

確率変数を含む粒子セルオートマトンについて

桑原 英樹* 池上 貴俊* 高橋 大輔*

* 早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻

概要. 1次元サイトを粒子が確率的に移動する系について考える. これらの系の特徴は, 4近傍確率セルオートマトンによって定義できる完全離散系であり, 密度と平均流束の関係を表す基本図が厳密に導出できることである.

On some Particle Cellular Automata with Stochastic Parameters

Hideki Kuwabara* Takatoshi Ikegami* Daisuke Takahashi*

*Waseda University

Abstract. We consider some systems where the particles move in one-dimensional sites by a probabilistic rule. They are completely discrete systems defined by stochastic cellular automata with 4 neighbors and we can show exactly the fundamental diagram which gives a relation between the density and the mean flux of the system.

1. はじめに

1次元サイトを複数の粒子があるルールに従って移動する粒子系は, 拡散現象・流体・交通渋滞など移流を伴う現象に関連する重要な研究対象を与えている. その中でも, 確率変数によって移動のルールを定める確率モデルは, ランダムウォーク, 非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP), 結晶成長など統計力学の興味深いテーマを提供し, さまざまなモデルが考案され, 理論的研究も盛んに行われている [1, 2]. しかしながら, 構成の単純な基本モデル以外は厳密な理論解析が難しいというのが現状である.

本稿では, 単純な仮定をおくことにより漸近挙動について厳密な結果が導出できる確率粒子系を3つ提出する. これらの系は, 初期値問題が厳密に解ける決定論的 (確率変数を伴わない) 粒子系に確率変数を導入することによって定義される. 確率変数が有る無いに関わらず, それらは4近傍セルオートマトン (Cellular Automaton, CA) によって定義できる2値の完全離散系となっている. なお, より基礎的なモデルとして3近傍CAによって定義される (確率) 粒子系の解析が既になされている. 本節の残りの部分では, これらの系に関する基本的な定義や既知の成果について紹介する.

まず, 用語を統一するため, 確率変数を含まないCAで定義される粒子系を粒子CA (Particle CA) と呼び, PCA と略することにする. 確率変数を含むものについてはさらに確率粒子CA (Stochastic PCA) と呼び, SPCA と略する. さらに, 近傍数を略称の後につ

けることにし, 3 近傍なら (S)PCA3, 4 近傍なら (S)PCA4 と名付ける. 4 近傍の場合はさらに独立な系が複数あるので, (S)PCA4-1, 4-2, … という具合に副番号を後ろに付けることにする.

次に, 系の時間発展則は

$$(1.1) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n$$

という形式で定義する. n は整数時刻, j は空間サイト番号, u は 0 か 1 の値を取りうる 2 進の状態値である. q_j^n は 3 近傍なら u_j^n と u_{j+1}^n に依存し, 4 近傍なら $u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n$ に依存する関数であり, 確率 CA の場合はさらに確率変数を含む. また, 空間サイトについては周期境界条件を考え, その周期を K で表すことにする. すると, (1.1) の形式にしたがう系は任意の n において

$$(1.2) \quad \sum_{j=1}^K u_j^{n+1} = \sum_{j=1}^K u_j^n$$

が成り立ち, 空間サイト全体での 1 の個数 (0 の個数) が時間によって変わらない. したがって $u = 1$ のサイトを粒子が存在するサイト, 0 のサイトを存在しないサイトとみなせば, (1.1) は粒子が移動する系の時間発展則を定義している. また (1.1) の q_j^n はサイト j から $j+1$ への流束を表している.

系の漸近挙動について重要な量は密度 ρ , 時刻 n における 1 サイト当たりの平均流束 Q^n , および, $n \gg 0$ における Q^n の収束値 Q^∞ であり, それぞれ

$$(1.3) \quad \rho = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K u_j^n, \quad Q^n = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K q_j^n, \quad Q^\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^n$$

で定義される. この ρ と Q^∞ の関係を相図で表したものが交通流の分野で基本図と呼ばれ, 系の把握に重要な指標を与えている [5]. 本稿でもこの基本図に焦点をしばって解析を行う.

1.1 (S)PCA3

確率変数を含まない PCA3 は

$$(1.4) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \quad q_j^n = \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n)$$

で定義される. 時間 1 階 3 近傍 2 値 CA において, 座標変換や従属変数変換で等価なものを同一視し, 線形の場合などトリビアルなものを除いた時間発展則は上記の (1.4) が唯一となる [7]. q_j^n より粒子の動きは

時刻 n においてサイト j に存在する粒子 ($u_j^n = 1$) はサイト $j+1$ が空いていれば ($u_{j+1}^n = 0$) そこに動き, そうでなければその場にとどまる.

