超離散ソリトン系における行列式解

長井　秀友

早稲田大学基幹理工学部

青山数理セミナー
2009 年 12 月 15 日

自己紹介

履歴

2000年4月 〜2005年3月	早稲田大学理工学部数理科学科
2005年4月 〜2007年3月	早稲田大学大学院理工学研究科数理科学専攻

2007年4月〜	早稲田大学院基幹理工学研究科 数学応用数理専攻（高橋大輔研究室）
2009年10月〜	早稲田大学基幹理工学部応用数理学科助手
2009年10月〜	青山学院大学客員研究員

自己紹介

学位論文：ある離散可積分系の解の数理構造について

第１章　序論
第２章　可積分離散写像の高階化
第３章　超離散 mKdV 方程式と超離散戸田方程式
第４章　一般化超離散ソリトン解
第５章　条件付き超離散 Plücker 関係式
第６章　まとめ

自己紹介

学位論文：ある離散可積分系の解の数理構造について

第１章　序論
第２章　可積分離散写像の高階化
第３章　超離散 mKdV 方程式と超離散戸田方程式
第４章　一般化超離散ソリトン解
第５章　条件付き超離散 Plücker 関係式
第６章　まとめ

アウトライン

1. 研究の背景
   1.1 ソリトン小史
   1.2 微分・離散ソリトン系の解表現
   1.3 超離散化，負の問題
2. 超離散ソリトン系における行列式解
   2.1 超離散パーマネント形式解
   2.2 超離散パーマネント解を用いた証明
   2.3 摂動形式解を用いた証明

1 研究の背景

本研究に関連するソリトン小史

19 世紀	孤立波の発見
1950〜60 年代	・計算機実験を用いた非線形格子における再帰現象の発見
	・ソリトンの再発見
	→ 様々なソリトン方程式の提出
	・逆散乱法の発明
1970 年代	・「広田の方法」による双線形形式，多ソリトン解の提出
	・離散ソリトン方程式の提出
1980 年前後	佐藤理論の確立
	→ ソリトン理論の統一的理論，代数解析への発展
1990 年代	超離散ソリトンの発見

⋮

1-2 微分・離散ソリトン方程式

ソリトン方程式はソリトン解をもつ非線形微分，または差分方程式の総称（和達三樹，非線形波動，岩波書店 (1992)）．

微分ソリトン方程式の例

- KdV 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \qquad (u = u(x,t))$$

- mKdV 方程式

$$u_t + 6u^2u_x + u_{xxx} = 0 \qquad (u = u(x,t))$$

- KP 方程式

$$(4u_t - 12uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} = 0 \qquad (u = u(x,y,t))$$

- 戸田格子方程式

$$\frac{d^2}{dt^2}\log(1 + V_n) = V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1} \qquad (V_n = V_n(t))$$

離散ソリトン方程式

離散ソリトン方程式は微分ソリトン方程式の持つ保存量や，ソリトン解などの特徴を保持したまま差分化された方程式．

KdV 方程式（双線形形式）

$$3f_{xx}^2 - f_x f_t - 4f_x f_{3x} + ff_{tx} + ff_{4x} = 0$$

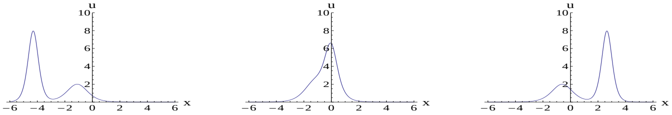
離散 KdV 方程式（双線形形式）

$$F_{i+1}^{n+1} F_i^{n-1} = (1-\delta) F_{i+1}^n F_i^n + \delta F_{i+1}^{n-1} F_i^{n+1}$$

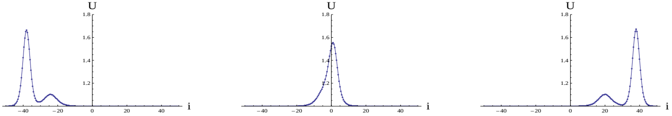
ここで n, i はそれぞれ時間，空間変数，δ は差分間隔を表す．

微分・離散ソリトン解

微分・離散ソリトン方程式はどちらもソリトン解を持つ．
例：KdV 方程式の 2 ソリトン解



微分 KdV 方程式．変数変換 $u(x,t) = 2(\log f(x,t))_{xx}$



離散 KdV 方程式．変数変換 $U_i^n = F_i^{n+1} F_{i+1}^n / (F_i^n F_{i+1}^{n+1})$

微分，離散ソリトン方程式の対応

微分，離散ソリトン方程式は同様の構造を持っており，摂動形式，行列式形式の解表現を持つ．

	微分ソリトン方程式	離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	摂動形式解
解表現 2	ロンスキー行列式解	カソラチ行列式解

方程式

KdV 方程式（双線形形式）

$$3f_{xx}^2 - f_x f_t - 4f_x f_{3x} + ff_{tx} + ff_{4x} = 0$$

離散 KdV 方程式（双線形形式）

$$F_{i+1}^{n+1}F_i^{n-1} = (1-\delta)F_{i+1}^{n}F_i^{n} + \delta F_{i+1}^{n-1}F_i^{n+1}$$

