日本応用数理学会論文誌
Vol. 30, No. 3, 2020, pp. 177〜193

# 外部変数付き max 方程式と連立 max 方程式の初期値問題について

保坂 圭祐　　高橋 大輔
早稲田大学大学院 基幹理工学研究科 数学応用数理専攻

**概要.**　max 演算で構成される時間発展方程式の初期値問題を考える．一般解の表現の複雑度は通常指数オーダーであるが，簡約化により多項式オーダーに下げられるものが存在する．本稿ではこれら多項式オーダーの方程式に対して外部変数を導入する，あるいは方程式を連立化することによっても解の複雑度が多項式オーダーを維持するものを具体例を挙げて紹介する．

# Initial Value Problem for Max Equations with an External Parameter and Systems of Max Equations

Keisuke Hosaka　Daisuke Takahashi
Department of Pure and Applied Mathematics,
School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University

*Abstract.*　We consider the initial value problem for the evolution equations defined by max operators. Though the complexity of expression of general solutions is usually of exponential order, there exist some equations of which order can be reduced to polynomial one using simplification of solution expression. We consider importing an external parameter to the max equations or constructing a system of the max equations. Some concrete examples are reported of which order of solution complexity can be preserved as polynomial.

## 1.　はじめに

以下の形式に従う $(1+1)$ 次元 3 近傍の時間発展差分方程式を考える．

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n). \tag{1.1}$$

ここで $u$ は空間サイト $j$，時刻 $n$ という 2 種類の整数の独立変数に依存する実数の従属変数である．また，$f(a,b,c)$ は $a, b, c$ について max, min および符号反転 $-$ の 3 種類の演算のみで構成される関数で，$\max(x_1, x_2, \ldots)$, $\min(x_1, x_2, \ldots)$ はそれぞれ $x_1, x_2, \ldots$ のうちの最大値，最小値を与える演算である．たとえば

$$u_j^{n+1} = \min(\max(-u_{j-1}^n, -u_j^n), u_{j+1}^n) \tag{1.2}$$

という方程式がこれにあたる．この定義にしたがう方程式を以降では簡便のため max 方程式と呼び，$n = 0$ を初期時刻として $n > 0$ での時間発展を考える．

このような方程式は，全順序束 $\mathbb{R}$ 上の時間発展方程式とみなすことができ，表現形式として広い範囲をカバーしている．たとえば $u$ の値域を $\{-1, 1\}$ の 2 元集合で閉じることも可能で，この場合はブール束上の初等セルオートマトンと等価となる [5]．また，超離散化によって得られる max–plus 方程式の特殊な形式とみなすこともでき [1]，その解の振るまいを調べることは超離散化による連続–離散対応の格好の題材を提供している [3,4]．

一般に，方程式の初期値からの時間発展で得られた解の振る舞いを議論する際に，解の表現をどれだけ簡明なものに帰着できるか否かは重要である．もし (1.1) の初期値問題で項や演算の整理をしないならば

$$
\begin{aligned}
&u_j^1 = f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0),\\
&u_j^2 = f(f(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, u_j^0), f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0), f(u_j^0, u_{j-1}^0, u_{j+2}^0))\\
&\quad \dots,
\end{aligned}
$$

という具合に，$n$ の増加とともに項の数が指数的に増える*1．これに対して，後述する公式等を用いれば，たとえば (1.2) の $u_j^2$ は

$$
\begin{aligned}
u_j^2 &= \min(\max(-u_{j-1}^1, -u_j^1), u_{j+1}^1)\\
&= \min(\max(-\min(\max(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), u_j^0), -\min(\max(-u_{j-1}^0, -u_j^0), u_{j+1}^0)),\\
&\qquad \min(\max(-u_j^0, -u_{j+1}^0), u_{j+2}^0))\\
&= \min(\max(\max(-\max(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), -u_j^0), \max(-\max(-u_{j-1}^0, -u_j^0), -u_{j+1}^0)),\\
&\qquad \max(-u_j^0, -u_{j+1}^0), u_{j+2}^0)\\
&= \min(\max(\max(\min(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0), -u_j^0), \max(\min(u_{j-1}^0, u_j^0), -u_{j+1}^0)),\\
&\qquad \max(-u_j^0, -u_{j+1}^0), u_{j+2}^0)\\
&= \min(\max(\min(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0), -u_j^0, \min(u_{j-1}^0, u_j^0), -u_{j+1}^0), \max(-u_j^0, -u_{j+1}^0), u_{j+2}^0)\\
&= \min(\max(-u_j^0, -u_{j+1}^0), u_{j+2}^0)\\
&= u_{j+1}^1
\end{aligned}
$$

のように簡潔に表現でき，この結果より一般に

$$
u_j^n = u_{j+n-1}^1 = \min(\max(-u_{j+n-2}^0, -u_{j+n-1}^0), u_{j+n}^0) \tag{1.3}
$$

と項を整理でき，任意の $n$ において一定数の初期項で解を表現できる．すると初期値 $\{u_i^0\}$ から $\{u_i^1\}$ が計算された後は $n$ とともに $-j$ 方向に $\{u_i^1\}$ の分布がずれていくだけであることが直ちにわかる．

---

*1 式の表現に含まれる演算の対象をそれぞれ数えたもののことを項の数とするので，同じ変数であっても式表現の複数箇所に登場すれば独立に数える．

以上のように，解の複雑度を下げることによって解の振る舞いの大切な情報を得ることが可能となる．そこで，$u_j^n$ に含まれる初期値 $\{u_i^0\}$ の項の数ができるだけ少なくなるように整理し，その数のオーダーによって解の複雑度を定義する．そして，整理された解に含まれる項の数がせいぜい $O(n^r)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ となるような方程式をクラス $P_r$ に属するとする．したがって方程式 (1.2) は解 (1.3) より $P_0$ に属する．同様にして，方程式

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

は，整理された解

$$u_j^n = \min\Big(\min_{-1\le k\le n-2}(-u_{j+k}^0), \min_{0\le k\le n} u_{j+k}^0\Big)$$