というルールにしたがう。さらに、上式は 1 次元衝撃波のモデル方程式である Burgers 方程式の超離散化によって導くことができ、元の Burgers 方程式に呼応して、超離散 Cole-Hopf 変換

$$(1.5) \quad u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2}$$

によって超離散拡散方程式

$$(1.6) \quad f_j^{n+1} = \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n)$$

に帰着する [3]. これにより初期値問題は、(1.4) より単純な (1.6) の初期値問題を解けばすむことになり、(1.4) の相転移現象が (1.6) を通じて簡単に説明できる。2 値 CA をわざわざ \max や \min を用いて区分線形型の方程式で表すことの利点がある。

PCA3 に確率変数を取り入れた SPCA3 は

$$(1.7) \quad u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \quad q_j^n = \min(\alpha_j^n, u_j^n, 1 - u_{j+1}^n)$$

で与えられる。ここで α_j^n は時刻 n , サイト j に依存する確率変数であり、 α を $0 \leq \alpha \leq 1$ の定数としたとき、各 (j, n) 毎に確率 α で 1, 確率 $1 - \alpha$ で 0 の値を取る。粒子の動きでこの SPCA3 を表すと

時刻 n においてサイト j に存在する粒子 ($u_j^n = 1$) はサイト $j+1$ が空いており ($u_{j+1}^n = 0$) かつ $\alpha_j^n = 1$ であれば $j+1$ に動き、そうでなければその場にとどまる。

となり、 α_j^n が 1, 0 でスイッチする信号機の役割を果たしている。

この SPCA3 の基本図は Fig. 1 で与えられる。図の横軸が ρ , 縦軸が Q^∞ を表している。グラフは上から順に $\alpha = 1, 0.8, 0.5$ の場合であり、黒丸が数値実験、実線が理論曲線である。数値実験はサイト数を 12000 とし、 $n = 12000$ での Q の値をプロットしている。理論曲線は ASEP 等の理論により、適切な統計的仮定のもとで

$$(1.8) \quad Q^\infty = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha\rho(1 - \rho)}}{2}$$

となることが既に示されている [4].

1.2 PCA4

決定論的 4 近傍粒子 CA すなわち PCA4 は座標変換, 従属変数変換等で同値なものを同一視し, トリビアルな場合を除くと独立な系が 4 種類存在することが判明している [6]. そのうち, Q^∞ が初期値に依存しないのは 3 種類ある。これらを文献 [6] にならって PCA4-1, 4-2, 4-3 と呼ぶことにする。まず, それぞれの系は以下の時間発展方程式で定

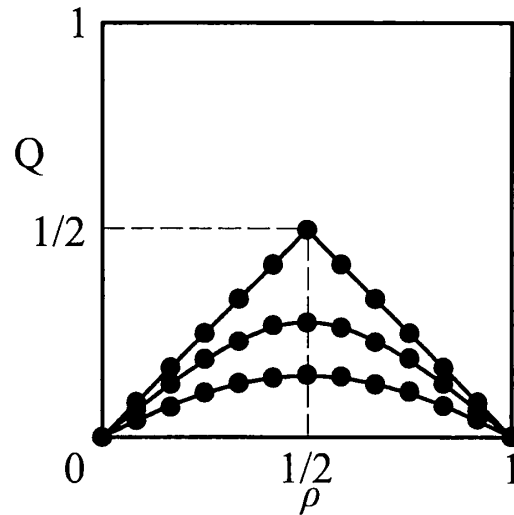


Fig. 1. Fundamental diagram of SPCA3.

義される.

$$(1.9) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \\ q_j^n &= \min(u_{j-1}^n + u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \end{aligned} \quad (\text{PCA4-1})$$

$$(1.10) \quad q_j^n = \min(\max(-u_{j+1}^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1), 1 - u_{j+1}^n), \quad (\text{PCA4-2})$$

$$(1.11) \quad q_j^n = \min(\max(0, u_{j-1}^n + u_j^n - 1), 1 - u_{j+1}^n) \quad (\text{PCA4-3})$$

さらに、それぞれの系の粒子 ($u = 1$) の移動ルールについて、どのような場合に粒子が動き、その粒子がどこに動くかを Fig. 2 に示す。また、それぞれの系の基本図を Fig. 3 に示

$$\begin{aligned} \text{PCA4-1:} & \quad (\text{A}) \quad \widehat{101} \quad (\text{B}) \quad \widehat{100} \\ \text{PCA4-2:} & \quad (\text{A}) \quad \widehat{110} \quad (\text{B}) \quad \widehat{001} \\ \text{PCA4-3:} & \quad (\text{A}) \quad \widehat{110} \end{aligned}$$

Fig. 2. Rules of motion in PCA4-1, 4-2 and 4-3.

す。これら 3 種類の PCA4 は、超離散 Cole-Hopf 変換を通じて初期値問題が解けることが判明している。

2. SPCA4-2

2.1 時間発展方程式と数値実験

本節では PCA4-2 に確率変数を導入した SPCA4-2 について詳しく述べる。まず、サイト j 、時刻 n に依存する 2 種類の確率変数 a_j^n, b_j^n を考える。それぞれ 0 から 1 の範囲の定

