

論文

箱玉系とその周辺

高橋 大輔 松木平 淳太

1 箱玉系とは

最も簡単な箱玉系の定義を以下に与えよう[1]~

[4]. まず, 図1のように箱が横1列に無限に並んでいる中に, 適当な個数の玉を入れた状態を考える. それぞれの箱には整数番号が左から右に振られており, 玉同士は区別がなく, 箱にはひとつだけ玉が入り得るとする. 箱玉系の任意の状態は, どの番号の箱に玉が入っているかという配置によって定められる. 次に, ある状態から別の状態への遷移を, 以下の規則に従う玉の移動で与える.

- 玉の運搬人が箱の列を左から右へ移動し, それぞれの箱を順にチェックして以下の動作を行う.
- 玉が入っている箱に出会ったらそれを手に取

る. ただし, 運搬人は何個でも手に持つことができるとする.

- 空箱に出会い, もし手持ちの玉があればその内からひとつだけ取り出して箱に入れる. 手持ちの玉がなければ何もせずに通過する.

整数時刻を想定し時刻が1増えるごとに上記の状態遷移が起こるとすれば, 箱玉系は時間発展系と見なすことができる. 図1の状態を時刻0とし, その前後の時間発展を描いたものを図2に示す. 上の規則で運搬人の移動の左右を逆にすれば前の時刻の状態に遷移するので可逆系である.

この系の特徴は以下の通りである. まず, 任意の初期状態から時刻が十分に経つと, 連続した玉の並び(グループと呼ぼう)に分裂し, グループに

[筆者紹介]



たかはし だいすけ. 1983年東京大学工学部物理工学科卒業. 1985年同大学大学院工学系研究科物理工学専門課程修士課程修了. 1986年同大学大学院工学系研究科物理工学専門課程博士課程中途退学, 同年より同大学工学部助手. 1990年龍谷大学理工学部講師を経て, 1994年同大学理工学部助教授. 1998年早稲田大学理工学部助教授, 2001年同大学理工学部教授を経て, 2007年同大学理工学術院基幹理工学部教授, 現在に至る. 非線形波動, 離散可積分系, セルオートマトンに関する研究に従事. 工学博士. 日本応用数理学会, 日本物理学会, 日本数学会, 日本流体力学会各会員.



まつき だいら じゅんた. 1987年東京大学工学部物理工学科卒業. 1989年同大学大学院工学系研究科物理工学専門課程修士課程修了. 1990年同大学大学院工学系研究科物理工学専門課程博士課程中途退学, 同年より同大学工学部助手. 1992年龍谷大学理工学部助手, 1995年同大学理工学部講師, 1999年同大学理工学部助教授を経て, 2004年同大学理工学部教授, 現在に至る. 非線形波動, 離散可積分系, セルオートマトンに関する研究に従事. 工学博士. 日本応用数理学会, 日本物理学会, SIAM各会員.

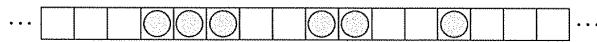


図1 箱玉系の構成

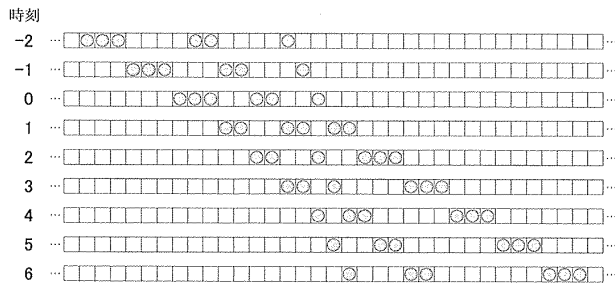


図2 箱玉系の時間発展

所属する玉の個数(大きさと呼ぼう)は左から小さい順になる。玉のグループが大きいくほど右移動の速さが大きいので以降はグループ同士は距離を拡げるのみとなる。一方、時刻を十分さかのぼると今度は玉のグループが左から大きい順に出現する。そして、時刻をさかのぼって現れる玉のグループは時刻が経ったときに現れるものと位置を逆順にして一対一対応する。

この一対一対応から、玉のグループは追い抜き相互作用を行ったと見なすことができる。すなわち中間状態では何らかの相互作用が行われるが結果として大きいグループが小さいグループを追い抜いたと考えてよい。グループの軌道をたどると、大きいグループが小さいグループを追い抜いた後にどちらも軌道のずれが生じている。したがって、相互作用は非線形である。