を持つので $P_1$ に属する．なお，$P_r$ の定義は「せいぜい」$O(n^r)$ であり，たとえば $P_2$ に属しているものは，より小さいクラス $P_1, P_0$ に属する可能性もある．しかし，得られたクラスが最小であることの証明は難しい場合も多く，解の複雑度が指数オーダーでなく多項式オーダーであることが判明するだけでも解に関する詳しい情報が得られる．そこで本稿では，多項式オーダーの解が得られた否かという点を中心に議論を進める．

解の表現を整理するためには，max, min, − の演算に関する基本公式が重要な役割を果たす．そのような基本公式を以下に列挙する．

$$\begin{array}{ll}
\max(x, y) = \max(y, x), & \text{可換律}\\
\max(x, \max(y, z)) = \max(\max(x, y), z), & \text{結合律}\\
\max(x, \min(x, y)) = x, & \text{吸収律}\\
\max(x, x) = x, & \text{冪等律}\\
\max(x, \min(y, z)) = \min(\max(x, y), \max(x, z)), & \text{分配律}\\
-\max(x, y) = \min(-x, -y). & \text{符号反転}
\end{array}$$

これら公式は max と min を入れ替えたものも同様に成り立つ．また，初期値問題を考察する際に，分配律を繰り返し用た以下の公式は有用である．

$$\begin{aligned}
&\max(x_1, x_2, \ldots, \min(y_{11}, y_{12}, \ldots), \min(y_{21}, y_{22}, \ldots), \ldots)\\
&= \min_{i_1, i_2, \ldots}(\max(x_1, x_2, \ldots, y_{1i_1}, y_{2i_2}, \ldots)).
\end{aligned}$$

(1.1) の具体的な方程式群に対する分類は文献 [2] で報告されている．本稿では，その一般形をさらに拡張し，$u_j^n$ と独立な外部変数 $a_j^n$ を付加した

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, a_j^n) \tag{1.4}$$

という形式，および，$u_j^n$ と $v_j^n$ の 2 つの変数が連立した

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, v_j^n)\\ v_j^{n+1} = f(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n, u_j^n) \end{cases} \tag{1.5}$$

という形式について解の複雑度を議論する．それぞれの $f$ は (1.1) と同様に，引数の項と max, min および符号反転 − で構成される関数である．

# 2. 外部変数付き max 方程式

## 2.1 解の複雑度に対する外部変数の影響

まず，外部変数 $a_j^n$ を導入した (1.4) の形式の方程式について，外部変数を導入することが解の複雑度にどのように影響するかを具体例で見てみよう．なお，解の複雑度のクラス $P_r$ の定義には外部変数の項数は考慮せず，解 $u_j^n$ に含まれる $\{u_i^0\}$ の項数で評価するとする．

たとえば最初の例として

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, u_j^n) \tag{2.1}$$

に外部変数を導入した

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, u_j^n, a_j^n) \tag{2.2}$$

を考える．(2.1) の時間発展は

$$\begin{aligned} u_j^2 &= \min(-u_{j-1}^1, u_j^1) \\ &= \min(-\min(-u_{j-2}^0, u_{j-1}^0), \min(-u_{j-1}^0, u_j^0)) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), -u_{j-1}^0, u_j^0) \\ &= \min(-u_{j-1}^0, u_j^0) \end{aligned}$$

となるので

$$u_j^n = \min(-u_{j-1}^0, u_j^0) \qquad (n \geq 1)$$

であり，(2.1) は $P_0$ に属する．一方，(2.2) の時間発展は

$$\begin{aligned} u_j^2 &= \min(-u_{j-1}^1, u_j^1, a_j^1) \\ &= \min(-\min(-u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, a_j^0), a_j^1) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, -a_{j-1}^0), -u_{j-1}^0, u_j^0, a_j^0, a_j^1) \\ &= \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, a_j^0, a_j^1) \end{aligned}$$

となるので

$$u_j^n = \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, \min_{0 \leq k \leq n-1} a_j^k)$$

となり，やはり $P_0$ に属する．

しかしながら，外部変数は $\{u_i^0\}$ と大小比較ができないので，外部変数を方程式に導入することによって項数が減らない場合が非常に多い．この事実を示す簡単な例として，外部変数が無い

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n) \tag{2.3}$$

に外部変数を導入した

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n, a_j^n) \tag{2.4}$$

を考える．この方程式の解の時間発展は以下で与えられる．

$$\begin{aligned}
u_j^1 &= \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0).\\
u_j^2 &= \min\Big(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -a_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -a_j^0), a_j^1\Big).\\
u_j^3 &= \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, a_{j-2}^0), \min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), -a_{j-1}^1\Big),\\
&\qquad \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0), \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0), -a_j^1\Big), a_j^2\Big)\\
&= \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, a_{j-1}^0),\\
&\qquad \min\Big(\max\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, a_{j-2}^0), -a_{j-1}^1\Big), \max\Big(\min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, a_j^0), -a_j^1\Big)\Big)\Big), a_j^2\Big).
\end{aligned}$$

基本公式によってこれら時間発展の表示を変えることは可能であるが，$\{a_i^m\}$ の存在によってもっと項数を減らすことは不可能であり，$n$ について指数オーダーで項数が増加する．つまり (2.4) は多項式オーダーのクラスには属さない．

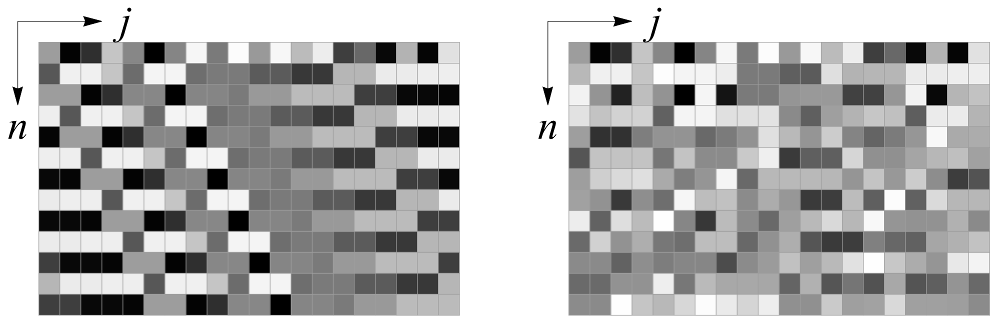
一方，外部変数 $a_j^n$ が無い (2.3) の解は，たとえば上の $u_j^3$ については外部変数を削除すると

$$\begin{aligned}
u_j^3 &= \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), \min\Big(\min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0), \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0)\Big)\Big)\\
&= \max\Big(\min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0), \min(-u_{j-3}^0, -u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0, -u_j^0)\Big)\\
&= \min(-u_{j-2}^0, -u_{j-1}^0)
\end{aligned}$$