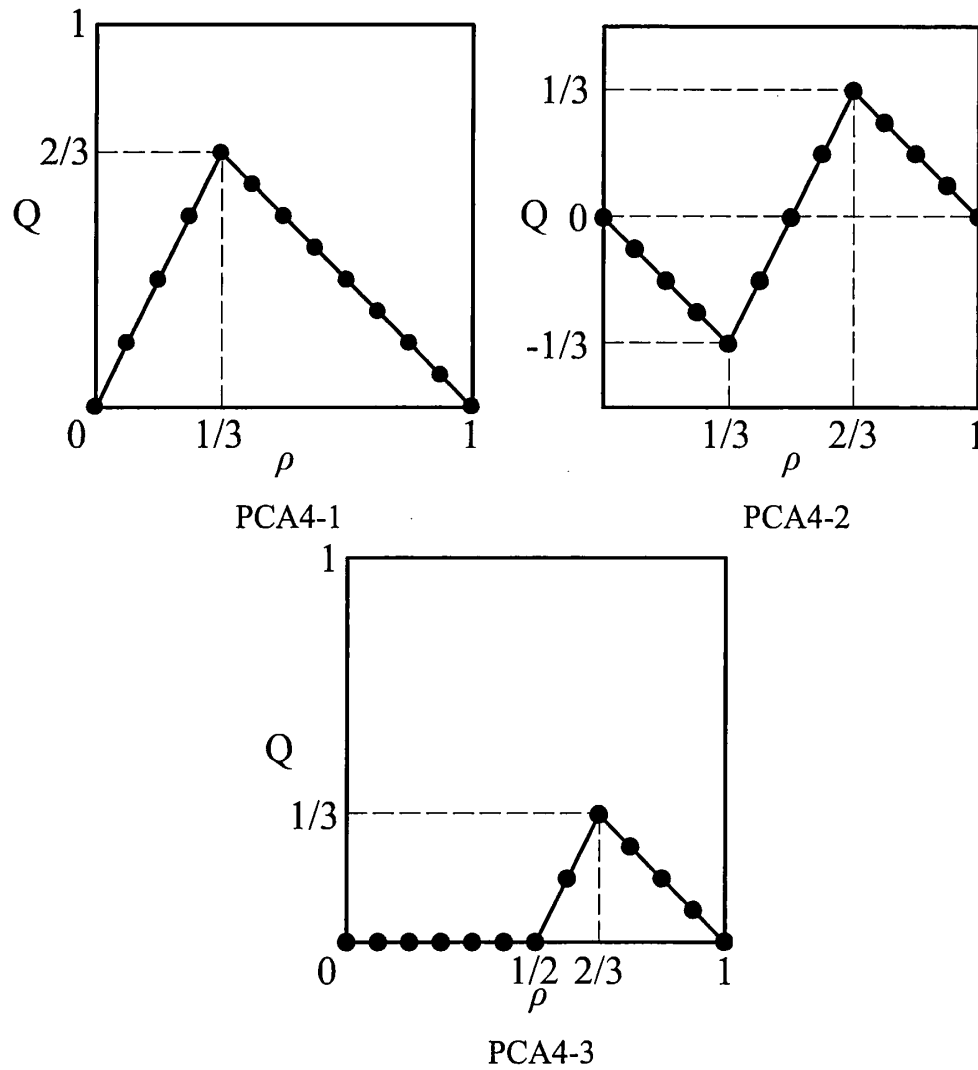


Fig. 3. Fundamental diagrams of PCA4-1,4-2 and 4-3.

数 α, β によって各 (j, n) 毎に

$$(2.1) \quad a_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \alpha) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - \alpha) \end{cases}, \quad b_j^n = \begin{cases} 1 & (\text{確率 } \beta) \\ 0 & (\text{確率 } 1 - \beta) \end{cases}$$

で 0 か 1 の値を与える. このとき SPCA4-2 の時間発展方程式を

$$(2.2) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \\ q_j^n &= \min(\max(-\min(b_j^n, u_{j+1}^n), \min(a_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n) \end{aligned}$$

で与える. $u \in \{0, 1\}$ であることより, $a_j^n \equiv b_j^n \equiv 1$ の場合, 上式は確率変数を含まない PCA4-2 (1.10) に一致する. さらに, (2.2) の粒子の移動規則は Fig. 4 で表される. すなわち,

時刻 n , サイト j に存在する粒子 ($u_j^n = 1$) は

- (A) サイト $j-1$ に粒子が存在し ($u_{j-1}^n = 1$), $j+1$ が空いている ($u_{j+1}^n = 0$) とき $a_j^n = 1$ なら $j+1$ に動く.
- (B) 連続するサイト $j-2, j-1$ が空いている ($u_{j-2}^n = u_{j-1}^n = 0$) とき, $b_{j-1}^n = 1$ なら $j-1$ に動く.
- (C) (A) でも (B) でもなければその場にとどまる.

となる.

$$(A) \quad 1 \overset{\alpha}{\underset{\rho}{\hat{1}}} 0 \quad (B) \quad 0 \overset{\beta}{\underset{\rho}{\hat{0}}} 1$$

Fig. 4. Rules of motion in SPCA4-2.

