RIMS 研究集会「可積分系理論の諸分野への応用」

日時　2015 年 8 月 19 日 (水) 〜 2015 年 8 月 21 日 (金)
場所　京都大学数理解析研究所 420 号室 (〒606-8502 京都市左京区北白川追分町)
研究代表者　筧 三郎 (立教大学理学部)

プログラム

8 月 19 日 (水)

13:00 – 13:50　勝島 義史 (Yoshifumi Katsushima)
線形差分方程式の接続問題
(The connection problem of linear difference equations)

14:00 – 14:50　長尾 秀人 (Hidehito Nagao)
加法差分 Painlevé 方程式における Padé 補間の方法
(The Padé interpolation method applied to additive difference Painlevé equations)

(20 分休憩)

15:10 – 16:00　赤岩 香苗 (Akane Akaiwa)
Discrete integrable systems solve inverse eigenvalue problems for totally nonnegative matrices

16:10 – 17:00　黒瀬 俊 (Takashi Kurose)
等積中心アフィン平面閉曲線の空間上の高次 KdV 流と多重ハミルトン系
(Higher KdV flows on the space of closed equicentroaffine plane curves and a multi-Hamiltonian system)

8 月 20 日 (木)

10:00 – 10:50　茂木 康平 (Kohei Motegi)
Partition functions of integrable lattice models and combinatorics of symmetric polynomials

11:00 – 11:50　池田 岳 (Takeshi Ikeda)
シューア関数の仲間とグラスマン多様体
(Variations of Schur functions and Grassmann manifolds)

(昼食)

13:00 – 13:50　名古屋 創 (Hajime Nagoya)
Conformal blocks and Painlevé functions

14:00 – 14:50　千葉 逸人 (Hayato Chiba)
Painlevé equations and weight systems

(20 分休憩)

15:10 – 16:00 Anton Dzhamay

Geometric analysis of reductions from Schlesinger transformations to difference Painlevé equations

16:10 – 17:00 辻本 諭 (Satoshi TSUJIMOTO), 太田 泰広 (Yasuhiro OHTA)

「広田の直接法」前夜とその後 — 計算ノートから見えてくるもの —

(On the birth of “Hirota’s direct method”)

(懇親会 18:00 –)

8 月 21 日 (金)

10:00 – 10:50 延東 和茂 (Kazushige ENDO), 高橋 大輔 (Daisuke TAKAHASHI)

On fundamental diagram of cellular automata with conserved quantities

11:00 – 11:50 竹山 美宏 (Yoshihiro TAKEYAMA)

Algebraic construction of integrable stochastic particle systems

(昼食)

13:00 – 13:50 渋川 元樹 (Genki SHIBUKAWA)

Pseudo Wilson polynomials and pseudo Askey scheme

14:00 – 14:50 井上 玲 (Rei INOUE)

変換行列の退化と Y システム

(Degenerate exchange matrices and Y-systems)

線形差分方程式の接続問題
(The connection problem of linear difference equations)

東大・数理　勝島 義史 (Yoshifumi KATSUSHIMA)

In this talk, we discuss the solution of difference equations in the complex domain. In particular, we see how calculate the connection of solutions between ∞ and $-\infty$. The connection problem of linear difference equations had solved by George David Birkhoff, though the calculus of connections are not clear. He showed the following proposition in one of his greatest work about the Riemann Hilbert problem[1].

Proposition 1 (G.D.Birkhoff) *Let $Q(x)$ be a matrix $n \times n$ of which elements are polynomial of degree μ in x. Then the difference equation*

$$Y(x+1) = Q(x)Y(x) \tag{1}$$

has formal solution $S(x) = [x^{\mu x}(\rho_j e^{-\mu})^x x^{r_j} s_{i,j}(x)]_{i,j}$. For this formal solution, there exist analytic solutions $Y^+(x)$ and $Y^-(x)$ of which asymptotic expansions are

$$Y^+(x) \sim S(x) \qquad (x \to +\infty), \tag{2}$$
$$Y^-(x) \sim S(x) \qquad (x \to -\infty). \tag{3}$$

Between these analytic solutions Y^+ and Y^-, there exists a $n \times n$ matrix $P(x)$ of which elements are rational function of $e^{2\pi i x}$ such that

$$Y^+(x) = Y^-(x)P(x). \tag{4}$$

Remark 1 *He showed this proposition when he was 28 or 29 years old. His works are wild and sensitive during his life. I want to learn his attitude.*

