

高次保存量をもつ CA の Max-Min-Plus 解析について

松木平 淳太¹, 高橋 大輔²

¹ 龍谷大学, ² 早稲田大学

e-mail : junta@rins.ryukoku.ac.jp

1 はじめに

$R(=l+r+1)$ 近傍の 1 次元セルオートマトン (CA)

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-l}^n, u_{j-l+1}^n, \dots, u_j^n, \dots, u_{j+r}^n),$$

が、 α 次の保存量

$$I_\alpha = \sum_{j=1}^L E(u_j^n, u_{j+1}^n, \dots, u_{j+\alpha-1}^n),$$

を持つための必要十分条件は服部と武末によって得られている [1]。ただし、 u_j^n は時刻 n におけるサイト j のセルの状態を表し、セルの状態は周期的境界条件 $u_{j+L}^n = u_j^n$ を満たす。

$\alpha = 1, E(x) = x$ の場合、1 次元の保存量

$$I_1 = \sum_{j=1}^L u_j^n,$$

は状態が $u_j^n = 1$ であるセルの総数を表すが、この保存量を持つ CA は相互作用しながら運動する粒子の系と見なすことができる。1 次元 3 近傍 CA である ECA (Elementary CA) において、単なる平行移動となるルールを除くと、上記の保存量を持つ ECA はルール 184 とルール 226 のみである。また、ルール 226 はルール 184 を左右反転したルールである。

ルール 184 は最も単純な交通流 CA モデルとして非常によく研究されているが、Burgers 方程式を超離散化することによって得られる以下の Max-Min-Plus 表現がルール 184 となることが西成と高橋によって明らかになっている [2]。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \min(u_{j-1}^n, 1 - u_j^n) - \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n).$$

この方程式は超離散 Cole-Hopf 変換

$$u_j^n = F_j^n - F_{j-1}^n - \frac{1}{2},$$

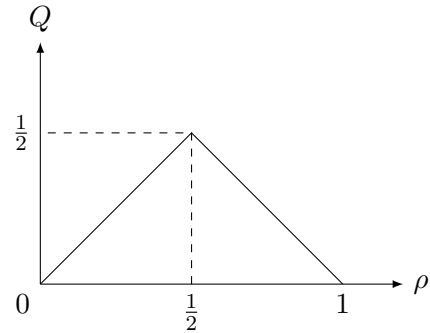
によって、超離散拡散方程式

$$F_j^{n+1} = \max(F_{j-1}^n, F_{j+1}^n),$$

に変換することができるが、この表現を用いることによって、保存量 $I_1 = \sum_{j=0}^{L-1} u_j^n$ をサイト数 L で割った密度 $\rho = \sum_{j=0}^{L-1} u_j^n / L$ と粒子の流量 Q の関係が

$$Q = \min(\rho, 1 - \rho),$$

で与えられることを厳密に示すことができる。この式をグラフにしたものは基本図と呼ばれ、ルール 184 の基本図は下図のようになる。



2 2 次の保存量を持つ ECA

1 次の保存量を持つ非自明な ECA は 184 (およびその反転の 226) しかないが、2 次の保存量

$$\sum_{j=1}^L u_{j-1}^n \oplus u_j^n$$

を持つ ECA はルール 12, 14, 15, 34, 35, 42, 43, 51, 140, 142, 170, 204 など多数存在する。ただし、

$$a \oplus b = a + b \pmod{2}$$

である。2 次の保存量に対しても基本図を考えることができるが、Fukš はルール 142 に基本図がルール 184 の基本図に類似していることを発見した [3]。さらに Fukš は Boccara によって発見された ECA のルール間の関係式

$$f_{60} \circ f_{142} = f_{226} \circ f_{60},$$

を用いて基本図の解析を行った [4][5]。

我々はこの関係式を用いて、以下のルール 142 の Max-Min-Plus 表現を得ることに成功した。

$$u_j^{n+1} = u_j^n \oplus \min(u_j^n \oplus u_{j+1}^n, 1 - u_{j-1}^n \oplus u_j^n).$$

この表現を用いることによって、2次の保存量を持つルール142と、1次の保存量を持つルール226と以下のように変換可能であることを示すことができる。

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n \oplus \min(u_j^n \oplus u_{j+1}^n, 1 - u_{j-1}^n \oplus u_j^n) \\
&\quad \downarrow v_j^n = u_{j-1}^n \oplus u_j^n \\
v_j^{n+1} &= v_j^n \oplus \min(v_j^n, 1 - v_{j-1}^n) \oplus \min(v_{j+1}^n, 1 - v_j^n) \\
&\quad \downarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \\
v_j^{n+1} &= v_j^n + \min(v_{j+1}^n, 1 - v_j^n) - \min(v_j^n, 1 - v_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

また、上記から

$$\sum_{j=1}^L v_j^{n+1} = \sum_{j=1}^L v_j^n$$

を示すことによって、ECA142が2次の保存量を持つことを代数的に示すことが容易にできる。

3 2次の保存量を持つ4近傍CA

4近傍CAにおいても、1次の保存量を持つCAと2次の保存量を持つCAが互いに変換可能であることを示すことができる。以下は、1次の保存量を持つCAから変換された2次の保存量を持つCAのMax-Min-Plus表現である。

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= u_j^n \oplus \min(u_{j-2}^n \oplus u_{j-1}^n + u_{j-1}^n \oplus u_j^n, 1 - u_j^n \oplus u_{j+1}^n), \\
u_j^{n+1} &= u_j^n \oplus \max(-u_j^n \oplus u_{j+1}^n, \min(u_{j-2}^n \oplus u_{j-1}^n + u_{j-1}^n \oplus u_j^n - 1, 1 - u_j^n \oplus u_{j+1}^n)), \\
u_j^{n+1} &= u_j^n \oplus \max(0, \min(u_{j-2}^n \oplus u_{j-1}^n + u_{j-1}^n \oplus u_j^n - 1, 1 - u_j^n \oplus u_{j+1}^n)).
\end{aligned}$$

本研究によって、高次保存量を持つCAの代数的な構造の一端が示されたと考えられるが、一般的な理論の構築は今後の課題である。

参考文献

- [1] T. Hattori and S. Takesue, Additive conserved quantities in discrete-time lattice dynamical systems, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol.49(1991), 295–322.
- [2] K. Nishinari and D. Takahashi, Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton, *J. Phys. A: Math. Gen.*, Vol.31(1998), 5439.
- [3] H. Fuk s, Second order additive invariants in elementary cellular automata, arXiv preprint nlin/0502037.

- [4] N. Boccara, Transformations of one-dimensional cellular automaton rules by translation-invariant local surjective mappings, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol.68(1993), 416–426.
- [5] H. Fuk s, Dynamics of the Cellular Automaton Rule 142, *Complex Systems*, Vol.16(2005), 123–138.