と項数がかなり減少する．実は

$$u_j^{2n+1} = u_{j-n}^1, \qquad u_j^{2n+2} = u_{j-n}^2 \tag{2.5}$$

となることが少し計算すればわかるので，(2.3) は $P_0$ である．外部変数が無い場合と有る場合では解の振る舞いも大きく異なる．有限サイズのサイト空間を設定し周期境界条件を与え，初期値 $\{u_i^0\}$ を $0 \le u \le 1$ の範囲の乱数を与えたときの時間発展を Fig. 1 (a) に示す．図ではサイトの値が大きいほど濃い色で示している．解 (2.5) からもわかるように，偶奇時刻の解のパターンがそれぞれ $+j$ 方向に速さ 1 で伝播している．外部変数 $a_j^n$ を $0 \le a \le 1$ の範囲の乱数で $j, n$ 毎に与えて (2.4) を計算した結果を Fig. 1 (b) に示す．外部変数が解の値に影響して不規則なパターンが出現する．




(a) (b)

Fig. 1. Examples of time evolution: (a) Equation (2.3), (b) Equation (2.4).

## 2.2 多項式オーダーの外部変数付き max 方程式

2.1 節で，外部変数があっても解の複雑度が多項式オーダーであるものや，逆に外部変数が有るために指数オーダーになるものなどの例を紹介した．先に述べたように，複雑度が多項式オーダーの解の表現は解の振る舞いに重要な情報を与えるので，ここでは多項式オーダーになる方程式と解の例を 2 つ紹介し，外部変数が無い場合と有る場合で解の振る舞いがどのように変わるかについても触れる．

### 2.2.1 $u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n, a_j^n)$

最初の例は

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n, a_j^n) \tag{2.6}$$

である．解は初期値と外部変数によって

$$u_j^n = \min\Big(\max\Big(\min(u_{j-1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j-1}^k), \min(u_{j+1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j+1}^k)\Big), u_j^0, \min_{0\le k\le n-1} a_j^k\Big) \tag{2.7}$$

で与えられ，クラス $P_0$ であることがわかる．外部変数が無い場合の方程式

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \tag{2.8}$$

の解は，上の解より直ちに

$$u_j^n = u_j^1 = \min(\max(u_{j-1}^0, u_{j+1}^0), u_j^0)$$

であり，やはり $P_0$ である．

(2.8) および (2.6) の解の時間発展の例をそれぞれ Fig. 2 (a), (b) に示す．初期値と外部変数の与え方は Fig. 1 と同じである．

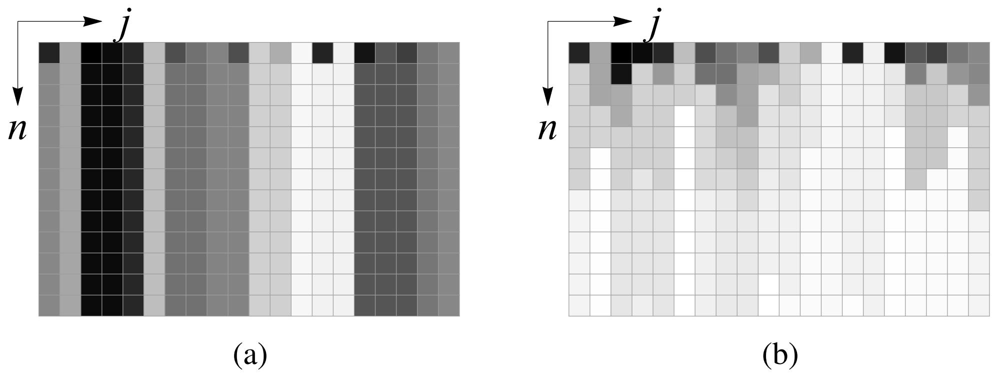



Fig. 2. Examples of time evolution: (a) Equation (2.8), (b) Equation (2.6).

外部変数の無い (2.8) の解は $n \geq 1$ で静止解になる．一方，(2.6) では $\{a_i^m\}$ を $0 \leq a \leq 1$ の乱数で与える場合，解 (2.7) の外部変数の項，たとえば最後の項 $\min_{0\leq k\leq n-1} a_j^k$ は $n$ とともに単調に減少し，$n \to \infty$ で 0 に収束する．したがって $u_j^n$ も $n$ とともに単調減少であり，$n \to \infty$ で 0 に収束する．Fig. 2 (b) の図でも，それぞれの $j$ において独立に 0 に単調減少していく様子が観察できる．

### 2.2.2 $u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, -u_j^n), u_{j+1}^n, a_j^n)$

次に

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, -u_j^n), u_{j+1}^n, a_j^n) \tag{2.9}$$

を考える．解は次式で与えられ，クラス $P_2$ に属することがわかる．

$$\begin{aligned} u_j^n = \min\Bigl(&\min_{0\leq k\leq n}\Bigl(\max\Bigl(\min(u_{j+n-2k}^0, \min_{k+2\leq l\leq 2k} a_{j+n-l+1}^{2n-l}), \max_{1\leq l\leq k}(-u_{j+n-2l+1}^0),\\ &\qquad \max_{\substack{k+2\leq l\leq 2k\\ 0\leq m\leq -k+l-2}} (-a_{j+n-l+2m+2}^{2n-l})\Bigr)\Bigr),\\ &\min_{0\leq k\leq n-1} a_{j+n-k-1}^k\Bigr). \end{aligned} \tag{2.10}$$