However, to determine this *connection matrix* $P(x)$, we face a difficulty. Birkhoff calculated a connection matrix only in the case of the difference equation of the Gamma function actually. In this talk, we reveal the relationship between difference equations and differential equations, and consider the connection matrix. We see the elements of $P(x)$ are polynomial of $e^{2\pi i x}$, by using the connection formulas of differential equations, if the Mellin transform of difference equations are fuchsian differential equations. In particular, we calculate the connection matrix $P(x)$ in the case that the difference equation is the hypergeometric difference equation. To see the result, we get the following formulas.

Example 1 *We denote σ the difference operator $\sigma : f(\alpha) \mapsto f(\alpha+1)$. Let L be a (single) hypergeometric difference operator*

$$L = [(1-x)(\alpha+1)\sigma^2 + \{(x-2)(\alpha+1) + \gamma - \beta x\}\sigma + \alpha + 1 - \gamma].$$

We find two formal solutions of difference equation $Lf(\alpha) = 0$:

$$f^1(\alpha) = \alpha^{-\beta}(1 + \cdots), \tag{5}$$

$$f^2(\alpha) = (1-x)^{-\beta+\gamma-2}x^{2\beta-\gamma}(\frac{1}{1-x})^{\alpha}\alpha^{\beta-\gamma}(1+\cdots) \tag{6}$$

where $\cdots$ means the formal power series of α^{-1} with its order greater than 0. We denote $F^1_{\pm}, F^2_{\pm}$ the Borel summation of f^1, f^2 in the direction of $+\infty$ and $-\infty$. Then there is a relationship between F^i_+ and F^i_-, such that

$$(F^1_+, F^2_+) = (F^1_-, F^2_-)\begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$$

where $A_{i,j}$ are

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{1-e^{2\pi i(\alpha-1)}}{1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)}} + \frac{e^{2\pi i(\alpha-\beta)}(1-e^{2\pi i(\beta-1)})(e^{2\pi i(\gamma-\beta-1)}-1)}{(1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)})(1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma+1)})} \\ A_{2,1} &= \frac{e^{2\pi i(\gamma-\beta-1)}-1}{1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma+1)}} \\ A_{1,2} &= \frac{e^{2\pi i(\alpha-\beta)}(1-e^{2\pi i(\beta-1)})}{1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma+1)}} \\ A_{2,2} &= \frac{1-e^{2\pi i(\alpha-\beta)}}{1-e^{2\pi i(\alpha-\gamma+1)}}. \end{aligned}$$

This connection matrix's elements are surely rational functions of $e^{2\pi i\alpha}$. In the talk, we will calculate this elements actually, by using Borel-Laplace analysis.

Remark 2 *This connection matrix corresponds to the Barnes' formula of hypergeometric functions.*

References

[1] George David Birkhoff. *The Generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations.* Proceedings of American Academy of Arts & Sciences, Vol. 49, No. 9, 1913, pp. 521-568.

加法差分 Painlevé 方程式における Padé 補間の方法

(The Padé interpolation method applied to additive difference Painlevé equations)

明石高専・一般科目　長尾 秀人 (Hidehito Nagao)

Abstract

Padé 法とは, Padé 近似 (または補間) を利用した Painlevé 方程式への 1 つのアプローチである. これは目標とする (離散)Painlevé 方程式に対して, 適当な関数 $Y(x)$ の Padé 近似 (または補間) を考え, 得られる近似 (または補間) 多項式 P_m, Q_n に基づいて, (離散)Painlevé 方程式のみならず, 対応する Lax 対, 特殊解などを与える方法である．Padé 法の先行結果として，楕円差分，q 差分および微分タイプの Painlevé 方程式が知られており，加法差分についての適用は知られていない．

最近，Padé 補間の方法によって，$E_7^{(1)}$ 型から $A_3^{(1)}$ 型までの加法差分 Painlevé 方程式に対して，その方程式，ラックス形式および特殊解が構成された．本講演では，これらの結果について説明する．

Discrete integrable systems solve inverse eigenvalue problems for totally nonnegative matrices

京大院・情報　赤岩 香苗 (Kanae Akaiwa)

Abstract

One of the important topics in inverse eigenvalue problems is constructing matrices with prescribed eigenvalues. In this talk, we clarify interesting relationships of discrete integrable systems to banded totally nonnegative (TN) matrices and their extensions with prescribed eigenvalues, where TN matrices are entry-wise matrices whose minors are all nonnegative. Determinant solutions to discrete integrable systems and the associated Hadamard-like polynomials play key roles in designing a finite-step algorithm for constructing TN matrices with prescribed eigenvalues.