微分，離散ソリトン方程式の対応

微分，離散ソリトン方程式は同様の構造を持っており，摂動形式，行列式形式の解表現を持つ．

	微分ソリトン方程式	離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	摂動形式解
解表現 2	ロンスキー行列式解	カソラチ行列式解

解表現1，摂動形式解

（微分）ソリトン解（2 ソリトン解）

$$f(x,t) = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2} \qquad (\eta_j = \eta_j(x,t))$$

離散ソリトン解（2 ソリトン解）

$$F_i^n = 1 + e^{\bar{\eta}_1} + e^{\bar{\eta}_2} + \bar{A}_{12}e^{\bar{\eta}_1+\bar{\eta}_2} \qquad (\bar{\eta}_j = \bar{\eta}_j(n,i))$$

微分，離散ソリトン方程式の対応

微分，離散ソリトン方程式は同様の構造を持っており，摂動形式，行列式形式の解表現を持つ．

	微分ソリトン方程式	離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	摂動形式解
解表現 2	ロンスキー行列式解	カソラチ行列式解

解表現２，行列式形式解

(微分）ソリトン解（2 ソリトン解）

$$f(x,t) = \begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1' \\ \eta_2 & \eta_2' \end{vmatrix} \qquad \left(\eta_j' \equiv \frac{\partial \eta_j(x,t)}{\partial x}\right)$$

離散ソリトン解（2 ソリトン解）

$$F_i^n = \begin{vmatrix} \eta_1(n,i) & \eta_1(n+2,i) \\ \eta_2(n,i) & \eta_2(n+2,i) \end{vmatrix}$$

微分，離散ソリトン方程式の対応

特に行列式解とソリトン方程式は Plücker 関係式とよばれる恒等式でむすばれている．

	微分ソリトン方程式	離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	摂動形式解
解表現 2	ロンスキー行列式解	カソラチ行列式解

Plücker 関係式 ($n = 3$)

$$
\begin{aligned}
&|\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_1 \ b_2}| \times |\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_3 \ b_4}| \\
-&|\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_1 \ b_3}| \times |\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_2 \ b_4}| \\
+&|\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_1 \ b_4}| \times |\underbrace{a_1 \ \dots \ a_{N-2}} \ \underbrace{b_2 \ b_3}| = 0
\end{aligned}
$$

ただし a_i, b_i は N 次元ベクトル．

微分，離散ソリトン方程式の対応

例：KP 方程式（双線形形式）の N ソリトン解

$$\tau(x,y,t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N' & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{c} \text{ただし } f_j = f_j(x,y,t) \text{ として} \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial f_j}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 f_j}{\partial x^3}. \end{array} \right)$$

を KP 方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{12}(\tau\tau_{4x} - 4\tau_x\tau_{3x} + 3\tau_{xx}^2) - \frac{1}{3}(\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t) + \frac{1}{4}(\tau\tau_{yy} - \tau_y^2) = 0$$

に代入し，計算すると Plücker 関係式（$n = 3$）

$$\begin{aligned} &|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_2| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_3\ b_4| \\ -&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_3| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_2\ b_4| \\ +&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_4| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_2\ b_3| = 0 \end{aligned}$$

となり解であることが証明される．

微分，離散ソリトン方程式の対応

同様に離散 KP 方程式（双線形形式）の N ソリトン解

$$\tau(l,m,n) = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_1(1) & \cdots & \phi_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(0) & \phi_N(1) & \cdots & \phi_N(N-1) \end{vmatrix}$$

（ただし $\phi_j(s) = \phi_j(s;l,m,n)$ として適当な分散関係式を満たすものとする．）

を離散 KP 方程式（双線形形式）

$$\begin{aligned} &a_1(a_2-a_3)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1) \\ +&a_2(a_3-a_1)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1) \\ +&a_3(a_1-a_2)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) = 0 \end{aligned}$$

に代入し，計算すると Plücker 関係式（$n=3$）

$$\begin{aligned} &|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_2| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_3\ b_4| \\ -&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_3| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_2\ b_4| \\ +&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_1\ b_4| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2}\ b_2\ b_3| = 0 \end{aligned}$$

となり解であることが証明される．

研究目的

他のソリトン方程式も行列式解を Plücker 関係式に帰着させることで証明が可能であり

> ソリトン方程式（双線形形式）とは行列式と分散関係式から導かれる *Plücker* 関係式等の代数的恒等式である

という事実からも，ソリトン方程式の統一的な理解に行列式解，Plücker 関係式が重要な役割を担っている．

研究目的

他のソリトン方程式も行列式解を Plücker 関係式に帰着させることで証明が可能であり

> ソリトン方程式（双線形形式）とは行列式と分散関係式から導かれる *Plücker* 関係式等の代数的恒等式である

という事実からも，ソリトン方程式の統一的な理解に行列式解，Plücker 関係式が重要な役割を担っている．

→ この構造を超離散系で再現したい．

	微分ソリトン方程式	離散ソリトン方程式	超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	摂動形式解	
解表現 2	ロンスキー行列式解	カソラチ行列式解	

