高次保存量を持つCAの確率化について

延東 和茂 [1], 高橋 大輔 [1], 松木平 淳太 [2]
[1] 早稲田大学、[2] 龍谷大学
e-mail : k-endo9655@fuji.waseda.jp

1 はじめに

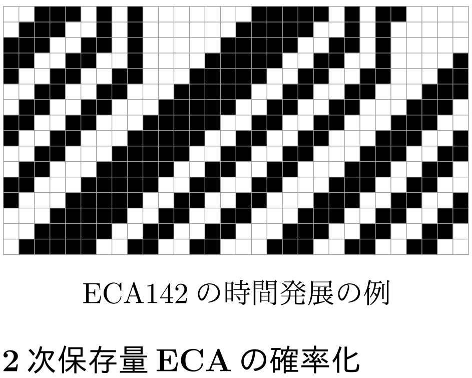
状態変数が 0 と 1 のみである Cellular Automata (CA) のうち、ある時刻における状態変数の総和が時刻に依存しないものを我々は粒子 CA と呼んでいるが、これは保存量が 1 次のタイプのものである。これら粒子 CA に確率変数を導入した CA についてはさまざまな研究がなされている。今回は 2 次の保存量を持つ CA に対して同様に確率変数を導入したモデルについて議論を行う。なお、本予稿では 2 値 3 近傍の CA すなわち ECA (Elementary CA) についてのみ説明を行う。

2 2 次保存量を持つ ECA

256 個存在する ECA のうち、以下の形の 2 次保存量を持つものは 34 個存在する。

$$\sum_{j=1}^{L} u_{j-1}^n \oplus u_j^n = \sum_{j=1}^{L}\{u_{j-1}^n(1-u_j^n)+(1-u_{j-1}^n)u_j^n\}$$

この保存量により、1 個以上連続する 1 の領域の数（時間発展パターンにおいては縞模様の縞に見える）が時刻によって変化しないことになる。conjugation や reflection、ガリレイ変換、偶奇ステップの片方をビット変換することによって合同であるとみなせるものを除くと、独立なものは 9 個存在することが分かる。



ECA142 の時間発展の例

3 2 次保存量 ECA の確率化

保存量を持つ CA にその保存量を壊さないように確率変数を導入することを、本研究での確率化と定義する。2 次保存量を持つ上記の ECA を確率化するには、まず 1 次保存量を持つ ECA との関連に着目する。1 次保存量を持つ ECA226 (f_{226} と表記) と 2 次保存量を持つ ECA142 (f_{142}) には、

$$f_{60} \circ f_{142} = f_{226} \circ f_{60} \tag{1}$$

という関係が成り立つことが知られている。また、ECA184 の reflection である ECA226 については、すでに確率化に成功している。(1) の f_{226} をこの確率版 ECA226 で置き換えることにより確率版 ECA142 (SECA142)

$$u_j^{n+1} = u_j^n \oplus \min(a_j^n, u_j^n \oplus u_{j+1}^n, 1-(u_{j-1}^n \oplus u_j^n))$$

$$a_j^n = \begin{cases} 1(\text{確率 } p) \\ 0(\text{確率 } 1-p) \end{cases}$$

を得ることができる。SECA142 と SECA226 の関係は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n \oplus \min(a_j^n, u_j^n \oplus u_{j+1}^n, 1-(u_{j-1}^n \oplus u_j^n)) \\
&\downarrow \quad v_j^n = u_{j-1}^n \oplus u_j^n \\
v_j^{n+1} &= v_j^n \oplus \min(a_{j-1}^n, v_j^n, 1-v_{j-1}^n) \\
&\qquad \oplus \min(a_j^n, v_{j+1}^n, 1-v_j^n) \\
&\downarrow \quad \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z} \\
v_j^{n+1} &= v_j^n + \min(a_j^n, v_{j+1}^n, 1-v_j^n) \\
&\qquad - \min(a_{j-1}^n, v_j^n, 1-v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

最後の式の両辺を $j = 1, 2, \ldots, L$ で足し合わせると

$$\sum_{j=1}^{L} v_j^{n+1} = \sum_{j=1}^{L} v_j^n$$

が得られる。この等式および $v_j^n = u_{j-1}^n \oplus u_j^n$ の関係より SECA142 では 2 次保存量 $\sum_{j=1}^{L}(u_{j-1}^n \oplus u_j^n)$ が存在することがわかる。