等積中心アフィン平面閉曲線の空間上の高次 KdV 流と多重ハミルトン系

(Higher KdV flows on the space of closed equicentroaffine plane curves and a multi-Hamiltonian system)

関西学院大学・理工学部　黒瀬 俊 (Takashi Kurose)

ユークリッド平面やアフィン平面、射影平面など「平面」上の曲線に対して、その幾何的不変量として曲率が定まる。曲線が時間変化すると、それにつれて曲率も変化するが、時間変化がある特定の自律的なルールに従うとき (このとき「曲線が運動する」という) は、曲率の時間変化を記述する方程式が可積分系となることが知られている ([1, 2, 7, 8])。さらに、そのような運動のいくつかは、曲線の空間上の (前) シンプレクティック構造をうまく定めることによってハミルトン系として記述することができる ([3, 4, 5, 6, 9])。この講演では、特に (高次)Korteweg-de Vries (KdV) 方程式が現れる曲線の運動を基本事項から紹介し、この運動を記述するハミルトン系に関して藤岡敦氏 (関西大学・システム理工学部) との共同研究で得られた結果について述べる。

以下、本稿では曲線はすべて円 $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ からのはめ込み写像、すなわち正則閉曲線とし、S^1 の座標は s で表わすものとする。

1　KdV 方程式が付随する曲線の運動とハミルトン系

今からちょうど 20 年前に掲載された論文 [9] で、Pinkall は等積中心アフィン曲線の運動から自然に KdV 方程式が現われることを示し、この運動を等積中心アフィン曲線全体の空間上のハミルトン流として表現した。本節ではその概要を紹介する。

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ の閉曲線 $\gamma : S^1 \looparrowright \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で、

$$\det(\gamma, \gamma_s) = 1 \tag{1}$$

を満たすものを等積中心アフィン曲線という。このとき $\det(\gamma, \gamma_{ss}) = 0$ であるので、$\gamma_{ss} = -\kappa\gamma$ を満たす S^1 上の関数 κ が定まる。この κ を γ の等積中心アフィン曲率という。等積中心アフィン曲率は特殊線形群 $\mathrm{SL}(2;\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ への作用に関する曲線の不変量を与える。

いま、t を時間パラメータとして、等積中心アフィン曲線の 1-パラメータ族 $\gamma(\cdot, t)$ を考えよう。$\gamma_t = \alpha\gamma + \beta\gamma_s$ とおくと、(1) より $2\alpha + \beta_s = 0$ であり、その等積中心アフィン曲率 $\kappa(\cdot, t)$ は

$$\kappa_t = \frac{1}{2}\beta_{sss} + 2\kappa\beta_s + \kappa_s\beta \equiv \Omega\beta_s$$

を満たす。ここで Ω は KdV 方程式の再帰作用素と呼ばれているものであり、

$$\Omega = \frac{1}{2}D_s^2 + 2\kappa + \kappa_s D_s^{-1} \qquad (D_s = \frac{\partial}{\partial s})$$

で定義される。特に $\beta = \kappa$ のとき、すなわち $\gamma(\cdot, t)$ が $\gamma_t = (-\kappa_s/2)\gamma + \kappa\gamma_s$ を満たす運動であるとき、κ は KdV 方程式

$$\kappa_t = \Omega\kappa_s = \frac{1}{2}\kappa_{sss} + 3\kappa\kappa_s \tag{2}$$

に従って時間発展する。

今、$\mathcal{M}$ を等積中心アフィン曲線全体のなす空間とし、$\mathcal{M}$ 上の $(0,2)$-テンソル場 ω_0 を

$$(\omega_0)_\gamma(X, Y) = \int_{S^1} \det(X, Y)\, ds, \quad X, Y \in T_\gamma(\mathcal{M}),\, \gamma \in \mathcal{M}$$

で定める (右辺では、$\gamma \in \mathcal{M}$ における接ベクトル X, Y をそれぞれ γ に沿った $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ のベクトル場と同一視している)。このとき、次が成り立つ.

