

MS

S

J

2012年度日本数学会年会

総合講演・企画特別講演
アブストラクト

期 日：3月26日－3月29日
会 場：東京理科大学神楽坂キャンパス



社団法人 日本数学会

総 合 講 演

3月27日(火) トッパンホール

日本数学会賞春季賞受賞者 (15:30～16:30)

塩 原 雅 顕 (東工大情報理工) ‡ 特異点をもつ曲面の微分幾何学 (16:45～17:45)

3月29日(木) 第II会場

木 昭 人 (東工大理工) ‡ Kähler-Einstein 計量と K-安定性 (13:00～14:00)

企 画 特 別 講 演

3月26日(月)

第I会場

望 月 拓 郎 (京大数理研) ‡ ホッジからツイスターへ — 調和バンドルとその周辺の話について — (13:00～14:00)

第II会場

小 磯 深 幸 (九大IMI) ‡ 等周問題型変分問題の幾何解析 (13:00～14:00)

第III会場

松 村 昭 孝 (天大情報理工) ‡ 粘性と熱伝導性を持つ理想気体の一次元運動の長時間挙動について (13:00～14:00)

第VI会場

箴 島 靖 文 (BNP) ‡ 証券取引: 計算ファイナンスの発展と実務への応用 (13:00～14:00)

3月28日(水)

第I会場 特別招待講演 (日本応用数学会)

高 橋 大 輔 (京大理工) ‡ 連続と離散のはざまにて (13:00～14:00)

第II会場

四 ッ 谷 晶 子 (龍谷大理工) ‡ 微分方程式の解の極限形状と大域的分岐構造 — 弾性曲線・交差拡散方程式系を例として — (13:00～14:00)

第III会場

吉 田 謙 一 (京大理工) ‡ 解析的振率と BCOV 予想 (13:00～14:00)

目 次

ページ

総 合 講 演：2012年度日本数学会賞春季賞受賞講演

「測度距離空間のリッチ曲率と熱流」・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1

太田 慎一（京都大学大学院理学研究科・准教授，理学博士）

空間の曲がり方についての研究をしています。一口に曲がり方と言っても色々な切り口があり、興味は尽きません。東北大で井関先生と塩谷先生に距離空間の幾何と解析を学び（三角形ばかり描いていました），青天の霹靂で京都に移ってからSturmらに影響を受けて最適輸送理論に手を出し，Sturmを訪ねてボン滞在中にフィンスラー幾何に手を広げ（ボンとフィンスラー幾何に関係はありません），今に至ります。先生や共同研究者に恵まれ，何とか研究を続けて来られました。今後も徐々に幅を広げて行きたいです。

総 合 講 演

「特異点をもつ曲面の微分幾何学」・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 15

梅原 雅顕（東京工業大学大学院情報理工学研究科・教授，博士（理学））

約20年前，山田光太郎氏（東工大）と3次元双曲型空間の平均曲率1の曲面についての研究を開始し，現在は，特異点を許すような平均曲率一定あるいはガウス曲率一定曲面についての研究を幅広く行っております。講演では，私の現在までの研究の軌跡と，最近，得られた特異点をもつ曲面および超曲面に関するいくつかの興味深い結果について紹介したいと思います。

「Kähler-Einstein 計量とK-安定性」・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 27

二木 昭人（東京工業大学大学院理工学研究科・教授，理学博士）

2008年3月の近畿大学での年会で企画特別講演の機会をいただき，「Einstein計量とGIT安定性という題で講演させていただきました。さらに2009年9月の大阪大学での秋季総分科会では，総合講演の機会をいただき「Kählerおよび佐々木・Einstein多様体に関する最近の進展」という題で講演させていただきました。どちらの時も今度が一生に一度の晴れ舞台と思って講演したため，すでに出し尽くした感がありますが，今回のあらためてKähler-Einstein計量の存在問題に立ち返り，最近のK安定性の研究の進展に重点を置き，関連する諸結果を紹介しようと思います。

なお，昨秋の秋季総分科会におきましては秋季賞を受賞させていただきながら，授賞式を欠席したことを，この場を借りてお詫び致します。北京の清華大学に1ヶ月出張することがずいぶん前から決まっていたし，大震災で年会が中止になり，多くの人が楽しみにしていた総合講演が中止になったことでもありますので，私の総合講演を半年遅れにして中止になった総合講演を順延して行えば好都合であろうと考えました。