SECA142 は、確率変数 a_j^n が 1 の時は ECA142 の時間発展ルールに等しい。a_j^n が 0 の場合は ECA204 となり、この ECA も同じく 2 次保存量を持っている。すなわち、この式は確率変数の値によって 2 次保存量を持つ異なる ECA がスイッチするという構造になっており、ECA142

の確率化であると同時にECA204の確率化にもなっている。この特徴を利用して、2次保存量を持つ他の7つのECAについても、互いのECAにスイッチするように確率変数を導入するという手法を考案した。この手法に基づいて、2次保存量を持つ全てのECAを確率化することができた。その結果を以下に示す。

- $f_{14} \rightleftarrows f_{12}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n \oplus \min(u_{j-1}^n + \min(a_j^n, u_j^n \oplus u_{j+1}^n), 1-(u_{j-1}^n \oplus u_j^n))$$

- $f_{42} \rightleftarrows f_{34}$

$$u_j^{n+1} = \min(\max(\min(a_j^n, 1-u_{j-1}^n), 1-u_j^n), u_{j+1}^n)$$

- $f_{35} \rightleftarrows f_{51}$

$$u_j^{n+1} = 1-u_j^n \oplus \min(a_j^n, u_{j-1}^n, 1-u_j^n, 1-u_{j+1}^n)$$

- $f_{140} \rightleftarrows f_{142} \rightleftarrows f_{204}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n \oplus \min(u_j^n \oplus u_{j+1}^n, 1-(u_{j-1}^n \oplus u_j^n), \max(\min(u_{j-1}^n, 1-a_j^n), \min(1-u_{j-1}^n, b_j^n)))$$

ここで a_j^n, b_j^n は以下で定義される確率変数である。

$$a_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \alpha) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\alpha) \end{cases}, \quad b_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \beta) \\ 0 & (\text{確率 } 1-\beta) \end{cases}$$

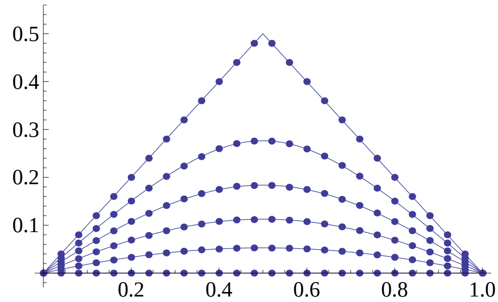
なおECA142は、2種類の確率変数を導入することにより、その確率変数の値に応じてECA140とECA204の2つの方程式にスイッチすることが分かった。

4　基本図

粒子CAにおける系の特性に対する重要な表現手法として、基本図と呼ばれるものがある。横軸に保存量である粒子密度 ρ をとり、適当な初期条件から時間発展を行い、時刻無限大における粒子の運動量平均 Q を計算する。この ρ–Q 依存性をプロットしたものが基本図であり、決定論的なECA184では、$Q = \frac{1}{2} - |\rho - \frac{1}{2}|$ となって $\rho = \frac{1}{2}$ で相転移が起こることが如実にわかる。確率パラメータを導入したSECA184では、

$$Q = \frac{1-\sqrt{1-4\alpha\rho(1-\rho)}}{2} \qquad (2)$$

が導かれる。前節で取り上げたSECA142では、前述の関係(1)より、SECA226の ρ が10のパターンの密度 ρ_{10} に対応し、Q が10の運動量平均 Q_{10} に対応するので、理論式(2)がそのまま流用できる。講演では、すべての2次保存量を持つSECAについて、それらの基本図の曲線を理論的に求めて報告を行う予定である。



SECA142の基本図（$\alpha = 0, 0.2, \ldots, 1.0$）

5　今後の課題

本講演では2次保存量を持つECAの確率化について述べるが、より高次の保存量を持つものや、ひとつのECAで同時に複数の保存量を持つものもすでに多数確認されている。それらの確率化を行い基本図の理論曲線の導出をすることは今後の課題である。

参考文献

[1] 桑原英樹，池上貴俊，高橋大輔，確率変数を含む粒子セルオートマトンについて，日本応用数理学会論文誌, vol.23(2013), 1-13.

[2] Henlyk Fukś, Dynamics of the Cellular Automaton Rule 142, Complex systems, 16(2005), 123-138.

[3] Tetsuya Hattori and Shinji Takesue, Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, Physica D: Nonlinear Phenomena, 49(3)(1991), 295-322.