任意の初期状態からこのような相互作用を行う系はソリトン系として知られている。たとえば Korteweg-de Vries(KdV)方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

の3ソリトン解は図3に示すように、右に進行する高さの異なる3つの波が、非線形の追い抜き相互作用を起こした後に再び同じ3つの波に分裂している。この3つの波のように、非線形相互作用に関わらず自己を保存するような波それぞれをソリトンと呼び、ソリトンが存在しうるような非線形系(方程式)をソリトン系(方程式)と呼ぶ。上述の箱玉系でも玉のグループがソリトンの役割を果たすので立派なソリトン系である。

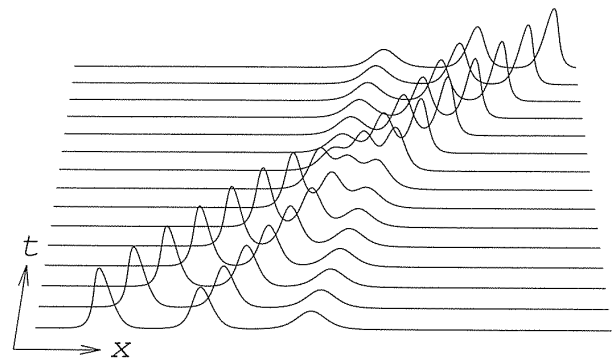


図3 KdV方程式の3ソリトン解

ソリトン系としての箱玉系の特徴は離散性にある。座標、時刻、状態値(箱に玉が存在するか否か)のどれもが離散であり、完全デジタル系となっている。一方、KdV方程式は全変数が連続である。しかしながら両者はソリトン系の特徴を完全に有しているので何らかの関係があるはずである。この関係は本論文の著者達を含む研究グループにより1996年に解明される[5]。両者は方程式のレベルで次式に示すような関係を有している。

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{KdV 方程式})$$

↑ 空間変数の連続極限

$$du_j/dt = u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) \quad (\text{LV 方程式})$$

↑ 時間変数の連続極限

$$(u_j^{n+1} - u_j^n)/\delta = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^n \quad (\text{差分 LV 方程式})$$

↓ 従属変数の超離散化

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \max(0, u_{j-1}^n - 1) - \max(0, u_{j+1}^n - 1) \quad (\text{超離散 LV 方程式})$$

↑ 座標変換・変数変換

$$u_j^{n+1} = \min\left(1 - u_j^n, \sum_{k=-\infty}^{j-1} (u_k^n - u_k^{n+1})\right) \quad (\text{箱玉系の時間発展則})$$

KdV方程式から逆にたどると、空間座標 x を離散化すると無限種間の食物連鎖を表す Lotka-Volterra(LV)方程式となり、さらに時刻 t を離散化すると差分LV方程式となる。これで独立変数の離散化がすべて終了する。ここまでは箱玉系以前のソリトン理論の成果である[6]。残るは従属変数 u の離散化であるが、ここで超離散化と呼

ばれる以下の公式が用いられる.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log (e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max (A, B, \dots) \quad (1)$$

これにより差分 LV 方程式から区分線形型の超離散 LV 方程式が導かれる. そして座標変数および従属変数の変換を施せば箱玉系の時間発展則にたどり着く. なお, 箱玉系では時刻 n , 番号 j の箱の中の玉の数を $u_j^n (=0, 1)$ と表して, 時間発展則を方程式で表している.

また, 箱玉系にはいろいろな拡張版が存在し, 以下の3種類がよく知られている.

- 箱の容量を可変にする
- 玉に番号を付け, その番号順に右へ移動する
- 積載容量が有限の運搬車で玉を運ぶ

これら拡張もソリトン方程式の超離散化から得ることができる.

以上のような連続から離散までの関連は, 方程式だけでなく, それに付随する双線形方程式, ソリトン解, 保存量などソリトン系に備わるあらゆる関係・量をも同時に結びつけている. 超離散化によって完成したこのような図式は他のソリトン方程式でも成り立ち, 戸田方程式や変形 KdV 方程式の超離散化などが報告されている[7][8].

超離散化で最も重要な公式(1)は, ソリトン方程式や可積分性を前提とするものではなく, ただの極限公式である. このことから, ときには可積分系を巻き込みつつ, ささまざまな分野で同様の極限を用いる応用が知られている. 次節からはそれら話題について具体例を挙げながら簡単に紹介していこう.