次に SPCA4-2 の基本図を $(\alpha, \beta) = (0.7, 0.3), (0.4, 0.6)$ の 2 通りの場合で Fig. 5 に示す. 黒丸が数値実験による結果を表しており, 実線は次節で述べる理論式によるプロットである. 数値実験はサイト数を 12000 とし, $n = 12000$ での Q の値をプロットしている. 目視の範囲では両者が完全に一致していることがわかる. なお, より詳細な数値実験より以

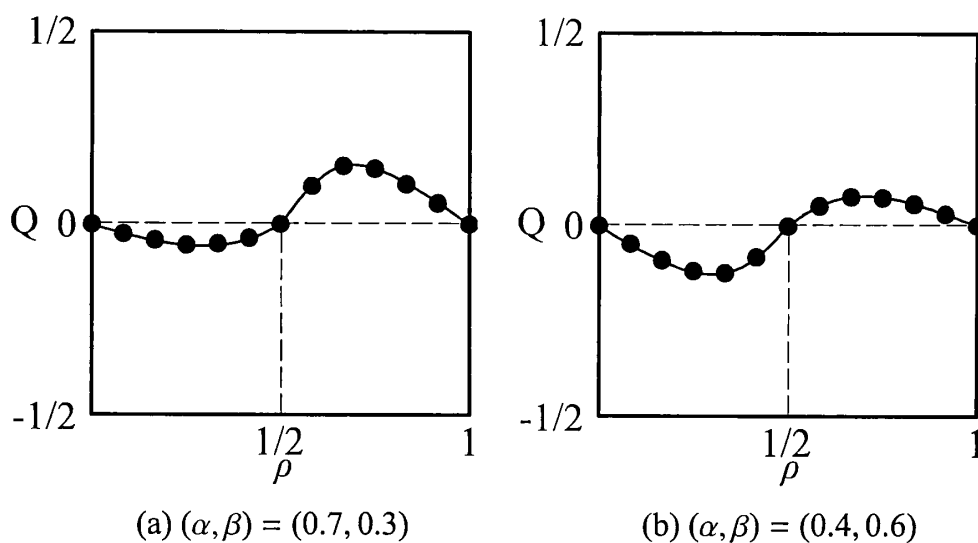


Fig. 5. Fundamental diagrams of SPCA4-2.

下の事実が推定される.

- 平均流束は密度 ρ , 確率 α, β に依存するが, 同じ密度においては初期状態 (初期の粒子の配置) や試行 (a_j^n, b_j^n の詳細) に依存しない.
- 基本図において, $\rho < 1/2$ の曲線は β にのみ依存し α に依存しない. 逆に $\rho > 1/2$ の曲線は α にのみ依存し β に依存しない.

初期状態や試行に依存せず Q^∞ が決まるという事実は, SPCA4-2 の特徴を表している. しかも Q^∞ は時間平均をとらず, n が十分大きければ空間平均のみで値が収束する. この

性質は SPCA3 でも同様に成り立つが、一般の確率モデルにおいては非常に成り立ちにくい。SPCA4-2 では ρ, α, β を定めれば、それらによって決まる何らかの共通の飽和状態に常に達することを上の事実は示唆している。

2.2 基本図の理論式の導出

SPCA4-2 の基本図の理論式を導出する。まず、空間周期 K を決め、密度 ρ , 確率 α, β , 初期状態を定めて 1 回の試行を行ったとしよう。 K は十分大きなサイズであるとする。このとき x_1, x_2, \dots, x_m をそれぞれ 0 か 1 の値をとる定数とし、 $P_{x_1 x_2 \dots x_m}^n$ を

$$(2.3) \quad P_{x_1 x_2 \dots x_m}^n = \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K \delta_{u_j^n x_1} \delta_{u_{j+1}^n x_2} \dots \delta_{u_{j+m-1}^n x_m}$$

と定義する。すなわち $P_{x_1 x_2 \dots x_m}^n$ は時刻 n における 0, 1 パターン $x_1 x_2 \dots x_m$ の密度を与える。さらに、 $n \gg 0$ における P の収束値を $P_{x_1 x_2 \dots x_m}^\infty$ と書くことにする。上の定義から

$$(2.4) \quad P_{x_1 x_2 \dots x_m 1}^n + P_{x_1 x_2 \dots x_m 0}^n = P_{x_1 x_2 \dots x_m}^n, \quad P_{1 x_1 x_2 \dots x_m}^n + P_{0 x_1 x_2 \dots x_m}^n = P_{x_1 x_2 \dots x_m}^n$$

は明らかに成り立つ。また、この系では粒子の個数が変わらないことより以下の等式が成り立つ。

$$(2.5) \quad P_1^n = P_{10}^n + P_{11}^n = \rho, \quad P_0^n = P_{00}^n + P_{01}^n = 1 - \rho, \quad P_{01}^n = P_{10}^n, \quad P_{00}^n - P_{11}^n = 1 - 2\rho$$

次に、時刻 $n+1$ で $(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) = (1, 0)$ のパターンを生み出す時刻 n でのパターンおよび生成確率をリストアップすると Table. 1 となる。この表をもとにパターンの存在密度の

Table 1. Pattern and probability at n to obtain $(u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) = (1, 0)$.

