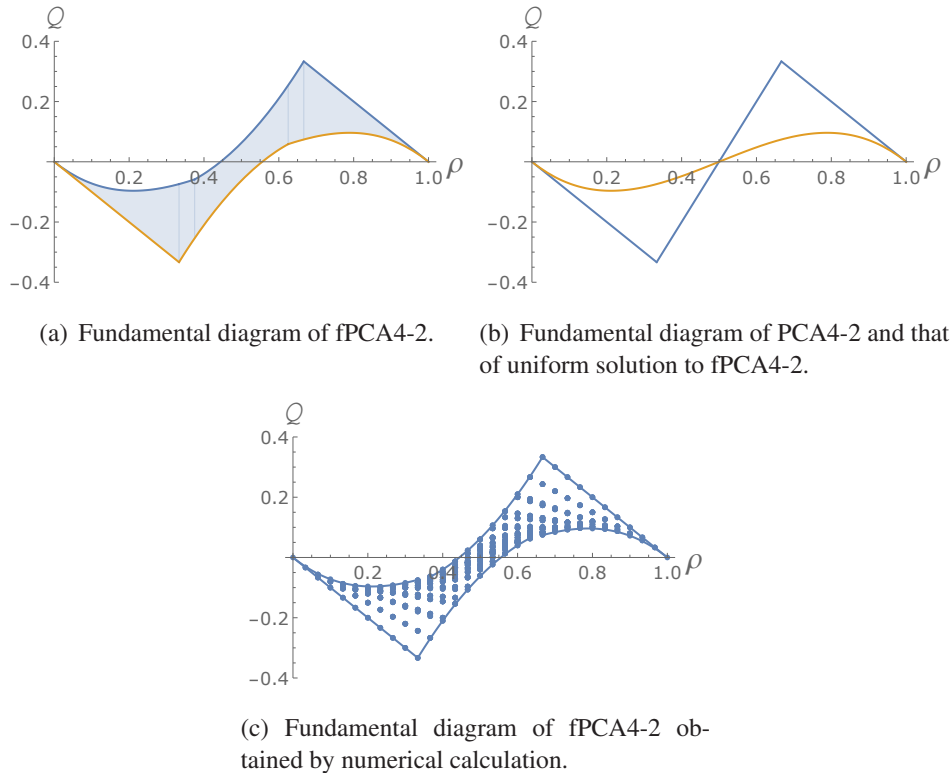


Fig. 8. Fundamental diagram and boundary curves of fPCA4-2.

4. 今後の課題

本論文では, PCA4-1, 4-2 に対するファジー化を行い, それらの漸近解について議論した. これらファジー系については, $u \in [0, 1]$ のすべての初期値について漸近解の導出が完成していない. このことは, 今後の課題である. また, 4近傍の PCA については独立なルールが他に2つ存在する. それらのファジー化については, 方程式の候補は得られるが, 漸近解の議論が難しく, 理論的結果がほとんど得られていない. これについても, 今後の課題としたい.

参考文献

- [1] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 東京, 2003.
- [2] Tetsuya Hattori and Shinji Takesue, Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **3** (1991), 295–322.
- [3] 東康平, 薩摩順吉, 時弘哲治, 交通流を記述する非線形離散モデルであるルール 184FCA の超離散解析, 応用力学研究所研究集会報告, 2019AO-S2, (2020), 25-30.
- [4] Daisuke Takahashi, Junta Matsukidaira, Hiroaki Hara and Bao-Feng Feng, Max-plus analysis on some binary particle systems, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011), 1–21.
- [5] H. Betel and P. Flocchini, On the Asymptotic Behaviour of Circular Fuzzy Cellular Automata, *J. Cell. Autom.*, **6** (2011), 25–52.

金井 紗和 (非会員) 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

2022 年早稲田大学基幹理工学部応用数理学科卒業。現在, 早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻に在学。ファジーセルオートマトンに興味を持つ。

高橋 大輔 (会員) 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

1985 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了。工学博士。現在, 早稲田大学理工学術院教授。非線形系, 特に離散時間発展系の数理の構築に興味を持つ。日本応用数理学会, 日本物理学会, 日本数学会, 日本流体力学会会員。Email: daisuket@waseda.jp

(受付日 2022 年 6 月 28 日)

(受理日 2023 年 1 月 16 日)