企画特別講演

「ホッジからツイスターへー調和バンドルとその周辺の話についてー」・・・・・・・・・・ 41

望月 拓郎（京都大学数理解析研究所・准教授，博士（理学））

失敗ばかりしてきました。何をしたら良いのか迷ってばかりいます。それでもなお図々しく生きていくのであるなと思うのです。

「等周問題型変分問題の幾何解析」・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 51

小磯 深幸（九州大学マス・フォア・インダストリ研究所院・教授，博士（理学））

大学3年生の時に函数論の美しさに魅せられ，大学院まで進むことになりました。現在は，函数論に限らずさまざまな解析学的方法を用いて，主として曲面の変分問題を研究しています。解析学の一般論がそのままでは適用できないところを，問題の幾何学的性質を利用して解決できることがあり，興味深く思います。3年程前から，付加条件付き変分問題の解の分岐と安定性について研究しています。この研究を通じて，異なる分野の方々との交流の機会を持つことができました。今後は，広い視野と深い研究を目指して精進したいと思います。

「粘性と熱伝導性を持つ理想気体の一次元運動の長時間挙動について」・・・・・・・・・・ 6 3

松村 昭孝（大阪大学大学院情報科学研究科・教授，工学博士）

粘性気体の方程式系（より一般的には粘性保存則系）の時間大域解の存在とその長時間挙動について研究を始めて、早いもので25年以上になる。切っ掛けは、80,81年に Wisconsin Madison の MRC(Mathematics Research Center: Army Research Office がパトロンだったが、残念ながら数年後にはたたまれてしまった)に滞在していた時、ポストドク仲間だったD.Wagnerと、当時話題となっていた粘性保存則系に対する進行波の漸近安定性を一緒に考えようとしたことからだった。以後、海外との競争が始まったのだが、私達は主として独自のエネルギー法を工夫して、早稲田大・西原や九大・川島等との共同研究（最近是中国の研究者とも共同研究）により研究を進めてきた。最近の海外のグループによるスペクトル解析の手法や近似グリーン関数による各点評価の手法等は、還暦も過ぎた身にはあまりに煩雑に感ぜられ、ぼつぼつ楽しみながら我々流のやり方で研究が続けられたらと思っている。

「計算ファイナンスの発展と実務への応用」・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 7 3

箴島 靖文（BNPパリバ証券，クオントリサーチ部長，博士（数理科学））

大学院の修士までは、微分幾何学やゲージ理論を専攻し、銀行に入ってから確率解析やファイナンスを学びました。もう2度と Christoffel symbol を使うことはないかと思っていましたが、再度、しかも実務の世界で出会ったときには、少なからぬ感動を覚えました。ファイナンスの世界には、確率論だけでなく様々な数学が応用されます。C/C++のプログラムを組んだり、出てくる数値計算結果の検証、大量のポートフォリオのリスク分析、その安定性の検証等々、いろいろな場面で数理的能力が要求されます。私自身は、マリアバン解析を用いた漸近展開の研究を続けており、その実務への応用を探っています。

（特別招待講演（日本応用数学会））

「連続と離散のはざまにて」・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 8 5

高橋 大輔（早稲田大学理工学術院・教授，工学博士）

昔、差分方程式についてあれこれ考えていたとき、友達に「数列をやってます」と言うのと、「高校で習ったじゃない、簡単なことをやってるのね」と言われたことがあります。今では数列どころか0と1のデジタル系が相手ですので、その友達に出会うことがあれば「超簡単なことをやってるのね」と言われそうです。う〜む、囲碁のルールは簡単でも囲碁で勝つのは難しいのになあ。調べれば調べるほどデジタルも味があり、この超簡単なものを一生の友にしようと腹をくくっています。

「微分方程式の解の極限形状と大域的分岐構造—弾性曲線・交差拡散方程式系を例として—」

・・ 9 5

四ツ谷晶二（龍谷大学理工学部・教授，理学博士）

修士過程では非線形半群理論（劣微分の理論），博士課程では自由境界問題（ステファン問題）。就職してから非線形楕円型方程式（松隈方程式），交差拡散方程式，面積制約平面弾性曲線の問題，線形化固有値問題の解表示と極限形状問題と，運よく美しい方程式や問題達とめぐり逢いました。その途中でいくつかの奥の深い方程式とも出会いました。

自分一人では何もできません。その背後の一つひとつに新しい出会いがありました。共同研究者の皆さんのおかげで楽しく数学を続けています。いつも感謝しています。

2000年ごろには、交差拡散方程式の極限方程式の問題が超越方程式に帰着されるのに気づきましたが、その完全な解明方法を見つけたのは2010年です。完全楕円積分を含む超越方程式の実数解を調べるには、ガウスの古典的結果、グレンナー基底、スツルムの定理を組み合わせればよいと気づくのに約10年かかったからです。数学は一つであると実感しています。