$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	Probability
1	1	0	0	0	α
1	1	0	0	1	$\alpha(1-\beta)$
	0	0	1		β
	1	1	0		$1-\alpha$
1	0	1	0		1
0	0	1	0		$1-\beta$
	1	1	1	0	α
1	0	1	1	0	α
0	0	1	1	0	$\alpha(1-\beta)$

バランス方程式を立てると

$$(2.6) \quad \begin{aligned} P_{10}^{n+1} &= \alpha P_{11000}^n + \alpha(1-\beta)P_{11001}^n + \beta P_{001}^n + (1-\alpha)P_{110}^n + P_{1010}^n \\ &\quad + (1-\beta)P_{0010}^n + \alpha P_{1110}^n + \alpha P_{10110}^n + \alpha(1-\beta)P_{00110}^n \\ &= \underline{P_{10}^n + \alpha P_{11000}^n + \alpha(1-\beta)P_{11001}^n + \beta P_{00111}^n + \beta(1-\alpha)P_{00110}^n} \end{aligned}$$

となる. 上式右辺の下線部は非負の値をとるので P_{10}^n (および P_{01}^n) は n について単調増加となり, $n \gg 0$ で一定値に収束する. また, このとき下線部は 0 に等しくなるので

$$(2.7) \quad P_{11000}^\infty = P_{11001}^\infty = P_{00111}^\infty = P_{00110}^\infty = 0$$

すなわち

$$(2.8) \quad P_{1100}^\infty = P_{0011}^\infty = 0$$

も同時に実現する. ところが, もし状態中に 00 と 11 が共存すると, 粒子の移動規則より $\alpha, \beta \neq 0$ の場合には時間が経過すると 0011 あるいは 1100 のパターンが生まれ (2.8) と矛盾する. したがって $n \gg 0$ においては 00 と 11 のパターンは共存できず, (2.5) より

$$(2.9) \quad \begin{cases} P_{11}^\infty = 0, & P_{01}^\infty = P_{10}^\infty = \rho, & P_{00}^\infty = 1 - 2\rho & (\rho < 1/2) \\ P_{00}^\infty = 0, & P_{01}^\infty = P_{10}^\infty = 1 - \rho, & P_{11}^\infty = 2\rho - 1 & (\rho > 1/2) \end{cases}$$

となる.

以降は問題の対称性より $\rho < 1/2$ の場合のみを考える. (2.4), (2.9) を用いれば $n \gg 0$ のとき以下が得られる.

$$(2.10) \quad \begin{aligned} P_{000}^\infty &= 1 - 2\rho - P_{001}^\infty, & P_{010}^\infty &= \rho, & P_{111}^\infty &= P_{110}^\infty = P_{011}^\infty = 0 \\ P_{101}^\infty &= \rho - P_{001}^\infty, & P_{100}^\infty &= P_{001}^\infty \end{aligned}$$

したがって $P_{x_1}^\infty, P_{x_1x_2}^\infty, P_{x_1x_2x_3}^\infty$ は ρ と P_{001}^∞ だけを用いて表すことができる. 次に平均流束 Q^n は粒子の移動規則から,

$$(2.11) \quad Q^n = \alpha P_{110}^n - \beta P_{001}^n$$

と表せる. $\rho < 1/2$ かつ $n \gg 0$ のとき, (2.10) より $P_{110}^\infty = 0$ なので

$$(2.12) \quad Q^\infty = -\beta P_{001}^\infty$$

となる. さらに, 時刻 $n+1$ で $(u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) = (0, 0, 1)$ のパターンを生み出す時刻 n のパターンをリストアップすると Table. 2 となる. この表をもとにパターンの存在密度のバランス方程式を立てると

$$(2.13) \quad P_{001}^{n+1} = P_{0001}^n + (1-\beta)P_{01001}^n + (1-\alpha)(1-\beta)P_{11001}^n + \beta P_{00101}^n + \alpha\beta P_{00110}^n + \beta^2 P_{001001}^n$$

が得られる. ところが $\rho < 1/2, n \gg 0$ では $P_{11}^\infty = 0$ から $P_{11001}^\infty = P_{00110}^\infty = 0$ となり, 結局

Table 2. Pattern and probability at n to obtain $(u_{j-1}^{n+1}, u_j^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) = (0, 0, 1)$.

$j-3$	$j-2$	$j-1$	j	$j+1$	$j+2$	Probability
	0	0	0	1		$1 - \beta$
0	1	0	0	1		$1 - \beta$
1	1	0	0	1		$(1 - \alpha)(1 - \beta)$
0	0	1	0	1		β
0	0	1	1	0		$\alpha\beta$
		0	0	0	1	β
0	0	1	0	0	1	β^2

$$(2.14) \quad P_{001}^{\infty} = P_{0001}^{\infty} + (1 - \beta)P_{01001}^{\infty} + \beta P_{00101}^{\infty} + \beta^2 P_{001001}^{\infty}$$

が成り立つ.

ここで以下の関係式が $n \gg 0$ で成り立つと仮定しよう.

$$(2.15) \quad \begin{aligned} P_{0001}^{\infty} &= \frac{P_{000}^{\infty} P_{001}^{\infty}}{P_{00}^{\infty}}, & P_{01001}^{\infty} &= \frac{P_{010}^{\infty} P_{100}^{\infty} P_{001}^{\infty}}{P_{10}^{\infty} P_{00}^{\infty}}, \\ P_{00101}^{\infty} &= \frac{P_{001}^{\infty} P_{010}^{\infty} P_{101}^{\infty}}{P_{01}^{\infty} P_{10}^{\infty}}, & P_{001001}^{\infty} &= \frac{P_{001}^{\infty} P_{010}^{\infty} P_{100}^{\infty} P_{001}^{\infty}}{P_{01}^{\infty} P_{10}^{\infty} P_{00}^{\infty}} \end{aligned}$$