しかし，(2.10) は次式のように書き下すこともでき，クラス $P_1$ に属することがわかる．

$$\begin{aligned} u_j^n = \min(&u_{j+n}^0, \min_{0\leq k\leq n-1} a_{j+n-k-1}^k,\\ &\max(-u_{j+n-1}^0, \min(u_{j+n-2}^0,\\ &\max(-u_{j+n-3}^0, -a_{j+n-2}^0, \min(u_{j+n-4}^0, a_{j+n-3}^0,\\ &\max(-u_{j+n-5}^0, -a_{j+n-4}^0, -a_{j+n-3}^1, \min(u_{j+n-6}^0, a_{j+n-5}^0, a_{j+n-4}^1,\\ &\max(-u_{j+n-7}^0, -a_{j+n-6}^0, -a_{j+n-5}^1, -a_{j+n-4}^2, \min(u_{j+n-8}^0, a_{j+n-7}^0, a_{j+n-6}^1, a_{j+n-5}^2,\\ &\ldots\\ &\max(-u_{j-n+1}^0, \max_{0\leq k\leq n-2} -a_{j-n+2+k}^k, \min(u_{j-n}^0, \min_{0\leq k\leq n-2} a_{j-n+1+k}^k))\ldots)))). \end{aligned}$$

外部変数が無い場合の方程式

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, -u_j^n), u_{j+1}^n) \tag{2.11}$$

の解は

$$u_j^n = \min_{0\le k\le n}\Bigl(\max(u_{j+n-2k}^0, \max_{1\le l\le k}(-u_{j+n-2l+1}^0))\Bigr)$$

となり，やはり $P_2$ である．なお，この解は

$$u_j^n = \min(u_{j+n}^0, \max(-u_{j+n-1}^0, \min(u_{j+n-2}^0, \max(-u_{j+n-3}^0, \ldots,$$
$$\min(u_{j-n+2}^0, \max(-u_{j-n+1}^0, u_{j-n}^0))\ldots))))$$

という $P_1$ クラスの表示もある[*1]．

(2.11) および (2.9) の解の時間発展の例をそれぞれ Fig. 3 (a), (b) に示す．初期値と外部変数の与え方は Fig. 1 と同じである．外部変数が有る Fig. 3 (b) では，(2.10) の最後の外部変数の項 $\min_{0\le k\le n-1} a_{j+n-k-1}^k$ は $j+n$ を一定に保ちながら $n$ を増やすと単調減少し，$n\to\infty$ で 0 に収束するので $u_j^n$ も 0 に収束する．

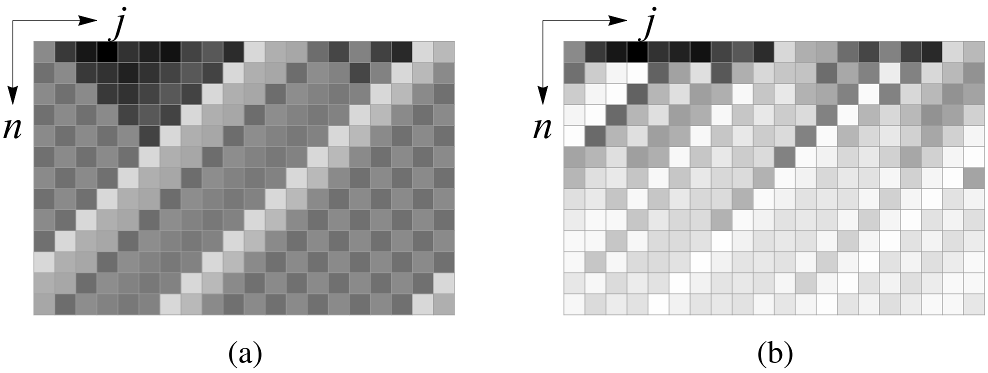



Fig. 3.　Examples of time evolution: (a) Equation (2.11), (b) Equation (2.9).

## 3.　連立 max 方程式

本節では，(1.5) の形式の $u$ と $v$ の連立の max 方程式について解の複雑度が多項式オーダーになるものを紹介する．複雑度については，時刻 $n$ で $u_j^n, v_j^n$ に含まれている $\{u_j^0\}, \{v_j^0\}$ のすべての項の数が $O(n^r)$ のときクラス $P_r$ であると定義する．なお，(1.5) は $u, v$ について対称な時間発展形であるので，複雑度は片方のみで評価すればよい．

例として，

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n, v_j^n) \\ v_j^{n+1} = \min(-v_{j-1}^n, -v_j^n, u_j^n) \end{cases} \tag{3.1}$$

*1 京都大学大学院情報学研究科 辻本諭氏の指摘による．

を考えよう．この方程式は，(2.4) の外部変数付き方程式を $u$ と $v$ についてそれぞれ次式のように立て，

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, -u_j^n, a_j^n) \\ v_j^{n+1} = \min(-v_{j-1}^n, -v_j^n, b_j^n) \end{cases}$$

自由に設定できる外部変数を $a_j^n = v_j^n, b_j^n = u_j^n$ として得たものとみなすことができる．時間発展をたどると

$$\begin{aligned} u_j^1 &= \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, v_j^0), \\ u_j^2 &= \min(-u_{j-1}^1, -u_j^1, v_j^1) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -v_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -v_j^0), \min(-v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0)) \\ &= \min(\max(u_{j-2}^0, u_{j-1}^0, -v_{j-1}^0), \max(u_{j-1}^0, u_j^0, -v_j^0), -v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0) \\ &= \min(-v_{j-1}^0, -v_j^0, u_j^0) \\ &= v_j^1 \end{aligned}$$

となるので，解は

$$u_j^{2n-1} = v_j^{2n} = u_j^1, \qquad v_j^{2n-1} = u_j^{2n} = v_j^1 \qquad (n \geq 1)$$