2 周期箱玉系, 結晶基底[4]

箱玉系の箱の数を有限にし, 右端と左端をつなぎ合わせた空間周期系を考える. 適当な玉の配置を初期状態にし, 時間発展を行ったときに元の初期状態に戻るまでの時間(周期)を考える. このとき, ある条件を満たす初期状態に対しては以下の漸近評価が成り立つ. ここで L は箱の数, T は

周期を表す.

$$\log T = 2\sqrt{L} + O(L^{1/4} \log^2 L) \quad (L \rightarrow \infty)$$

この評価は, 素数分布に関してよく知られている予想と同じことを意味しており, したがって **Riemann 予想**とも等価であることは興味深い.

可解格子模型とは, 統計力学において系の熱力学的量である分配関数や相関関数を厳密に計算できる格子模型(原子分子が規則的に並んだ単純な物理モデル)のことであり, 2次元 Ising 模型や6頂点模型などがよく知られている. これら模型は, 理論統計力学の牽引力として数学や物理のさまざまな分野と関連しつつ研究が盛んに行われている. さて, 統計力学で E_1, E_2, \dots というエネルギー状態をとりうる系の自由エネルギーは $F = -k_B T \log (e^{-E_1/k_B T} + e^{-E_2/k_B T} + \dots)$ と表すことができる. k_B は Boltzmann 定数, T は絶対温度である. もし E_i が温度によらなければ, 低温極限で

$$\lim_{T \rightarrow +0} -k_B T \log (e^{-E_1/k_B T} + e^{-E_2/k_B T} + \dots) = \min (E_1, E_2, \dots)$$

となり, 最低エネルギー状態(基底状態)が実現する. この公式は(1)と同等であり, 差分方程式の超離散化は, その方程式が表す何らかの系の低温極限をとっていると物理的に解釈することができる.

さらに, 6頂点模型のエネルギー状態をより一般化した格子模型があり, その碁盤目状の2次元格子が低温極限において局所的にどのような状態をとりうるかを図4に示す. この図の上下左右の数の関係は, 玉の最大積載個数が l の運搬車が玉1つ分の容量の任意の箱を通り過ぎたときの様子と符合する. 箱玉系でこの図の数の関係を解釈したものを図5に示す. 以上のように, 箱玉系は可解格子模型の低温極限と直接的に関係がある. また, 可解格子模型は対称性を拡張することによってさまざまなタイプのものを得ることができ, 逆に可解格子模型から箱玉系のいろんな拡張を考える研究がなされている.

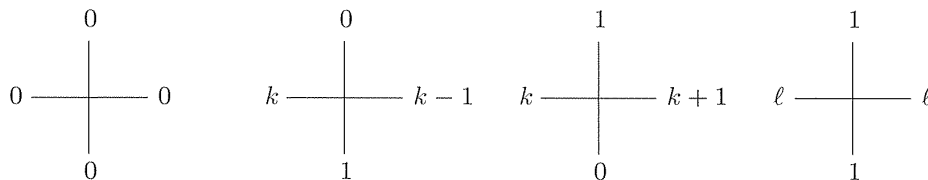


図4 可解格子模型がとりうる局所状態

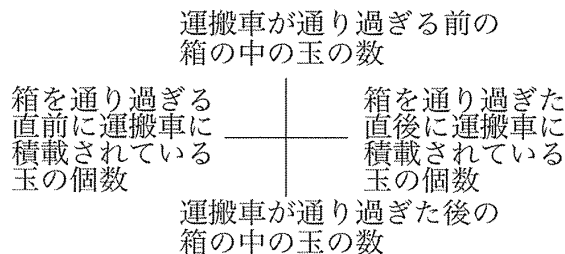


図5 可解格子模型と箱玉系の関係

3 セルオートマトン

(1)の左辺は $x=e^{X/\varepsilon}$ 型の変数変換と $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を利用している. この操作により, 実数の和 (+)・積 (\times)・商 ($/$) の演算はそれぞれ $\max, +, -$ に変更される.

$$x+y \longrightarrow \max(X, Y), \quad xy \longrightarrow X+Y, \\ x/y \longrightarrow X-Y$$

これら演算を基本とする代数系は **max-plus 代数系** と呼ばれる. (残念ながら差 (-) に対応する演算は well-defined でない.) するとブール演算は以下の対応

$$\neg x \longrightarrow 1-x, \quad x \vee y \longrightarrow \max(x, y), \\ x \wedge y \longrightarrow \min(x, y)$$

より max-plus 代数系の記述で表現可能となり, しかも 0, 1 の 2 進演算が区分線形型の実数演算に自然な形で拡張される. このことより, 特に 2 進セルオートマトン(CA)について max-plus 代数系の観点から解の構造の研究が行われている [9][10].