これら関係式が成り立つことについてはまだ証明できていない. しかしながら, 数値実験により, 十分よい精度で (2.15) の関係式が成り立つことを確認している. 例えば, $P_{0001}^{\infty} = P_{000}^{\infty} P_{001}^{\infty} / P_{00}^{\infty}$ を検証するため, サイト数 12000 の数値実験において $n = 12000$ で $P_{0001}^{\infty} P_{00}^{\infty}$ と $P_{000}^{\infty} P_{001}^{\infty}$ の値を $(\alpha, \beta) = (0.7, 0.3)$ の場合に比較した結果を Fig. 6 に示す. 図では $P_{0001}^{\infty} P_{00}^{\infty}$ を \circ , $P_{000}^{\infty} P_{001}^{\infty}$ を \times で表しているが良好な一致が見られ. 他の α, β の組み合わせでも同様の一致が確認されている. $P_{x_1 x_2}^{\infty}, P_{x_1 x_2 x_3}^{\infty}$ は ρ と P_{001}^{∞} だけで表せるので, (2.15) を (2.14) に代入すれば未知変数は ρ と P_{001}^{∞} のみになる. 以上の関係をすべて (2.14) に代入し, 式を整理すると

$$(2.16) \quad \frac{\beta P_{001}^{\infty} \left(\beta (P_{001}^{\infty})^2 - P_{001}^{\infty} + \rho P_{001}^{\infty} + \rho - 2\rho^2 \right)}{\rho(-1 + 2\rho)} = 0$$

が得られ, P_{001}^{∞} の 2 次方程式

$$(2.17) \quad \beta (P_{001}^{\infty})^2 - (1 - \rho) P_{001}^{\infty} + \rho(1 - 2\rho) = 0$$

が導かれる. これを解いて得られる 2 根のうち $\rho = 0$ のときに $P_{001}^{\infty} = 0$ となる場合を選ぶと

$$(2.18) \quad P_{001}^{\infty} = \frac{1 - \rho - \sqrt{(1 - \rho)^2 - 4\beta\rho(1 - 2\rho)}}{2\beta}$$

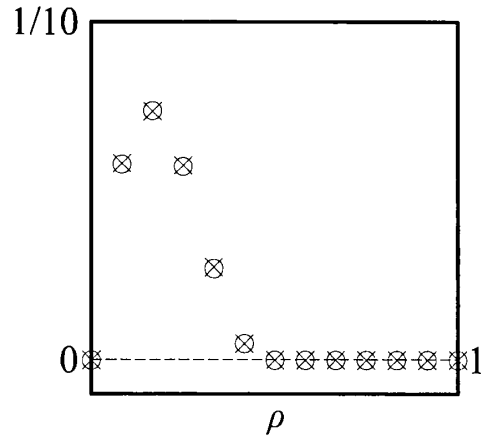


Fig. 6. Comparison between $P_{0001}^\infty P_{00}^\infty$ and $P_{000}^\infty P_{001}^\infty$ by numerical experiments of SPCA4-2 for $(\alpha, \beta) = (0.7, 0.3)$.

となる。そしてこの式と (2.12) より $\rho < 1/2$ のとき基本図の理論式は、

$$(2.19) \quad Q^\infty = -\frac{1 - \rho - \sqrt{(1 - \rho)^2 - 4\beta\rho(1 - 2\rho)}}{2}$$

であることが最終的に導かれる。

$\rho > 1/2$ のときは $\rho < 1/2$ のときと同様の議論により

$$(2.20) \quad Q^\infty = \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\alpha(1 - \rho)(2\rho - 1)}}{2}$$

となる。

3. その他の SPCA4

PCA4-1, 4-3 に確率変数を導入した SPCA4-1, 4-3 はそれぞれ以下の方程式で与えられる。

$$(3.1) \quad \begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \\ q_j^n &= \min(a_{j-1}^n + u_j^n, a_j^n + b_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n, 1 - u_{j+1}^n), \end{aligned} \quad (\text{SPCA4-1})$$

$$(3.2) \quad q_j^n = \min(\max(0, \min(a_j^n, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)), 1 - u_{j+1}^n) \quad (\text{SPCA4-3})$$

それぞれの系の粒子の動きを Fig. 7 に示す。また、基本図における数値実験の結果（黒丸）と理論曲線（実線）を Fig. 8 に示す。理論曲線は前節の SPCA4-2 と同様の手法で導出できる。導出過程を省略し結果のみ以下に記す。まず SPCA4-3 については

$$(3.3) \quad Q^\infty = \begin{cases} 0 & (\rho < 1/2) \\ \frac{\rho - \sqrt{\rho^2 - 4\alpha(1 - \rho)(2\rho - 1)}}{2} & (\rho > 1/2) \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \text{SPCA4-1: (A) } \overset{\alpha+\beta-\alpha\beta}{\underset{\wedge}{101}} \quad \text{(B) } \overset{(1-\alpha)(\alpha+\beta-\alpha\beta)}{\underset{\wedge}{100}} \quad \text{(C) } \overset{\alpha(\alpha+\beta-\alpha\beta)}{\underset{\wedge}{100}} \\ \text{SPCA4-3: (A) } \overset{\alpha}{\underset{\wedge}{110}} \end{array}$$

Fig. 7. Rules of motion in SPCA4-1 and SPCA4-3.