定理 1 (Pinkall[9]) KdV 方程式が付随する運動を引き起こすベクトル場 $(X_1)_\gamma = (-\kappa_s/2)\gamma + \kappa\gamma_s$, $\gamma \in \mathcal{M}$ と、$\mathcal{M}$ 上の関数 $H_1 = \int_{S^1} \kappa\, ds$ に対して、

$$dH_1 = \omega_0(X_1, \cdot)$$

が成り立つ。すなわち、X_1 は (前) シンプレクティック形式 ω_0 に関する H_1 のハミルトン・ベクトル場である。

上で定義された ω_0 が閉形式であることは、$\alpha_\gamma(X) = \int_{S^1} \det(\gamma, X)\, ds$, $\gamma \in \mathcal{M}$ で定義される $\mathcal{M}$ 上の 1-形式 α により、$d\alpha = \omega_0$ となることから容易にわかる (ただし、一般にはこの閉性の確認が最も手間のかかる作業になることも多い)。

なお、$\mathcal{M}$ への S^1 の自然な作用: $\mathcal{M} \ni \gamma \mapsto \gamma(\cdot + \sigma) \in \mathcal{M}$, $\sigma \in S^1$ によって ω_0 (と X_1, H_1) は不変であり、$\gamma \in \mathcal{M}$ において $\mathrm{Ker}\,(\omega_0)_\gamma = T_\gamma(S^1 \cdot \gamma)$ である。従って、$\mathcal{M}/S^1$ 上では ω_0 はシンプレクティック形式を与え、X_1 は H_1 のハミルトン・ベクトル場となる。実際、Pinkall はこのようにして $\mathcal{M}/S^1$ 上で議論しているが、本稿では以降の展開のため $\mathcal{M}$ 上で話を進める。

2 KdV 階層と双ハミルトン系

一般に $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、方程式 $\kappa_t = \Omega^n\kappa_s$ を n 次 KdV 方程式といい、これらの方程式を総称して KdV 階層という。運動が

$$\gamma_t = \left(-\frac{1}{2}\Omega^{n-1}\kappa_s\right)\gamma + \left(D_s^{-1}\Omega^{n-1}\kappa_s\right)\gamma_s \equiv (X_n)_\gamma$$

を満たしているとき、その等積中心アフィン曲率は n 次 KdV 方程式に従う。これらの曲線の運動も、曲線の空間上のハミルトン流として記述することができる。すなわち、$\mathcal{M}$ 上の関数 H_n, $n = 1, 2, 3, \cdots$ が存在して、$dH_n = \omega_0(X_n, \cdot)$ となる (ちなみに、H_n たちは

$$H_2 = \int_{S^1} \frac{1}{2}\kappa^2\, ds, \quad H_3 = \int_{S_1} \left(\frac{1}{2}\kappa^3 - \frac{1}{4}\kappa_s^2\right) ds, \quad \cdots$$

と具体的に与えられる)。

一方、可積分系理論において、KdV 階層の各方程式は適当な関数空間上のポアソン括弧式を用いたハミルトン系として表わされるだけでなく、二つのポアソン括弧式による双ハミルトン系として記述できることが知られている。そこで、対応する曲線の運動においても、これに相当するものがあるのではないかと考えるのは自然であろう。実際、次のことが成り立つ。

定理 2 $\mathcal{M}$ 上の $(0,2)$-テンソル場 ω_1 を

$$(\omega_1)_\gamma(X,Y) = \int_{S^1} \det\bigl(X, (D_s^2+\kappa)Y\bigr)\,ds, \quad X,Y \in T_\gamma(\mathcal{M}),\, \gamma \in \mathcal{M}$$

で定めると、ω_1 も $\mathcal{M}$ 上の前シンプレクティック形式となり、

$$dH_{n+1} = \omega_1(X_n,\cdot), \quad n = 1,2,3,\cdots$$

が成り立つ。

すなわち、X_n は、ω_0 に関する H_n のハミルトン・ベクトル場であると同時に、ω_1 に関する H_{n+1} のハミルトン・ベクトル場でもある。この意味で、KdV 階層に対応する曲線の運動は、$\mathcal{M}$ 上の双前シンプレクティック構造 (ω_0,ω_1) による双ハミルトン系 $\bigl(\omega_0,\omega_1,\{H_n\}\bigr)$ として記述されると言える。