現在の最大の関心事は、交差拡散方程式の定常解の安定性です。特別な場合ですが、高次元の場合も含め、ようやく漸近安定な解の存在・一意性の証明がみつかりました。これを端緒に研究が進んでいくことを期待しています。

「解析的振率とBCOV予想」・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 1 0 7

吉川 謙一（京都大学理学部・教授，博士（理学））

大学院修士1年の頃、解析的振率に出会い、それ以降ずっと解析的振率を研究の中心に据えてきました。解析的振率は簡単な概念ですが、予想外に様々な数学と関連している事に驚かされ、様々な側面を持つ事に面白さを感じます。今回はその様な現象の一つを紹介したいと思います。

連続と離散のはざまにて

高橋 大輔 (早稲田大学)*

1. はじめに

ソリトン理論の現在までの進展は、離散化の歩みとともにあった。Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

を代表とする一群の偏微分ソリトン方程式は、1960年代に逆散乱法やLax形式によって体系づけられるが、この頃にすでに戸田方程式

$$\ddot{u}_j = e^{u_{j+1}} - 2e^{u_j} + e^{u_{j-1}}$$

という微差分ソリトン方程式が発見されている[1]。さらに、1970年代以降は差分戸田方程式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} \\ = \log(1 + \delta^2(e^{u_{j+1}^n} - 1)) - 2\log(1 + \delta^2(e^{u_j^n} - 1)) + \log(1 + \delta^2(e^{u_{j-1}^n} - 1)) \end{aligned}$$

など、それまでの微分、微差分ソリトン方程式の完全差分版が次々と報告される。そして1990年代に従属変数（状態変数）まで離散化された超離散ソリトン方程式が登場する。たとえば上の戸田方程式の超離散版は

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \max(0, u_{j+1}^n - 1) - 2\max(0, u_j^n - 1) + \max(0, u_{j-1}^n - 1)$$

である[2]。

現在のソリトン理論においては、対象となる方程式が連続か離散かということよりも、解や保存量がどのようなメカニズムに支配されているかが大事であり、その連続あるいは離散の実現が微分、差分、超離散方程式であるにすぎない。

本講演ではこのようなソリトン方程式に則した事情を詳しく解説しないが、重要な点は、方程式による連続、離散の実現で、同じメカニズムを表現しているものがあつたという事実である。このようなことはもっと普遍的なのではないだろうか。そこで講演では、差分化や超離散化を通じて系が同じメカニズムを共有している例をいろいろ紹介する。

ただし、そのようなことを議論する際に問題となるのは、何をもって同じメカニズムと考えるかという点である。ここでは、解、保存量、線形性など、方程式が持っている特徴を共有し、極限あるいは基本演算の置き換えを通じて方程式とその特徴がセットで行き来可能な連続、離散方程式の対応を想定する。そして、このような特徴の一般的な呼び名として「構造」という言葉を用いることにする。

2. 超離散化

方程式を記述する変数は、独立変数と従属変数がある。方程式を考える際には、たいていの場合それぞれの変数が連続値を取るのか離散値を取るのかが定まっていること

* 〒187-0022 東京都新宿区大久保3-4-1 早稲田大学 理工学術院

がほとんどである。微分，差分，超離散方程式について，各変数の典型的な離散度合いを表にしたものを以下に示す。これら以外にも連立常微分方程式やセルオートマトンなど，いろいろなタイプの方程式が存在するがそれらについては省略する。

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式
独立変数	連続	離散（一部連続）	離散
従属変数	連続	連続	離散（連続）

超離散化について簡単に説明する [3]。まず，方程式の変数や定数に対して $x = e^{X/\varepsilon}$ 型の変数変換を施し， $\varepsilon \rightarrow +0$ 型の極限を取って得られる極限方程式のことを超離散方程式と呼び，その手続き全体を超離散化と呼ぶ。たとえば

$$x_{j+1} = \frac{1 + cx_j}{x_j^2}$$

という差分方程式（漸化式）を考える。 x, c は非負の実数とする。これに

$$x_j = e^{X_j/\varepsilon}, \quad c = e^{C/\varepsilon}$$

という変換を行うと

$$X_{j+1} = \varepsilon \log(1 + e^{(X_j+C)/\varepsilon}) - 2X_j$$

という方程式が得られる。さらに $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をほどこすと

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B)$$

という公式より

$$X_{j+1} = \max(0, X_j + C) - 2X_j$$

という区分線形型の超離散方程式が得られる。 X や C は実数とみなしても構わないが，もし X の初期値および C が整数なら，任意の X_j は整数となる。整数で閉じた解にとりわけ意味がある場合，上の手続きをもって従属変数の離散化が可能となったとみなすのが超離散化の考え方である。