となる。(2.2)と(3.2)を比べれば明らかなように、SPCA4-3はSPCA4-2の $b_j^n \equiv 0$ ($\beta = 0$)とした場合に相当する。したがって基本図は $\rho < 1/2$ で常に $Q^\infty = 0$ となり、 $\rho > 1/2$ の Q^∞ は(2.20)と一致する。一方、SPCA4-1については Q^∞ を初等関数で表現することができない。 Q^∞ は $\rho, \alpha, \beta, P_{10}^\infty$ の有理式で表現でき、 P_{10}^∞ は ρ, α, β を係数に含む6次方程式の根として求められる。したがって Q^∞ は ρ, α, β にのみ依存する。しかしながら、6次方程式自身が長く、その根も初等関数で表現できないので、式表現については省略する。Fig. 8では6次方程式を数値的に解いた理論曲線と、数値実験の結果を比較している。数値実験はサイト数を12000とし、 $n = 12000$ での Q の値をプロットしている。得られる理論曲線の枝のひとつと数値実験の結果がよく一致していることがわかる。

4. 考察と今後の課題

これまでの節で我々は

- PCA4-1, 4-2, 4-3に確率変数を導入したSPCA4-1, 4-2, 4-3の提出
- それらSPCAそれぞれに対する基本図の理論式の導出と数値計算との比較

を行った。まず、SPCA4-1, 4-2, 4-3の時間発展方程式は、すべてmax-plus表現でそれぞれ(3.1), (2.2), (3.2)のように与えた。 u, a, b の値が0か1しか取らないならばこのような表現は必要なく、2進表で事足りる。しかしながら、PCA3, PCA4と同様の変換(Burgers方程式でのCole-Hopf変換に相当する変換)すなわち

$$(4.1) \quad u_j^n = \begin{cases} f_j^n - f_{j-1}^n + 1/3 & (\text{SPCA4-1}) \\ f_j^n - f_{j-1}^n + 1/2 & (\text{SPCA4-2, 4-3}) \end{cases}$$

によって、(3.1), (2.2), (3.2)はそれぞれ

$$(4.2) \quad \begin{cases} f_j^{n+1} = \max(f_{j-1}^n - a_{j-1}^n + \frac{1}{3}, f_j^n - a_j^n - b_j^n + \frac{2}{3}, f_{j-2}^n, f_{j+1}^n), & (\text{SPCA4-1}) \\ f_j^{n+1} = \max(\min(f_j^n + b_j^n, f_{j+1}^n + \frac{1}{2}, \max(f_j^n - a_j^n, f_{j-2}^n)), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}), & (\text{SPCA4-2}) \\ f_j^{n+1} = \max(\min(f_j^n, \max(f_j^n - a_j^n, f_{j-2}^n)), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}) & (\text{SPCA4-3}) \end{cases}$$

に帰着する。確率変数を含まないPCA4では f の初期値問題を解くことで解が得られ、その解は0, 1の2進の初期値だけではなく、実数の初期値で通用する。したがって、変換に