となり，クラス $P_0$ となる．

外部変数付き max 方程式 (2.4) では，外部変数 $a$ が $u$ の項数を減らすための大小比較の障害となり，解の複雑度を下げることができなかった．一方 (3.1) では，外部変数の役割をしていた変数の部分に，時間発展にしたがうもう片方の変数が入っているため，項の大小比較が可能となって項数を減らすことに貢献している．

初期値 $\{u_i^0\}, \{v_i^0\}$ に $0 \leq u, v \leq 1$ の乱数を設定したときの $u$ の時間発展の例を Fig. 4 に示す．

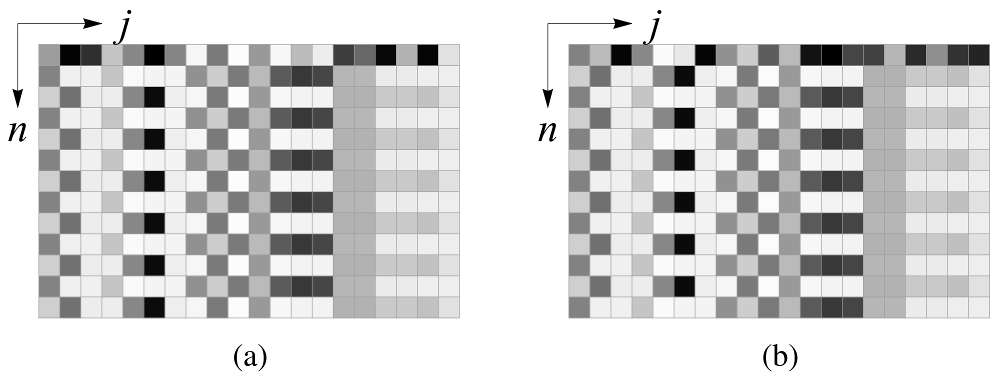



Fig. 4.　Example of time evolution of (3.1):(a) $u_j^n$, (b) $v_j^n$.

連立でない単独の方程式 (2.3) の場合の解は (2.5) であり，Fig. 1 (a) のように周期 2 で $+j$ 方向に伝播する解となるのに対し，上の連立の場合は周期性は変わらないが同じサイ

トで動かない解に変わる．外部変数の場合との違いも含め，複雑度に対する他の変数の影響が現れており興味深い．

# 4. 多項式オーダーの方程式の一覧と非多項式オーダーの方程式の紹介

外部変数付きと連立の二通りの場合に対して，解の複雑度に関していくつかの具体例を挙げて説明してきた．本節では，文献 [2] で報告された多項式オーダークラスの方程式に対して，外部変数を加えるあるいは連立にするという拡張を加え，解の複雑度が多項式オーダーであるものを列挙する．さらに解の複雑度が多項式オーダーにならない方程式を紹介する．ただし多項式オーダーにならない方程式は数多く存在しそれらを全て紹介する事は非常に難しいため，その一部を参考程度に紹介する事に留める．ただし，文献 [2] で述べているように，ある方程式から以下の変換によって得られる方程式は，互いに等価であるので省略する．

- $j \to -j$ の変換で得られる方程式
- $u \to -u$ $(v \to -v)$ の変換で得られる（max と min を入れ替えて得られる）方程式
- $j \to j \pm n$ の変換で得られる方程式
- $j$ が偶奇のサイトで分離する方程式

## 4.1 外部変数付き max 方程式

方程式形は

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, a_j^n)$$

である．

### 4.1.1 多項式オーダーの方程式と解

- $f(x, y, z, a) = \min(x, a)$ （クラス $P_0$）

$$u_j^n = \min\Bigl(u_{j-n}^0, \min_{0\le k\le n-1} a_{j-n+k+1}^k\Bigr).$$

- $f(x, y, z, a) = \min(-x, y, a)$ （クラス $P_0$）

$$\begin{aligned} u_j^n &= \min\Bigl(u_j^1, \min_{1\le k\le n-1} a_j^k\Bigr) \quad (n \ge 2), \\ u_j^1 &= \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, a_j^0). \end{aligned}$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,z,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(u_{j+n-1}^1, \min_{1\le k\le n-1} a_{j+n-k-1}^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(-u_{j-1}^0, u_{j+1}^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,-y,z,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(u_{j+n-1}^1, \min_{1\le k\le n-1} a_{j+n-1-k}^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, u_{j+1}^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,y,-z,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(u_j^1, \min_{1\le k\le n-1} a_j^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, -u_{j+1}^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(\max(-x,-y),z,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(u_{j+n-1}^1, \min_{1\le k\le n-1} a_{j+n-k-1}^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(\max(-u_{j-1}^0, -u_j^0), u_{j+1}^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(\max(-x,-z),y,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(u_j^1, \min_{1\le k\le n-1} a_j^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(\max(-u_{j-1}^0, -u_{j+1}^0), u_j^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^{2n-1} = \min(\max(\ldots\max(\min(-u_{j-2n+1}^0, a_{j-2n+2}^0), -a_{j-2n+3}^1),\ldots), a_j^{2n-2}),$$
$$u_j^{2n} = \min(\max(\ldots\min(\max(u_{j-2n}^0, -a_{j-2n+1}^0), a_{j-2n+2}^1),\ldots), a_j^{2n-1}).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(\max(x,z),y,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = \min\Big(\max\Big(\min\Big(u_{j-1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j-1}^k\Big), \min\Big(u_{j+1}^0, \min_{0\le k\le n-2} a_{j+1}^k\Big)\Big), u_j^0, \min_{0\le k\le n-1} a_j^k\Big).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(x,y,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{0\le k\le n} u_{j-k}^0, \min_{\substack{0\le k\le n-1\\ 0\le l\le n-1-k}} a_{j-l}^k\Big).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{0\le k\le n-1} u_{j+k}^1, \min_{\substack{1\le k\le n-1\\ 0\le l\le n-k-1}} a_{j+l}^k\Big) \quad (n\ge 2),$$
$$u_j^1 = \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0, a_j^0).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(x,-y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n=\min\Big(\min_{1\le k\le n}u^1_{j-n+2k-1},\ \min_{\substack{1\le k\le n-1\\1\le l\le n-k}}a^k_{j-n+k+2l-1}\Big)\quad(n\ge2),$$
$$u_j^1=\min(u^0_{j-1},-u^0_j,u^0_{j+1},a^0_j).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(\max(x,-y),z,a)$ (クラス $P_1$)