$z = x + y$, $z = x - y$, $z = x \cdot y$, $z = x/y$ のそれぞれに対して $x = e^{X/\varepsilon}$ 型の変換と $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をほどこすと以下ようになる。

$$\begin{array}{ll} z = x + y & \rightarrow Z = \max(X, Y) \\ z = x \cdot y & \rightarrow Z = X + Y \end{array} \quad \begin{array}{ll} z = x - y & \rightarrow \text{not well-defined} \\ z = x/y & \rightarrow Z = X - Y \end{array}$$

すなわち超離散化は和，積，商をそれぞれ $\max$, $+$, $-$ に置き換える演算の変更とみなすことができる。このような基本演算が提供する代数的構造を $\max$ -plus 代数と呼ぶ [4]。

3. 構造を共有する連続離散対応

構造を共有する連続離散対応とはどのようなものかを説明するため，Burgers 方程式を取り上げてみよう。まず差分 Burgers 方程式は差分 Cole-Hopf 変換を通じて差分拡散方程式と以下の関係にある [3, 5]。

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j^{n+1} = u_j^n \frac{u_{j+1}^n + 1/u_j^n}{u_j^n + 1/u_{j-1}^n} & (\text{差分 Burgers 方程式}) \\ \updownarrow & u_j^n = f_j^n / f_{j-1}^n \quad (\text{差分 Cole-Hopf 変換}) \\ f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) & (\text{差分拡散方程式}) \end{array} \right. \quad (1)$$

連続極限

$$u_j^n = e^{\Delta x \cdot u(j\Delta x, n\Delta t)}, \quad f_j^n = f(j\Delta x, n\Delta t), \quad \Delta t = \Delta x^2/2, \quad \Delta x \rightarrow 0$$

により, (1) は以下の微分方程式の系に帰着する.

$$\begin{cases} u_t = 2uu_x + u_{xx} & (\text{Burgers 方程式}) \\ \updownarrow \quad u(x, t) = (\log f(x, t))_x & (\text{Cole-Hopf 変換}) \\ f_t = f_{xx} & (\text{拡散方程式}) \end{cases}$$

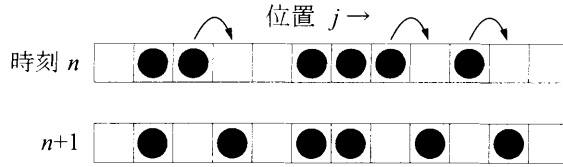
さらに, 超離散極限

$$u_j^n = e^{(U_j^n - 1/2)/\varepsilon}, \quad f_j^n = e^{F_j^n/\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0 \quad (2)$$

により, (1) は以下の超離散方程式の系に帰着する.

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n) & (\text{超離散 Burgers 方程式}) \\ \updownarrow \quad U_j^n = F_j^n - F_{j-1}^n + 1/2 & (\text{超離散 Cole-Hopf 変換}) \\ F_j^{n+1} = \max(F_{j-1}^n, F_{j+1}^n) & (\text{超離散 拡散方程式}) \end{cases}$$

U, F の方程式は区分線形型の差分方程式とみなすこともできるが, U の初期値を 0, 1 に限定すると, U は常に 0, 1 のどちらかの値しかとらない. このように独立変数が離散で, 従属変数の値の集合 (値域) が有限集合となるようなものをセルオートマトン (Cellular Automaton, CA) という. しかも, 1 を粒子, 0 を真空とし, U_j^n を位置 j , 時刻 n での粒子の個数と想定することで, U の方程式は以下のような粒子の運動を表している.



各粒子は, 右側が空いていればそこに移動し,
右側に粒子がいればその場にとどまる

上の差分, 超離散方程式は, 微分方程式の近似スキームとしての差分方程式や, 微分方程式の解の挙動を模している粒子モデルとどこが違うのであろうか. この Burgers 方程式の場合は, 「線形化可能」という構造を共有している点が他と異なる. すなわち Cole-Hopf 変換によって線形の拡散方程式に帰着するので, 重ね合わせ可能な解を有している. たとえば 2 段衝撃波に相当する解は, それぞれの拡散方程式の解

$$\text{微分: } f(x, t) = 1 + \exp(k_1 x + k_1^2 t + c_1) + \exp(k_2 x + k_2^2 t + c_2)$$

$$\text{差分: } f_j^n = 1 + \exp(k_1 j + (\cosh k_1)n + c_1) + \exp(k_2 j + (\cosh k_2)n + c_2)$$

$$\text{超離散: } F_j^n = \max(0, K_1 j + |K_1|n + C_1, K_2 j + |K_2|n + C_2)$$

から Cole-Hopf 変換を通じて生成できる.