なお、前シンプレクティック形式 ω_1 については、次のことが成り立つ。

1. ω_1 は前述の S^1-作用および自然な $SL(2;\mathbb{R})$-作用: $\mathcal{M} \ni \gamma \mapsto A\gamma \in \mathcal{M}$, $A \in SL(2;\mathbb{R})$ で不変であり、$\gamma \in \mathcal{M}$ において $\operatorname{Ker}(\omega_1)_\gamma = T_\gamma(SL(2;\mathbb{R})\cdot\gamma)$ である。
2. $(\mathcal{M},\omega_1)$ の S^1-作用に対する運動量写像 μ_1 は、$\mu_1(\gamma)(\partial/\partial\sigma) = H_1(\gamma)$, $\gamma \in \mathcal{M}$ で与えられる。

3 多重ハミルトン系

前節では、$\mathcal{M}$ 上に二つの前シンプレクティック構造を定め、KdV 階層を双ハミルトン系として記述した。実は、ハミルトン関数 $H_1,H_2,\cdots,H_m$ による等高面 $\mathcal{M}_m = \{H_1 = c_1,\, H_2 = c_2,\cdots,H_m = c_m\}$ ($c_1,c_2,\cdots c_m$ は定数) に制限するならば、以下のようにしてさらに m 個の前シンプレクティック形式を定義することができ、曲線の運動は「$m+2$ 重」ハミルトン系として記述することができる。

今、φ を

$$\varphi(\alpha\gamma+\beta\gamma_s) = 2\alpha\gamma, \quad \alpha\gamma+\beta\gamma_s \in T(\mathcal{M})$$

とおく。$\mathcal{M}$ の接ベクトル X に対して、$(D_s^2+\kappa)X$ は γ 成分しか持たず、さらに X が等高面 $\mathcal{M}_1$ に接しているときは $(D_s^2+\kappa)X$ は φ の像にはいる。より一般に、等高面 $\mathcal{M}_m$ の接ベクトル X に対しては、$\left[\varphi^{-1}\circ(D_s^2+\kappa)\right]^{k-1}X$, $k = 2,3,\cdots,m+1$ が定義される。

そこで、$\gamma \in \mathcal{M}_m$, $X,Y \in T_\gamma(\mathcal{M}_m)$, $k = 2,3,\cdots,m+1$ に対して、

$$(\omega_k)_\gamma(X,Y) = \int_{S^1} \det\left(X,\,(D_s^2+\kappa)\circ\left[\varphi^{-1}\circ(D_s^2+\kappa)\right]^{k-1}Y\right)ds$$

とおく。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 3 ω_k, $k = 2,3,\cdots,m+1$ も $\mathcal{M}_m$ 上の前シンプレクティック形式であり、$dH_{n+k} = \omega_k(X_n,\cdot)$, $n = 1,2,3,\cdots$ が成り立つ。

以上に述べた結果と類似のことがらは、変形 KdV 階層が付随するユークリッド平面の曲線の運動についても成り立つことが知られており、さらに KdV 階層と変形 KdV 階層の間のミウラ変換が等積中心 (複素) アフィン平面曲線の空間とユークリッド平面の曲線の空間の間の対応として幾何学化される。時間があれば、講演ではこれらのことも紹介したい。

参考文献

[1] K.-S. Chou and C.-Z. Qu, The KdV equation and motion of plane curves, J. Phys. Soc. Japan, **70**(2001), 1912–1916.

[2] K.-S. Chou and C.-Z. Qu, Integrable equations arising from motions of plane curves, Phys. D, **162**(2002), 9–33.

[3] A. Fujioka and T. Kurose, Motions of curves in the complex hyperbola and the Burgers hierarchy, Osaka Journal of Mathematics, **45**(2008), 1057–1065.

[4] A. Fujioka and T. Kurose, Geometry of the space of closed curves in the complex hyperbola, Kyushu Journal of Mathematics, **63**(2009), 161–165.