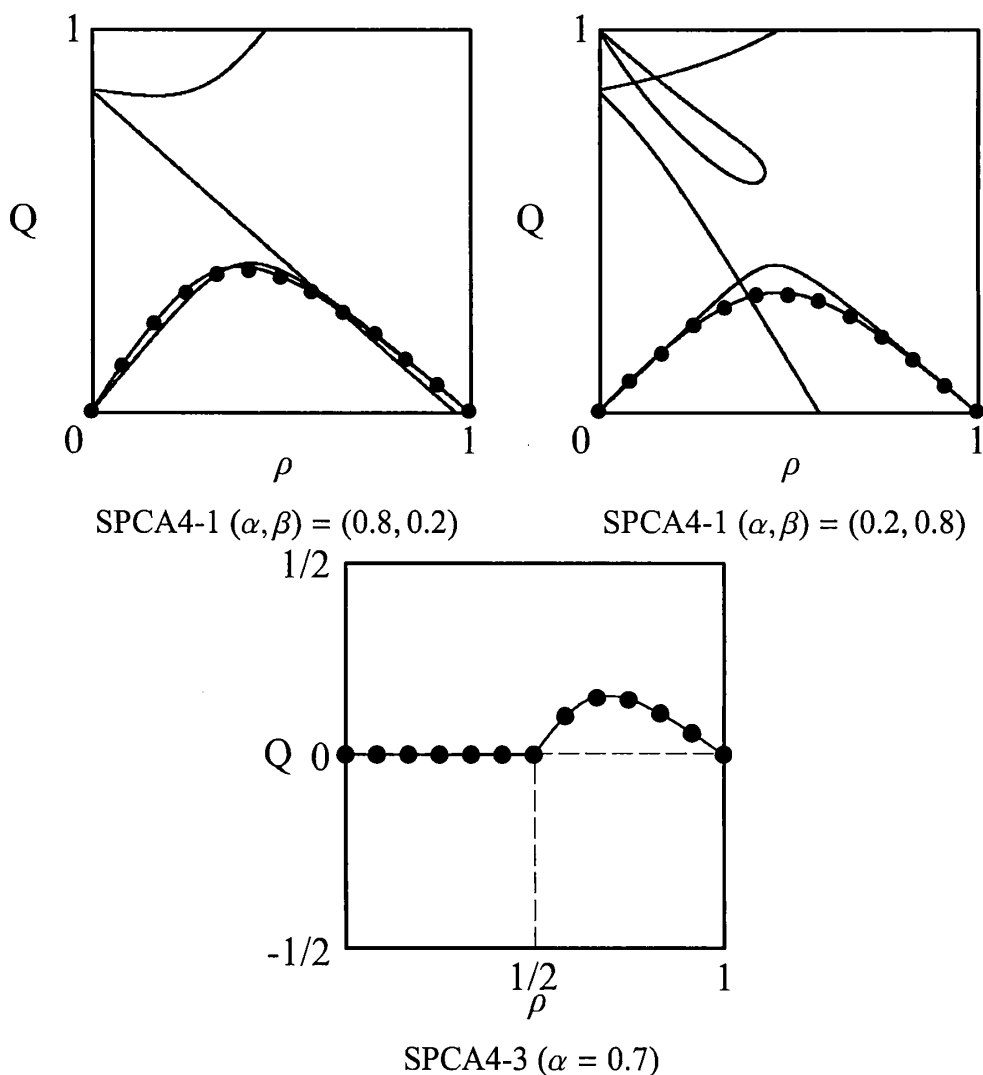


Fig. 8. Fundamental diagrams of SPCA4-1 and SPCA4-3.

より (4.2) に帰着する SPCA4 (3.1), (2.2), (3.2) でも実数の初期値で基本図の理論曲線が成り立つ可能性が高く、既に数値実験によりそのことを裏打ちする成果が得られつつある。一方, Fig. 4, Fig. 7 のように粒子の移動規則から出発すると, その点の実現はたいへん難しい。max-plus 表現による時間発展方程式の記述にはこのような特徴があり, 2 進モデルから実数モデルへの拡張およびその意味づけについては今後の興味深い課題である。

次に 2.2 節で詳しく述べたように, 基本図の理論曲線の導出においてパターンの存在密度 $P_{x_1 x_2 \dots x_m}^\infty$ の関係式 (2.15) を仮定することが必要となった。この関係式は数値実験により確認できるとはいえ, なぜそのような関係式が成り立つかについては明らかにされていない。これら関係式は系の漸近挙動について重要なメカニズムを表すものであり, 証明がぜひとも望まれる。

さらに我々が提出した複数の確率モデルには相互に興味深い関係が存在する。たとえば SPCA4-1 で $a_j^\alpha \equiv 0$ ($\alpha = 0$) とすると SPCA3 に帰着し, SPCA4-2 で $b_j^\beta \equiv 0$ ($\beta = 0$) とする

と, SPCA4-3 に帰着する. これら相互の関係は, 近傍数の多い確率モデルを特殊化することで近傍数の少ない確率モデルが得られるというヒエラルキーの存在を示唆している. 実際に, SPCA3, SPCA4 のすべてを含む 5 近傍確率モデル SPCA5 を max-plus 方程式の形で作ることが可能であり, 基本図の曲線が理論的に導出できるかどうかを検証中である. このように, 基本図が厳密に解けるような確率モデルのヒエラルキーについても今後の課題として興味深い.

参考文献

- [1] Blythe R. A. and Evans M. R., Nonequilibrium steady states of matrix-product form: a solver's guide, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40** (2007), R333–R441.
- [2] Fisher M. E., Walks, Walls, Wetting, and Melting, *J. Stat. Phys.*, **34** (1984), 667–729.
- [3] 広田 良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.
- [4] Schadschneider A. and Schreckenberg M., Cellular automaton models and traffic flow, *J. Phys. A: Math. Gen.*, **26** (1993), L679–L683.
- [5] 杉山 雄規, 交通流の物理, *ながれ*, **22** (2003), 95–108.
- [6] Takahashi D., Matsukidaira J., Hara H. and Feng B., Max-plus analysis on some binary particle systems, *J. Phys. A: Math. Theor.*, **44** (2011) 135102 (21pp).
- [7] Wolfram S., *A new kind of science*, Wolfram Media Inc., 2002.

桑原 英樹 (非会員) 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学理工学術院
2011 年 3 月早稲田大学基幹理工学部応用数理学科卒業. 現在, 同大学大学院基幹理工学研究科数学応用数理専攻修士課程在学中. セルオートマトンの研究に従事.

池上 貴俊 (非会員) 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学理工学術院
2012 年 3 月早稲田大学大学院基幹理工学研究科修士課程修了. 現在, 早稲田大学理工学術院助手. 超離散系, セルオートマトンの研究に従事.

高橋 大輔 (正会員) 〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1 早稲田大学理工学術院
1985 年 3 月東京大学大学院工学系研究科修士課程修了. 工学博士. 現在, 早稲田大学理工学術院教授. 非線形波動, 離散可積分系の研究に従事. 日本応用数理学会, 日本物理学会, 日本数学会, 日本流体力学会会員.

(2012年9月28日 受付)

(2013年2月6日 最終稿 受付)