なお(1)の差分 Burgers 方程式は、数値計算に用いるスキームとしてはそれほど精度が高くなく、 $O(\Delta x^2)$ である。この程度であるなら、たとえば

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{2\Delta x}((u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2) + \frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

のような通常の差分化を改良した方が精度のよいものができる。このように、どのような立場から連続離散対応を考えるかによって得られる式が大きく異なる。本講演で扱う離散方程式については、近似精度を第一の目標とせず、構造の共有に重点を置いたものとなっている。

4. ソリトン系

ソリトン系として最初に見つかった CA は箱玉系と呼ばれ、偏微分ソリトン方程式である KdV 方程式と以下の関係を通じて関連している [3, 6]。LV 方程式とは Lotka–Volterra 方程式の略である。

$$\text{偏微分: } u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (\text{KdV 方程式})$$

↑ 空間変数 j の連続極限

$$\text{微差分: } \frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) \quad (\text{LV 方程式})$$

↑ 時間変数 n の連続極限

$$\text{差分: } \frac{1}{\delta}(u_j^{n+1} - u_j^n) = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1} \quad (\text{差分 LV 方程式})$$

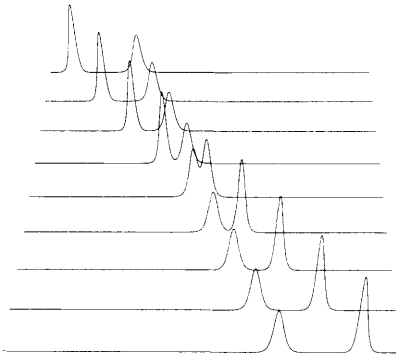
↓ 従属変数 u の超離散極限

$$\text{超離散: } U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0, U_{j-1}^n - 1) - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1) \quad (\text{超離散 LV 方程式})$$

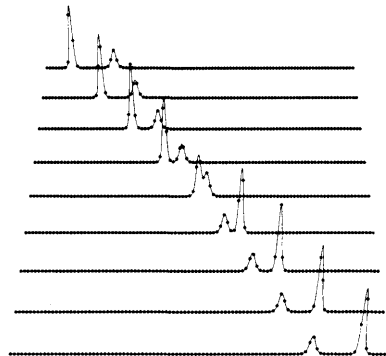
↓ 従属変数 U から B への書き換え

$$\text{CA: } B_j^{n+1} = \min\left(1 - B_j^n, \sum_{k=-\infty}^{j-1} (B_k^n - B_k^{n+1})\right) \quad (\text{箱玉系})$$

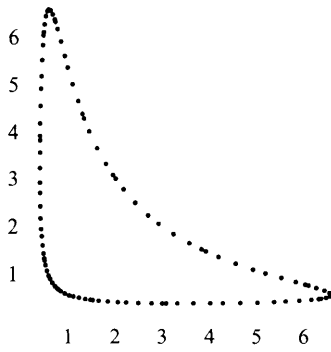
どの方程式も広田の双線形化法により双線形方程式を導くことができ、 N ソリトン解の摂動形式や行列式形式、可算無限個の保存量など、ソリトン系として必要な性質はすべて共有しており、それら方程式や量の表現についても上の図式の連続極限や超離散極限によって相互に変換可能である [7, 8]。



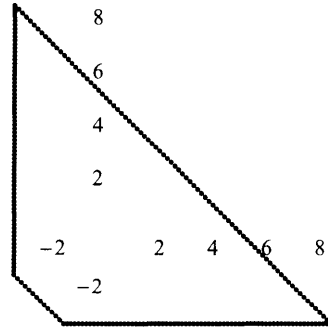
KdV 方程式



差分 LV 方程式



(3) の解 ($\alpha = 1, \beta = 2$)



(4) の解 ($A = 0, B = 11/7$)

右の図で相平面内の解の点 (X_{n-1}, X_n) は $H(X_{n-1}, X_n) = \text{const.}$ で表される多角形上を動く。この多角形および解の挙動をトロピカル楕円曲線によって捉える研究が最近活発に行われている [11]。

6. リャプノフ関数とアトラクタ

今までのすべての例は可積分系に属するかそれに近いものであった。連続、差分、超離散の対応が可積分系だけにとどまるのであれば、特殊な系で成り立つ珍しいサンプルを提供しているに過ぎない。しかしながら、非可積分の領域でもこのような例が次々と見つかっており、この節以降ではそれらについて紹介する。ここで問題となるのは、非可積分系では可積分系ほど明示的な構造を示すことが難しく、連続離散対応において何をもって構造の共有とするのかがあいまいになるという点である。そこで、方程式の連続、超離散極限だけでなく、解にまつわる何らかの性質が共有されていることを示せるもの限定して例を紹介する。