$$\begin{aligned}u_j^n=\min(&u^0_{j+n},\min_{0\le k\le n-1}a^k_{j+n-k-1},\\&\max(-u^0_{j+n-1},\min(u^0_{j+n-2},\\&\max(-u^0_{j+n-3},-a^0_{j+n-2},\min(u^0_{j+n-4},a^0_{j+n-3},\\&\max(-u^0_{j+n-5},-a^0_{j+n-4},-a^1_{j+n-3},\min(u^0_{j+n-6},a^0_{j+n-5},a^1_{j+n-4},\\&\max(-u^0_{j+n-7},-a^0_{j+n-6},-a^1_{j+n-5},-a^2_{j+n-4},\min(u^0_{j+n-8},a^0_{j+n-7},a^1_{j+n-6},a^2_{j+n-5},\\&\ldots\\&\max(-u^0_{j-n+1},\max_{0\le k\le n-2}-a^k_{j-n+2+k},\min(u^0_{j-n},\min_{0\le k\le n-2}a^k_{j-n+1+k}))\ldots)))).\end{aligned}$$

#### 4.1.2 多項式オーダーにならない方程式の例

- $u_j^{n+1}=\min(\max(-u^n_{j-1},u^n_j),u^n_{j+1},a^n_j)$
- $u_j^{n+1}=\min(\max(-u^n_{j-1},u^n_{j+1}),u^n_j,a^n_j)$
- $u_j^{n+1}=\min(\max(u^n_{j-1},u^n_{j+1}),-u^n_j,a^n_j)$
- $u_j^{n+1}=\min(\max(-u^n_{j-1},-u^n_j),-u^n_{j+1},a^n_j)$
- $u_j^{n+1}=\min(\max(-u^n_{j-1},u^n_j),-u^n_{j+1},a^n_j)$

### 4.2 連立 max 方程式

方程式形は

$$\begin{cases}u_j^{n+1}=f(u^n_{j-1},u^n_j,u^n_{j+1},v^n_j)\\v_j^{n+1}=f(v^n_{j-1},v^n_j,v^n_{j+1},u^n_j)\end{cases}$$

である．$u$ と $v$ の対称性より $u$ の解のみ記す．

#### 4.2.1 多項式オーダーの方程式と解

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,a)$, $\min(-x,-y,a)$, $\min(-x,-z,a)$, $\min(-x,-y,-z,a)$, $\min(-x,\max(y,-z),a)$, $\min(-x,\max(-y,-z),a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^{2n-1}=u_j^1,\qquad u_j^{2n}=u_j^2\quad(n\ge2),$$
$$u_j^1=f(u^0_{j-1},u^0_j,u^0_{j+1},v^0_j),\quad u_j^2=f(u^1_{j-1},u^1_j,u^1_{j+1},v^1_j).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(-x,y,a), \quad \min(-x,y,-z,a), \quad \min(\max(x,z),y,a),$
  $\min(\max(-x,-z),y,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^n = u_j^2 \quad (n \geq 3),$$
$$u_j^1 = f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0, v_j^0), \quad u_j^2 = f(u_{j-1}^1, u_j^1, u_{j+1}^1, v_j^1).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(\max(x,z),-y,a)$ (クラス $P_0$)

$$u_j^{2n} = u_j^2, \qquad u_j^{2n+1} = u_j^3 \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = \min(\max(u_{j-1}^0, u_{j+1}^0), -u_j^0, v_j^0), \qquad u_j^2 = \min(\max(u_{j-1}^1, u_{j+1}^1), -u_j^1, v_j^1),$$
$$u_j^3 = \min(\max(u_{j-1}^2, u_{j+1}^2), -u_j^2, v_j^2).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(-x,z,a), \quad \min(-x,-y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^{2n-1} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k}^1, \min_{0\leq k\leq n-2} v_{j+2k+1}^1\Big), \qquad u_j^{2n} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} v_{j+2k}^1, \min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k+1}^1\Big) \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = f(u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0, v_j^0), \quad u_j^2 = f(u_{j-1}^1, u_j^1, u_{j+1}^1, v_j^1).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(-x,y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+k}^1, \min_{0\leq k\leq n-2} v_{j+k}^1\Big) \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = \min(-u_{j-1}^0, u_j^0, u_{j+1}^0, v_j^0).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(x,-y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j-n+2k+1}^1, \min_{1\leq k\leq n-1} v_{j-n+2k}^1\Big) \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = \min(u_{j-1}^0, -u_j^0, u_{j+1}^0, v_j^0).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(\max(-x,-y),z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^{2n-1} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k}^1, \min_{0\leq k\leq n-2} v_{j+2k+1}^1\Big), \qquad u_j^{2n} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} v_{j+2k}^1, \min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k+1}^1\Big) \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = \min(\max(-u_{j-1}^0, -u_j^0), u_{j+1}^0, v_j^0), \qquad u_j^2 = \min(\max(-u_{j-1}^1, -u_j^1), u_{j+1}^1, v_j^1).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(x,y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{-n\leq k\leq n} u_{j+k}^0, \min_{-(n-1)\leq k\leq n-1} v_{j+k}^0\Big).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(y,z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^n = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n} u_{j+k}^0, \min_{0\leq k\leq n-1} v_{j+k}^0\Big).$$