[5] A. Fujioka and T. Kurose, Hamiltonian formalism for the higher KdV flows on the space of closed complex equicentroaffine curves, International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, **7**(2010), 165–175.

[6] A. Fujioka and T. Kurose, Multi-Hamiltonian structures on spaces of closed equicentroaffine plane curves associated to higher KdV flows, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 10(2014), 048, 11 pages. (DOI: 10.3842/SIGMA.2014.048)

[7] 井ノ口順一, 幾何学いろいろ，可積分系もいろいろ, 数理解析研究所講究録 1422「可積分系数理の展望と応用」, 2005 年 4 月, 134–153.

[8] 井ノ口順一, 曲線とソリトン (開かれた数学 4), 朝倉書店, 2010.

[9] U. Pinkall, Hamiltonian flows on the space of star-shaped curves, Results Math., **27**(1995), 328–332.

Partition functions of integrable lattice models and combinatorics of symmetric polynomials

東京海洋大・海洋工　茂木 康平 (Kohei MOTEGI)

Abstract

In recent years, there are advances in combinatorial representation theory of symmetric polynomials based on their integrable model representations, i.e., representing them as partition functions of integrable lattice models so that one can use the power of quantum inverse scattering method for the analysis. Various symmetric polynomials are realized and various combinatorial formulae are discovered and proved depending on the local L-operators and global boundary conditions. In this talk, including our works, we review the progress, mainly focus on how symmetric polynomials are realized as partition functions of integrable lattice models of XXZ type, Felderhof type and boson type. We also explain the connections and applications to stochastic process and enumerative geometry.

シューア関数の仲間とグラスマン多様体
(Variations of Schur functions and Grassmann manifolds)

岡山理科大・理　池田 岳 (Takeshi Ikeda)

Abstract

シューア関数がグラスマン多様体のシューベルト類と同一視されることは 1950 年頃に複数の人たちが気が付いたようである．その後，他の等質空間やコホモロジー理論へとその拡張が行われてきたが，探究するべき多項式は，ある程度は出そろったという段階であろう．この講演では，シューベルト類と同一視される特殊多項式の系統図を示して，未解決の課題について論じたい．

At latest in 1950 ' s it was realized that the Schur functions are identified with the Schubert classes of Grassmann variety. Since then, many attempts have been made to extend this coincidence to other homogeneous spaces as well as to other cohomology theories. This means certain special families of polynomials are discovered in connection with various homogeneous spaces and their Schubert subvarieties. At least for the homogeneous spaces of classical types, we now have a considerable list of such "Schubert" polynomials. In this talk, we will show a genealogical tree of such polynomials and discuss some open questions.

Conformal blocks and Painleve functions

立教大・理　名古屋 創 (Hajime Nagoya)

Abstract

The asymptotic expansion of the tau function of PVI was given by Jimbo in 1982. His formula includes the four parameters in PVI and the two integration constants explicitly expressed in terms of the monodromy data for a linear problem of PVI. The first few terms were written and in general, the coefficients of the expansion can be computed by the differential equation PVI. For a long time, an explicit series expansion of the tau function of PVI had not been given.

In 2012, Gamayun, Iorgov, Lisovyy conjectured that the tau function of PVI admits an expansion in terms of the Virasoro conformal block. Since, the Virasoro conformal block has an explicit formula by AGT correspondence, they found an explicit expansion of the PVI tau function, which is a far-reaching generalization of Jimbo's asymptotic formula.

In my talk, I review on recent results for expansions of the tau functions of the Painleve equations, in relation to the two dimensional conformal field theory.

Painlevé equations and weight systems

九大・IMI　千葉 逸人 (Hayato Chiba)

Abstract

A weight (a tuple of integers) is one of the invariants of the Painlevé equation determined by the Newton diagram of the equation. In this talk, several topics about the Painlevé equations and weights will be given. In the first part, the analysis of the Painlevé equations be means of the weighted projective spaces will be introduced. In the second part, it will be shown that the weights for the Painlevé equations are closely related to Saito's theory of weight systems.

Geometric analysis of reductions from Schlesinger transformations to difference Painlevé equations

University of Northern Colorado Anton Dzhamay

Abstract

The goal of this talk is to explain some geometric aspects of a reduction from Schelsinger transformations of the Fuchsian system of the spectral type 111, 111, 111 to the difference Painlevé equation d-P($A_2^{(1)}$). In particular, we compute explicitly the realization of the extended affine Weyl symmetry group $\mathrm{W}(E_6)$ through elementary birational transformations of its Okamoto surface of initial conditions and show how to represent our difference Painlevé equation as a composition of such elementary maps.