まず、前節の QRT 系に修正を施した以下の離散写像を考える [12]。

$$x_{n+1} = \frac{g_1(x_n)}{x_{n-1}g_3(x_n)} \cdot \frac{h_\infty g_1(x_n) + h(x_{n-1}, x_n)x_{n-1}^2g_3(x_n) + \beta_n}{h(x_{n-1}, x_n)g_1(x_n) + h_\infty x_{n-1}^2g_3(x_n) + \beta_n} \quad (5)$$

ここで

$$h(x, y) = \frac{1}{xy} (a_{00}x^2y^2 + a_{01}(x+y) + a_{02}(x^2+y^2) + a_{11}xy + a_{12}(x+y) + a_{22}),$$

$$g_1(x) = a_{02}x^2 + a_{12}x + a_{22}, \quad g_3(x) = a_{00}x^2 + a_{01}x + a_{02},$$

$$\beta_n > 0, \quad a_{ij}, h_\infty : \text{正の定数}$$

とする。元の QRT 系では保存量であった $h(x_{n-1}, x_n)$ は (5) では n に対して単調な Lyapunov 関数となる。

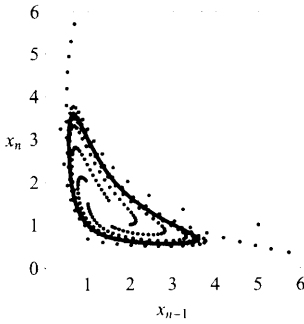
(5) は Lyapunov 関数とともに連続極限をとることができる。これによって得られた微分方程式と Lyapunov 関数は次式となる。

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{c_{02}} (-c_{00}e^{2x} - c_{01}e^x + c_{12}e^{-x} + c_{22}e^{-2x}) - 2c_{02}\tilde{\beta}e^{2x}(\tilde{h}(x, \dot{x}) - \tilde{h}_\infty)\dot{x}, \\ \tilde{h}(x, y) = c_{02}y^2 + c_{00}e^{2x} + 2c_{01}e^x + c_{11} + 2c_{12}e^{-x} + c_{22}e^{-2x} \end{cases} \quad (6)$$

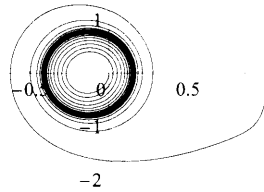
さらに (5) と Lyapunov 関数の超離散化も可能であり、次式で与えられる.

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{n+1} = G_1(X_n) - X_{n-1} - G_3(X_n) \\ \quad + \max(H_\infty + G_1(X_n), H(X_{n-1}, X_n) + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n) \\ \quad - \max(H(X_{n-1}, X_n) + G_1(X_n), H_\infty + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n), \\ H(X, Y) = \max(A_{00} + 2X + 2Y, A_{01} + X + Y + \max(X, Y), A_{02} + 2\max(X, Y), \\ \quad A_{11} + X + Y, A_{12} + \max(X, Y), A_{22}) - X - Y, \\ G_1(X) = \max(A_{02} + 2X, A_{12} + X, A_{22}), \quad G_3(X) = \max(A_{00} + 2X, A_{01} + X, A_{02}) \end{array} \right. \quad (7)$$

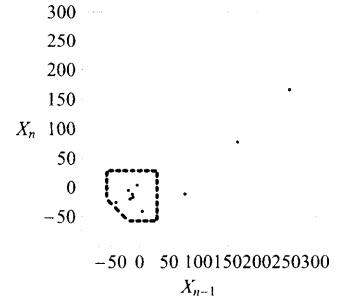
以上の3つの系について、アトラクタの外側と内側から解軌道を描いたものを以下に示す.



(5) の解軌道 (差分)



(6) の解軌道 (微分)



(7) の解軌道 (超離散)

アトラクタを有する写像力学系の連続離散対応の他の例として、伝染病の流行を記述する以下の微分, 差分, 超離散 SIR モデルが報告されている [13].

$$\text{微分: } \dot{S} = -rSI, \quad \dot{I} = rSI - sI, \quad \dot{R} = sI,$$

$$\text{差分: } \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1 + cy_n}{1 + y_n}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a + x_n}{1 + bx_n},$$

$$\text{超離散: } \begin{cases} X_n = X_{n-1} + \max(0, Y_n - \gamma) - \max(0, Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \max(-\alpha, X_n) - \max(0, X_n - \beta) \end{cases}$$

7. カオス力学系

可解なカオス力学系において解のレベルで差分, 超離散の対応が得られた例がある [14]. Schröder 写像と呼ばれる以下の離散写像を考える.

$$z_{n+1} = \frac{4z_n(1 - z_n)(1 - k^2 z_n)}{(1 - k^2 z_n^2)^2} \quad (0 \leq k \leq 1)$$