- $f(x,y,z,a) = \min(\max(-x,y),z,a)$ (クラス $P_1$)

$$u_j^{2n-1} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k}^1, \min_{0\leq k\leq n-2} v_{j+2k+1}^1\Big), \qquad u_j^{2n} = \min\Big(\min_{0\leq k\leq n-1} u_{j+2k+1}^1, \min_{0\leq k\leq n-1} v_{j+2k}^1\Big) \quad (n \geq 2),$$
$$u_j^1 = \min(\max(-u_{j-1}^0, u_j^0), u_{j+1}^0, v_j^0), \qquad u_j^2 = \min(\max(-u_{j-1}^1, u_j^1), u_{j+1}^1, v_j^1).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(z,a)$　(クラス $P_1$)

$$u_j^{2n}=\min\Bigl(\min_{0\le k\le n}u^0_{j+2k},\min_{0\le k\le n-1}v^0_{j+2k+1}\Bigr),\qquad u_j^{2n+1}=\min\Bigl(\min_{0\le k\le n}v^0_{j+2k},\min_{0\le k\le n}u^0_{j+2k+1}\Bigr).$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,\max(-y,z),\max(y,-z),a)$　(クラス $P_2$)

$$\begin{aligned}
u_j^{2n}=\min\Bigl(\min_{1\le k\le n-1}\Bigl(&\max\Bigl(\max_{1\le l\le k}(-u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}(u^0_{j+2l-1},-v^0_{j+2l},v^0_{j+2l}),-v^0_{j+2k+1}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{1\le l\le k}(-u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}(u^0_{j+2l-1},-v^0_{j+2l},v^0_{j+2l}),v^0_{j+2k+1}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l-1},u^0_{j+2l-1},-v^0_{j+2l},v^0_{j+2l}),-u^0_{j+2k+2}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l-1},u^0_{j+2l-1},-v^0_{j+2l},v^0_{j+2l}),u^0_{j+2k+2}\Bigr)\Bigr),\\
u_j^2\Bigr)&\quad(n\ge 2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_j^{2n+1}=\min\Bigl(\min_{1\le k\le n-1}\Bigl(&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k-1}(-u^0_{j+2l},u^0_{j+2l}),\max_{1\le l\le k}(-v^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l-1},-v^0_{j+2k}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k-1}(-u^0_{j+2l},u^0_{j+2l}),\max_{1\le l\le k}(-v^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l-1},v^0_{j+2k}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l},u^0_{j+2l}),\max_{1\le l\le k}(-v^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l-1},-u^0_{j+2k+1}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l},u^0_{j+2l}),\max_{1\le l\le k}(-v^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l-1},u^0_{j+2k+1}\Bigr)\Bigr),\\
u_j^3\Bigr)&\quad(n\ge 2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_j^1&=\min(-u^0_{j-1},\max(-u^0_j,u^0_{j+1}),\max(u^0_j,-u^0_{j+1}),v^0_j),\\
u_j^2&=\min(-u^1_{j-1},\max(-u^1_j,u^1_{j+1}),\max(u^1_j,-u^1_{j+1}),v^1_j),\\
u_j^3&=\min(-u^2_{j-1},\max(-u^2_j,u^2_{j+1}),\max(u^2_j,-u^2_{j+1}),v^2_j).
\end{aligned}$$

- $f(x,y,z,a)=\min(-x,(-y,z),a)$　(クラス $P_2$)

$$\begin{aligned}
u_j^{2n}=\min\Bigl(\min_{1\le k\le n-1}\Bigl(&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l+1},u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k+1}(-v^0_{j+2l}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l},-v^0_{j+2k+1}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l+1},u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k+1}(-v^0_{j+2l}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l},v^0_{j+2k+3}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l+1},u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k+1}(-v^0_{j+2l}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l},-u^0_{j+2k+2}\Bigr),\\
&\max\Bigl(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l+1},u^0_{j+2l-1}),\max_{0\le l\le k+1}(-v^0_{j+2l}),\max_{0\le l\le k}v^0_{j+2l},-u^0_{j+2k+4}\Bigr)\Bigr),\\
u_j^2\Bigr)&\quad(n\ge 2),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_j^{2n+1} = \min\Big( &\min_{1\le k\le n-1}\Big(\max\Big(\max_{0\le l\le k-1}(-u^0_{j+2l}), \max_{0\le l\le k-2} u^0_{j+2l}, \max_{0\le l\le k-1}(-v^0_{j+2l+1}, v^0_{j+2l-1}), -v^0_{j+2k-2}\Big),\\
&\qquad \max\Big(\max_{0\le l\le k-1}(-u^0_{j+2l}), \max_{0\le l\le k-2} u^0_{j+2l}, \max_{0\le l\le k-1}(-v^0_{j+2l+1}, v^0_{j+2l-1}), v^0_{j+2k}\Big),\\
&\qquad \max\Big(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l}), \max_{0\le l\le k-1} u^0_{j+2l}, \max_{0\le l\le k-1}(-v^0_{j+2l+1}, v^0_{j+2l-1}), -u^0_{j+2k-1}\Big),\\
&\qquad \max\Big(\max_{0\le l\le k}(-u^0_{j+2l}), \max_{0\le l\le k-1} u^0_{j+2l}, \max_{0\le l\le k-1}(-v^0_{j+2l+1}, v^0_{j+2l-1}), -u^0_{j+2k+1}\Big)\Big),\\
&u_j^3\Big) \quad (n\ge 2),
\end{aligned}
$$

$$
u_j^1 = \min(-u^0_{j-1}, \max(-u^0_j, u^0_{j+1}), v^0_j), \qquad u_j^2 = \min(-u^1_{j-1}, \max(-u^1_j, u^1_{j+1}), v^1_j),
$$

$$
u_j^3 = \min(-u^2_{j-1}, \max(-u^2_j, u^2_{j+1}), v^2_j).
$$

- $f(x,y,z,a) = \min(y, \max(-x,z), \max(x,-z), a)$ (クラス $P_2$)

$$
\begin{aligned}
u_j^n = \min\Big( &\min_{1\le k\le n}\Big(\max\Big(\max_{-k+3\le l\le k-3}(-u^0_{j+l-1}), v^0_{j+k-1}, \max_{-k+2\le l\le k-2}(-v^0_{j+l-1})\Big)\Big),\\
&\min_{0\le k\le n}\Big(\max\Big(\max_{-k+1\le l\le k-1}(-u^0_{j+l-1}), u^0_{j+k}, \max_{-k+2\le l\le k-2}(-v^0_{j+l-1})\Big)\Big),\\
&\min_{1\le k\le n}\Big(\max\Big(\max_{-k+2\le l\le k-2}(-v^0_{j+l+1}), v^0_{j-k+1}, \max_{-k+3\le l\le k-3}(-u^0_{j+l+1})\Big)\Big),\\
&\min_{0\le k\le n}\Big(\max\Big(\max_{-k+2\le l\le k-2}(-v^0_{j+l+1}), u^0_{j-k}, \max_{-k+1\le l\le k-1}(-u^0_{j+l+1})\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