また, 差分化・超離散化の過程を逆にたどることも工夫すれば可能であり, **逆超離散化** と呼ばれる操作として盛んに研究がなされている. たとえば排他的論理和で定義されるルール番号 90 の Elementary Cellular Automaton (ECA) は Sierpinski ガスケットのパターンを生成するが, これに逆超離散化を施して得られる偏微分方程式により, 類似パターンを再現したものが図6である.

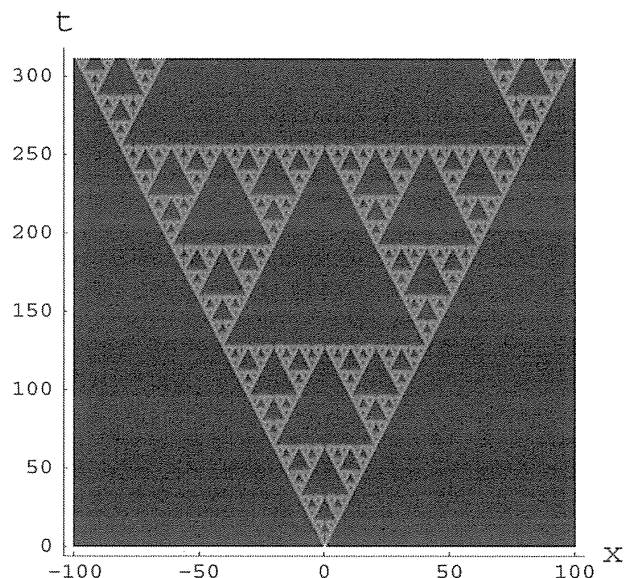


図6 ECA90 に対応する偏微分方程式の解 ([11]より引用)

4 交通渋滞モデルと ASEP

以下のように Burgers 方程式から差分化・超離散化を経て**超離散 Burgers 方程式**を得ることができる. [] で囲んだ項は自由に設定できる外力項である.

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} [+ \eta_x] \\ \xrightarrow{\text{差分化}} u_j^{n+1} = u_j^n \frac{u_{j+1}^n [+ \eta_{j+1}^n] + 1/u_j^n}{u_j^n [+ \eta_j^n] + 1/u_j^{n-1}} \\ \xrightarrow{\text{超離散化}} u_j^{n+1} = u_j^n + \min([\eta_j^n], u_{j-1}^n, 1-u_j^n) \\ - \min([\eta_{j+1}^n], u_j^n, 1-u_{j+1}^n)$$

どの方程式も Cole-Hopf 変換により微分, 差分, 超離散拡散方程式に帰着する. また, 超離散 Burgers 方程式は初期値やパラメータをうまく選べばルール番号 184 の ECA に帰着する. この ECA は交通流における自然渋滞発生のメカニズムを最も単純に表現しており, これに付随する研究も多い.

また, 外力項 η を確率変数に選ぶと車両の動きに確率を導入できる. このモデルと関連が深い

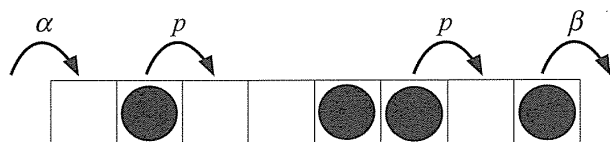


図7 開放境界条件での ASEP

のが非対称単純排他過程 (Asymmetric Simple Exclusion Process, ASEP) と呼ばれる統計モデルである。

ASEP は箱玉系と同じように横 1 列に並んだ箱とその中に入った適当な個数の玉を系の状態とする。開放境界条件の場合、確率 α で左端から玉が流入し、確率 β で右端から玉が流出する。また、確率 p で玉が右隣の空箱に移動する (図 7)。定常状態の流量は行列積の手法を用いて厳密に計算され、パラメータ α, β の値によって、自由相、渋滞相、最大流量相の 3 つの相が現れる [12]。また、周期境界条件の場合、流量を密度と p の関数として厳密に求めることができ、観測やシミュレーションから得られる基本図との比較も可能である。