この写像には, k を母数とする Jacobi の楕円関数で記述される解

$$z_n = \text{sn}^2(2^n u_0; k)$$

が存在する. この方程式の超離散化は, 変換

$$z_n/(1 - z_n) = e^{X_n/\varepsilon}, \quad \sqrt{1 - k^2} = e^{-1/2\varepsilon}, \quad \varepsilon \rightarrow +0$$

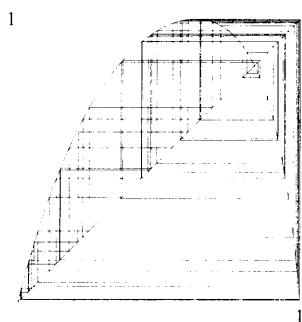
によって得られ、実質的な部分を残すとテント写像

$$X_{n+1} = 1 - 2 \left| X_n - \frac{1}{2} \right|$$

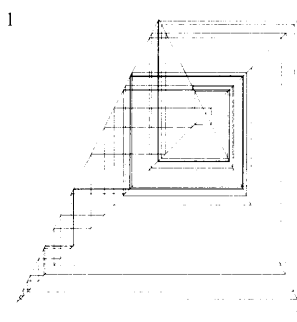
が導かれる。解については、5 節の QRT 系の場合と同様に楕円テータ関数の超離散化により、小数部分を表す演算 $\{\cdot\}$ を用いて

$$X_n = 1 - 2 \left| \{2^n \nu_0\} - \frac{1}{2} \right|$$

となる。それぞれの写像の解の様子を以下に示す。



Schröder 写像



テント写像

8. 負の問題

超離散化において減法に相当する演算はうまく定義できなかった。このことから差分方程式に引き算が含まれていたり、解の符号が途中で変わったりすると超離散化ができないことが多い。しかしながらこれをうまく回避するテクニックも存在する。たとえば前節のカオス力学系における変換 $z_n/(1 - z_n) = e^{X_n/\varepsilon}$ もこれにあたる。その他に、最適速度モデルと呼ばれる交通渋滞モデル

$$\ddot{x}_k = A\{V(x_{k+1} - x_k) - \dot{x}_k\}$$

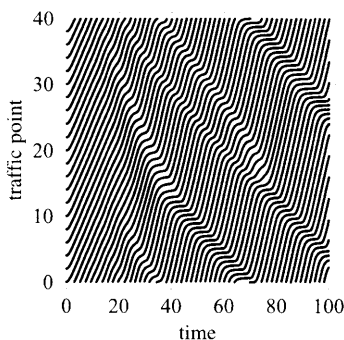
の時間変数の差分化を工夫して

$$x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} = A\{\log(1 + \delta^2 V(x_{k+1}^n - x_k^n)) - \log(1 + \delta(e^{x_k^n - x_k^{n-1}} - 1))\} \quad (8)$$

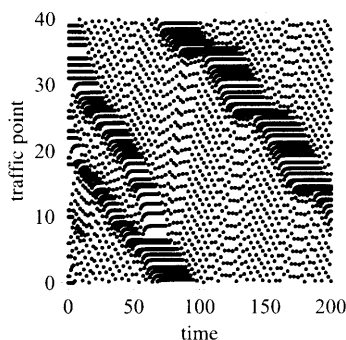
とし、最終的に

$$x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} = A\{V(x_{k+1}^n - x_k^n) - \max(0, x_k^n - x_k^{n-1})\} \quad (9)$$

という超離散方程式を導いた例がある [15]。以下に (8) と (9) の解の例を示す。



(8) の解



(9) の解

このような工夫は現在もいろいろ試みられており、反応拡散方程式の超離散化などが報告されている [16].

9. セルオートマトンの束論

今までのような連続系と離散系の対応を考えるには、解や保存量などの構造の共有が重要である。その際には、それぞれの系での基本演算を用いた解の証明や公式の提示が必要となる。ところが、離散側、特にデジタル系においてこのための数学が不足している。方程式を解いて解を表現しようにも、その表現方法が非常に少ないのである。

そこで最近、セルオートマトン(CA)でこのような数学を構築する試みが行われている [17, 18]. たとえば2進のブール代数の OR ($x \vee y$), AND ($x \wedge y$), NOT ($\neg x$) を用いた Elementary CA (ECA) のひとつに以下のものがある。

$$u_j^{n+1} = (\neg u_{j-1}^n \vee u_{j+1}^n) \wedge u_j^n$$

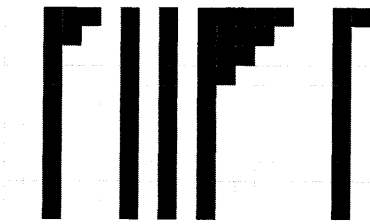
この方程式を max-plus 代数で翻訳すると、たとえば

$$u_j^{n+1} = \min(\max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \quad (10)$$