- $f(x,y,z,a) = \min(\max(-x,z), y, a)$ (クラス $P_2$)

$$
\begin{aligned}
u_j^n = \min\Big( &\min_{0\le l\le n}\Big(\max\Big(\max_{-1\le k\le n-l-2}(-u^0_{j+k}), u^0_{j+n-l}, \max_{-1\le k\le n-l-3}(-v^0_{j+k})\Big)\Big),\\
&\min_{1\le l\le n}\Big(\max\Big(\max_{-1\le k\le n-l-2}(-v^0_{j+k}), v^0_{j+n-l}, \max_{-1\le k\le n-l-3}(-u^0_{j+k})\Big)\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

- $f(x,y,z,a) = \min(\max(x,-y), z, a)$ (クラス $P_2$)

$$
\begin{aligned}
u_j^{2n} = \min\Big( &\min_{1\le k\le n}\Big(\max\Big(u^0_{j-2k}, \max_{1\le l\le 2k}(-u^0_{j-2k+2l-1}), \max_{0\le l\le 2(k-1)}(-v^0_{j-2k+2l+2})\Big)\Big),\\
&\min_{1\le k\le n}\Big(\max\Big(v^0_{j-2k+1}, \max_{0\le l\le 2(k-1)}(-v^0_{j-2k+2l+2}), \max_{1\le l\le 2(k-1)}(-u^0_{j-2k+2l+1})\Big)\Big),\\
&\min_{0\le k\le n} u^0_{j+2k}, \min_{0\le k\le n-1} v^0_{j+2k+1}\Big),\\
u_j^{2n+1} = \min\Big( &\min_{0\le k\le n}\Big(\max\Big(u^0_{j-2k-1}, \max_{0\le l\le 2k}(-u^0_{j-2k+2l}), \max_{1\le l\le 2k}(-v^0_{j-2k+2l-1})\Big)\Big),\\
&\min_{1\le k\le n}\Big(\max\Big(v^0_{j-2k}, \max_{1\le l\le 2k}(-v^0_{j-2k+2l-1}), \max_{1\le l\le 2k-1}(-u^0_{j-2k+2l})\Big)\Big),\\
&\min_{0\le k\le n} v^0_{j+2k}, \min_{0\le k\le n} u^0_{j+2k+1}\Big).
\end{aligned}
$$

### 4.2.2 多項式オーダーにならない方程式の例

- $f(x,y,z,a) = \min(-x, \max(y,z), a)$
- $f(x,y,z,a) = \min(-x, \max(-y,-z), \max(y,z), a)$

## 5. まとめ

本稿では，外部変数付き max 方程式

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, a_j^n)$$

および，連立 max 方程式

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n, v_j^n) \\ v_j^{n+1} = f(v_{j-1}^n, v_j^n, v_{j+1}^n, u_j^n) \end{cases}$$

に限定し，解の複雑度の観点から議論を行った．前者については，外部変数の有無が複雑度に影響しない例と影響する例があることを示し，複雑度が多項式オーダーになる方程式を探索し列挙した．後者については，連立する相手方の変数によって外部変数を置き換えることにより，複雑度が指数オーダーから多項式オーダーに下がる例を示し，複雑度が多項式オーダーになる方程式を探索し列挙した．

外部変数は従属変数と無関係に値が与えられるものであり，解の時間発展においては項数を減らすメカニズムを壊す方向に働くことが予想される．外部変数を持つ方程式の解の複雑度は，たとえ項の整理を行っても，整理を行わない形式解と同様の指数オーダーのままである場合がほとんどであろう．しかしながら，方程式への外部変数の関わり方によっては多項式オーダーに減る場合が存在することは興味深い．力学系においても，自励系のふるまいが非自励化によって，大きく変わる例もさほど変わらない例もいろいろ存在する．さらに連立方程式では，外部変数を連立変数に置き換えることによって，外部変数の自由度を制限していることになり，これが複雑度を抑える結果になる場合があることを示した．

本研究は解を具体的に書き下すことによって複雑度を測るという厳密な手法によっている．外部変数付与や連立の場合にも明示的に解が書き下せる例は max 方程式に限らず一般の力学系においてもほとんど知られていない．このことは，max 方程式が基本公式を用いて項数を減らせるという特徴があるからでもあり，この特徴を生かして，より広い範囲での同様の解析・探索によって，max 方程式全体の分類を行うことを将来の課題としたい．

## 参考文献

[1] 広田良吾, 高橋大輔, 『差分と超離散』, 共立出版, 2003.

[2] T. Ikegami, D. Takahashi and J. Matsukidaira, “On solutions to evolution equations defined by lattice operators”, Japan J. Indust. Appl. Math., 31 (2014), 211–230.

[3] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, “From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure”, Phys. Rev. Lett., 76 (1996), 3247–3250.

[4] R. Willox, B. Grammaticos, A. S. Carstea and A. Ramani, “Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models”, Phys. A, 328 (2003), 13–22.

[5] S. Wolfram, “A New Kind of Science”, Wolfram Media Inc., Champaign, IL, 2002.

保坂 圭祐 (非会員)　〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
2019 年早稲田大学基幹理工学部応用数理学科卒業．現在，早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻に在学．max 方程式の初期値問題に興味を持つ．

高橋 大輔 (会員)　〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1
1985 年東京大学大学院工学系研究科修士課程修了．工学博士．現在，早稲田大学理工学術院教授．非線形系，特に離散時間発展系の数理の構築に興味を持つ．日本応用数理学会，日本物理学会，日本数理学会，日本流体力学会会員．

（受付日 2020 年 4 月 18 日）
（受理日 2020 年 7 月 13 日）