箱玉系は可積分系を超離散化したものとして理解することができるが、ASEP も可積分系としての性質を数多く持っており、その数理的側面に関して現在活発に研究がなされている。

5 トロピカル幾何学

箱玉系は偏微分方程式を差分化そして超離散化したものと考えられるが、有限自由度ハミルトン系を離散・超離散化できれば、相空間における超離散的な力学系を得ることができる。

その 1 つの例として知られているのが超離散 Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 系である [3]。超離散 QRT 系のパラメータを適当に選ぶと

$$X_{n+1} = \max(0, X_n + 1) - X_{n-1}$$

という max-plus 方程式となるが、この方程式は保存量

$$\begin{cases} H(X_n, X_{n+1}) = C \\ H(X, Y) = \max(1 - X - Y, 2 - X, 2 - Y, \\ \quad 1 + X - Y, 1 - X + Y, X, Y) \end{cases}$$

を持つ。ただし、 C は初期条件 X_0, X_1 によって

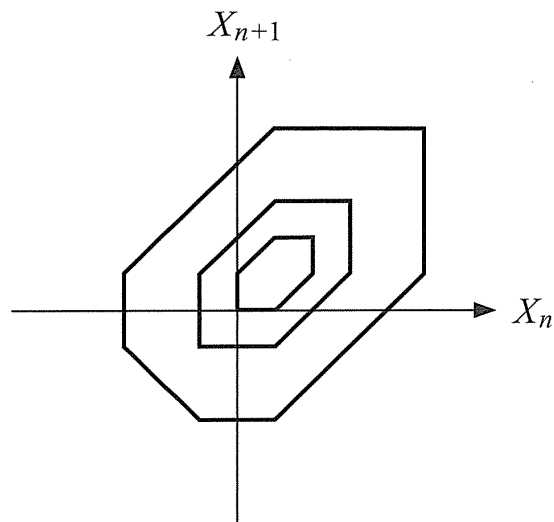


図8 超離散 QRT 系の解軌道

決まる定数である。図 8 はさまざまな初期値に対する解軌道の様子である。

上式は離散 QRT 系の保存量

$$h(x, y) = \frac{a}{xy} + \frac{1+a^2}{x} + \frac{1+a^2}{y} + \frac{ax}{y} + \frac{ay}{x} + x + y$$

を超離散化したものであるが、 $h(x, y) = c$ は楕円曲線と呼ばれる代数曲線であり、代数幾何学によってその代数的構造が詳細に調べられている。

$H(X, Y) = C$ のような超離散化された代数曲線を統一的に扱う手法として現在発展しているのがトロピカル幾何学 [13] である。トロピカル幾何学においては、通常多項式 $\sum_{i,j} a_{ij} x^i y^j$ の代わりに、max-plus 代数系で定義されるトロピカル多項式 $f = \max_{i,j} (a_{ij} + ix + jy)$ を考え、 f が微分不可能となる点の集合をトロピカル曲線とする。トロピカル曲線は代数曲線に類似の性質を持つことがわかってきているが、それらを応用して箱玉系などの超離散系の性質を調べる研究も行われている [14]。

6 その他の話題

6.1 感染症モデル

感染症モデルは病気の流行などの予測を行うためのたいへん重要な数理モデルである。初期の代表的なモデルとして、連立常微分方程式で表され

る Susceptible-Infectious-Recovered (SIR) モデル

$$\dot{S} = -aSI, \quad \dot{I} = aSI - bI, \quad \dot{R} = bI$$

がよく知られている。ここで、 $S(t), I(t), R(t)$ はそれぞれ時刻 t における感染可能な健康な人の割合、感染した人の割合、感染によって死亡した人もしくは免疫を獲得して回復した人の割合を表す。定数 a は S と I の積に比例する感染率、定数 b は一定の割合で I から R に移行する隔離率を表す。現在ではこの SIR モデル以外にも続々と新しいモデルが報告されており、数学としても興味深い題材を提供している。そしてその差分化や超離散化についてもいくつかの研究がなされており、たとえば文献[15]では差分化を経由して

$$\begin{cases} X_n = X_{n-1} + \max(0, Y_n - \gamma) \\ \quad - \max(0, Y_n) \\ Y_{n+1} = Y_n + \max(0, -\alpha, X_n) \\ \quad - \max(0, X_n - \beta) \end{cases}$$