と表せる。 $n = 0$ を初期時刻とした初期値問題を考えると、解は

$$\begin{aligned} u_j^n = \min(& \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, \dots, 1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0), \\ & \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, \dots, 1 - u_{j+n-3}^0, u_{j+n-1}^0), \dots, \\ & \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, u_{j+2}^0), \max(1 - u_{j-1}^0, u_{j+1}^0) \cdot u_j^0) \end{aligned} \quad (11)$$

となる。実は (10) と (11) のセットは、 u を 0, 1 に限定せず実数としても成り立つ。以下に 0, 1 に限定した解と限定しない解の例をそれぞれ示す。



0, 1 に限定した解

0.3	2.3	2.2	3.0	2.5	0.1	1.9	0.8	1.4	2.3	1.3
0.3	2.2	2.2	2.5	0.1	0.1	0.9	0.8	1.4	1.3	0.3
0.3	2.2	2.2	0.1	0.1	0.1	0.9	0.8	1.3	0.3	0.3
0.3	2.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.8	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3

0, 1 に限定しない解

(10) と (11) のような表現で与えられる方程式と解のセットは、ECA だけでも数多く存在している。また、証明に使われる基本演算や公式は、もっと一般的な束に昇華することが可能であり、方程式の初期値問題を束の立場から議論する試みが開始している。2 進のデジタル系から垣間見ることのできるデジタル方程式の解法は広大なものがあり、微分方程式や差分方程式と並立しうる豊かなものであるというのが印象である。

10. おわりに

可積分系分野における微分、差分、超離散の対応関係については、トロピカル幾何や結晶基底と関連しつつ、その広大で深い数理構造を解明する研究が活発に行われている [19]. それと同時に、対象をもっと一般の非線形系に拡張してこのような対応を探索する試みも盛んに行われている。両者の研究において共通するのは、連続と離散は表裏一体のものであるという思想である。この考えを推し進めるための数学は、特に離散の側に不足しており、今後の発展に期待したい。

参考文献

- [1] 戸田盛和, “非線形波動とソリトン 新版”, 日本評論社 (2000).
- [2] J.Matsukidaira, J.Satsuma, D.Takahashi, T.Tokihiro and M. Torii, “Toda-type cellular automaton and its N -soliton solution”, *Phys. Lett. A* **225** (1997) 287–295.
- [3] 広田良吾・高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版 (2003).
- [4] 潮俊光, “ペトリネットと max-plus 代数”, *数理科学* **435** (1999) 45–50.
- [5] K.Nishinari and D.Takahashi, “Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** (1998) 5439–5450.
- [6] 時弘哲治, “開かれた数学3 箱玉系の数理”, 朝倉書店 (2010).
- [7] D.Takahashi and R.Hirota, “Ultradiscrete soliton solution of permanent type”, *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 104007 (6pp).
- [8] H.Nagai and D.Takahashi, “Ultradiscrete Plücker relation specialized for soliton solutions”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 095202 (18pp).
- [9] G.R.W.Quispel, J.A.G.Roberts and C.T.Thompson, “Integrable mappings and soliton equations II”, *Physica D* **34** (1989) 183–192.
- [10] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta and A. Ramani, “Constructing solutions to the ultra-discrete Painlevé equations”, *J. Phys. A: Math. Gen.* **30** (1997) 7953–7966.
- [11] A.Nobe, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 125205 (12pp).
- [12] H.Inoue, D.Takahashi and J.Matsukidaira, “Discrete mappings with an explicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings”, *Physica D* **217** (2006) 22–30.
- [13] R.Willox, B.Grammaticos, A.S.Carstea and A. Ramani, “Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models”, *Physica A* **328** (2003) 13–22.
- [14] K.Kajiwar, A.Nobe and T.Tsuda, “Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 395202 (13pp).
- [15] D.Takahashi and J.Matsukidaira, “On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives”, *JSIAM Letters* **1** (2009) 1–4.
- [16] 村田実貴生, “超離散反応拡散系”, 研究集会「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」, 九州大学応用力学研究所 (2011).
- [17] D.Takahashi, J.Matsukidaira, H.Hara and B.Feng, “Max-plus analysis on some binary particle systems”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 135102 (21pp).
- [18] 池上貴俊, “Elementary cellular automaton の初期値問題の max-plus 解析”, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 投稿中.
- [19] R.Inoue, A.Kuniba and T. Takagi, “Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry”, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** (2012) 073001 (64pp).