「広田の直接法」前夜とその後 ―計算ノートから見えてくるもの―
(On the birth of "Hirota's direct method")

京大・工　辻本 諭 (Satoshi TSUJIMOTO)
神戸大・理　太田 泰広 (Yasuhiro OHTA)

Abstract

広田良吾先生が遺された 1968〜1973 の計算ノートを中心に,「広田の直接法」ついて議論する．特に，サイン・ゴルドン方程式，戸田方程式，KdV 方程式を中心に，研究の時間的経緯と共に双線形化法がどのように発見されたかを明らかにしていく．広田演算子の記法の変遷についても紹介する予定である．さらに，数々の独創的な研究成果を生み出すに至った広田先生の研究手法について考察することで，今後の研究の発展に資することを期待する．

On fundamental diagram of cellular automata with conserved quantities

早大・基幹理工　延東 和茂 (Kazushige ENDO)
早大・基幹理工　高橋 大輔 (Daisuke TAKAHASHI)

Abstract

We discuss 1+1D deterministic or stochastic cellular automata (CA) with one or more conserved quantities. They can often be interpreted as moving particle system and the 'fundamental diagram' (FD), that is, the relation between particle density and mean flow for the asymptotic solution is important for the systems. We explain about our method to derive FD using max-plus algebra, Cole-Hopf type transformation, reduction formula, equilibrium equation and so on. We review the basic analysis on simple CA's, and plan to show the analysis on 3-dimensional FD for a deterministic CA of 5 neighbors and FD of a stochastic multivalued CA.

Algebraic construction of integrable stochastic particle systems

筑波大・数理物質系　竹山 美宏 (Yoshihiro TAKEYAMA)

Abstract

We introduce a deformation of the affine Hecke algebra of type GL. Making use of its representation, we can construct a difference operator which can be regarded as a discretization of the Hamiltonian of the one-dimensional delta Bose gas. By specializing the parameters of the discrete Hamiltonian, we obtain the transition rate matrix of integrable stochastic particle systems; the q-Boson system due to Sasamoto and Wadati, and its multi-species version.

Pseudo Wilson polynomials and pseudo Askey scheme

阪大院・情報　渋川 元樹 (Genki Shibukawa)

Abstract

Using some unitary transforms (Jacobi, Whittaker, Fourier, Mellin trans.), we give explicit formulas and orthogonality relations for some polynomials which we call pseudo Wilson, pseudo continuous Hahn, pseudo continuous dual Hahn, pseudo Meixner-Pollaczek polynomials. These polynomials include as special or limiting cases the finite cases of the Jacobi, Bessel and pseudo Jacobi polynomials which are finite classes of orthogonal polynomials in the Askey scheme.

変換行列の退化と Y システム
(Degenerate exchange matrices and Y-systems)

千葉大・理　井上 玲 (Rei Inoue)

Abstract

Quiver が mutation 周期を持つとき、それに付随した T システム、Y システムと呼ばれる差分方程式が得られ、T システムの解は Y システムの解を与えることが知られている。一方、様々な例で (i) Y システムの一般解は T システムの解から得られない、(ii) Y システムが次数の低い差分方程式に因子化する、という現象が観察される。

この講演では、これらの現象をクラスター変換行列の退化と関連付けて調べた A. N. W. Hone 氏との共同研究を紹介する。Y システムの一般解を得るために T システムを変形すると、Y システムは非自励的な差分方程式と等価になる。特に Somos-4 の場合は q 差分パンルベ I 方程式が現れる。

When a quiver is mutation periodic, the corresponding T-system and Y-system are defined. The solution of the T-system gives that of the Y-system, but in many examples we observe that (i) the general solution of the Y-system is not obtained from that of the T-system, (ii) Y-system is factorized into a difference equation of lower degree.

In this talk I introduce a joint work with A. N. W. Hone, where we studied the above observations from the view point of degenerate exchange matrices. We find that the Y-system is factorized into the non-autonomous difference equation, for example, in the case of Somos-4 we obtain the Painleve I equation.