という連立の max-plus 方程式を導き、初期値に対する解の漸近挙動を解析している。

6.2 可解力オス

ソリトン系とカオス系はそれぞれ可積分系、非可積分系の代表とも言えるが、可解系に限って解の観点から考えると、両者に共通の数学的構造がかいま見える。そして超離散化は可積分性を前提としない手法なので、**可解力オス**にも利用できることが実証された。たとえば文献[16]では、特別な場合にロジスティック写像を与える Schröder 写像

$$z_{n+1} = 4z_n(1-z_n)(1-k^2z_n)/(1-k^2z_n^2)^2$$

の超離散化を行って、区分線形型の写像

$$\begin{aligned} X_{n+1} = & X_n + \max(0, X_n) \\ & + \max(0, X_n - L) \\ & - 2 \max(0, 2X_n - L) \end{aligned} \quad (2)$$

を導いている。驚くべきことに、Schröder 写像

は可解であり楕円関数によって解が表せることから、超離散化を通じて(2)の厳密解も同時に得ている。また5節で述べたトロピカル幾何による(2)の解釈も述べられており興味深い。

参考文献

- [1] Takahashi, D. and Satsuma, J., A Soliton Cellular Automaton, J. Phys. Soc. Jpn., 59(1990), 3514-3519.
- [2] 高橋大輔, 箱と球でもソリトン系!, 日本物理学会誌, 48(1993), 37-40.
- [3] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.
- [4] 時弘哲治, 開かれた数学3 箱玉系の数理解, 朝倉書店, 2010.
- [5] Tokihiro, T., Takahashi, D., Matsukidaira, J. and Satsuma, J., From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure, Phys. Rev. Lett., 76(1996), 3247-3250.
- [6] Hirota, R. and Tsujimoto, S., Conserved Quantities of a Class of Nonlinear Difference-Difference Equations, J. Phys. Soc. Jpn., 64(1995), 3125-3127.
- [7] Matsukidaira, J., Satsuma, J., Takahashi, D., Tokihiro, T. and Torii, M., Totatype Cellular automaton and its N-Soliton solution, Phys. Lett. A, 225[4-6](1997), 287-295.
- [8] Takahashi, D. and Matsukidaira, J., Box and Ball System with a Carrier and Ultra-Discrete Modified KdV Equation, J. Phys. A, 30[21](1997), L733-739.
- [9] Takahashi, D., Matsukidaira, J., Hara, H. and Feng, B., Max-plus analysis on some binary particle systems, J. Phys. A : Math. Theor., 44(2011), 135102.
- [10] 池上貴俊, Elementary cellular automaton の初期値問題の max-plus 解析, 京都大学数理解析研究所講究録別冊 B, 30(2012), 223-241.
- [11] Kunishima, W., Nishiyama, A., Tanaka, H. and Tokihiro, T., Differential Equations for Creating Complex Cellular Automaton Patterns, J. Phys. Soc. Jpn., 73(2004), 2033-2036.
- [12] Blythe, R. A. and Evans, M. R., Nonequilibrium Steady States of Matrix Product Form: A Solver's Guide, J. Phys. A: Math. Theor., 40(2007), R333-R441.
- [13] Mikhalkin, G., What is ... a Tropical Curve?, Notice Amer. Math. Soc., 54[4](2007), 511-513.
- [14] Inoue, R. and Takenawa, T., Tropical Spectral Curves and Integrable Cellular Automata, Int. Math. Res. Not. IMRN 27 Art ID. Rnn019(2008), 27 pages.
- [15] Willox, R., Grammaticos, B., Carstea, A. S. and Ramani, A., Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models, Physica A, 328(2003), 13-22.
- [16] Kajiwara, K., Nobe, A. and Tsuda, T., Ultra-discretization of solvable onedimensional chaotic maps, J. Phys. A : Math. Theor., 41(2008), 395202.

[Abstract]

The box and ball system (BBS) is a pure soliton system and its all variables are digital. We give the

basic definition of BBS and review recent developments of research about BBS and related subjects; crystal bases, cellular automata, traffic congestion model, asymmetric simple exclusion process, tropical geometry, epidemic model and solvable chaos.