1-3 超離散化，超離散方程式

超離散方程式は**超離散化**と呼ばれる極限操作を差分方程式に施すことによって得られる（「差分と超離散」広田良吾，高橋大輔）．

例：2 **階差分方程式**

$$X_{n+1} = \frac{A + X_n}{X_{n-1}} \qquad (X_0, X_1, A > 0)$$

(1) **変数変換**

$$X_n = e^{x_n/\epsilon}, \quad A = e^{a/\epsilon}$$

(2) **極限操作** $\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log$

$$x_{n+1} = \lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log \left(e^{a/\epsilon} + e^{x_n/\epsilon} \right) - x_{n-1}$$

公式

$$\boxed{\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log \left(e^{a/\epsilon} + e^{b/\epsilon} + \dots \right) = \max(a, b, \dots)}$$

を用いて超離散方程式が得られる．

$$x_{n+1} = \max(a, x_n) - x_{n-1}.$$

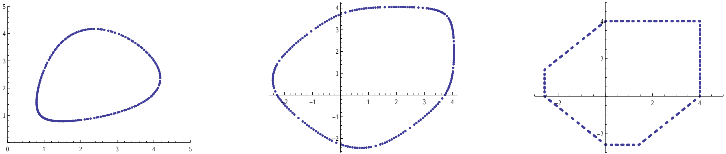
超離散化，超離散方程式

超離散化によって解軌道は区分線形的になる．

$$X_{n+1} = \frac{A + X_n}{X_{n-1}} \qquad (X_0, X_1, A > 0)$$

$$\to x_{n+1} = \epsilon \log\left(e^{a/\epsilon} + e^{x_n/\epsilon}\right) - x_{n-1}$$

$$\to x_{n+1} = \max(a, x_n) - x_{n-1}$$



元の差分方程式および得られた超離散方程式の相平面図．

超離散化，超離散方程式

$$X_{n+1} = \frac{A + X_n}{X_{n-1}} \quad \rightarrow \quad x_{n+1} = \max(a, x_n) - x_{n-1}.$$

超離散化によって四則演算は次のように変化する．

$$\begin{array}{ccc} + & \rightarrow & \max \\ - & \rightarrow & \text{not well-defined} \\ \times & \rightarrow & + \\ \div & \rightarrow & - \end{array}$$

これから適当な初期値をとることで超離散系の独立変数，従属変数を離散値で構成することが可能となる．

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式
独立変数	連続	離散	離散
従属変数	連続	連続	離散

超離散化，超離散方程式

$$X_{n+1} = \frac{A + X_n}{X_{n-1}} \quad \rightarrow \quad x_{n+1} = \max(a, x_n) - x_{n-1}.$$

超離散化によって四則演算は次のように変化する．

$$\begin{aligned} + &\quad\rightarrow\quad \max \\ - &\quad\rightarrow\quad \text{not well-defined} \\ \times &\quad\rightarrow\quad + \\ \div &\quad\rightarrow\quad - \end{aligned}$$

これから適当な初期値をとることで超離散系の独立変数，従属変数を離散値で構成することが可能となる．

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式
独立変数	連続	離散	離散
従属変数	連続	連続	離散

負の問題

超離散化の際に鍵となる公式

$$\boxed{\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\log\left(e^{a/\epsilon}+e^{b/\epsilon}\right)=\max(a,b)}$$

に対して次は定まらない．

$$\lim_{\epsilon\to+0}\epsilon\log\left(e^{a/\epsilon}-e^{b/\epsilon}\right)=\quad ?$$

したがって負の項を含む方程式への超離散化は（一般には）適用できず，負の問題と呼ばれる．

超離散ソリトン系

超離散ソリトン方程式（摂動形式解）は離散ソリトン方程式（摂動形式解）を超離散化することで得られる．

	離散ソリトン方程式	超離散化 →	超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解		
解表現 2	カソラチ行列式解		

方程式

離散 KdV 方程式（双線形形式）

$$F_{i+1}^{n+1}F_i^{n-1} = (1-\delta)F_{i+1}^{n}F_i^{n} + \delta F_{i+1}^{n-1}F_i^{n+1}$$

$$\xrightarrow{\text{超離散化}} f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n-1} = \max(f_{i+1}^{n} + f_i^{n}, f_{i+1}^{n-1} + f_i^{n+1} - 2)$$

(T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. 76 (1996))

超離散ソリトン系

超離散ソリトン方程式（摂動形式解）は離散ソリトン方程式（摂動形式解）を超離散化することで得られる．

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	

ソリトン解（摂動形式）

離散 KdV 方程式の 2 ソリトン解（摂動形式）

$$F_i^n = 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + A_{12}e^{\eta_1+\eta_2}$$

$$\xrightarrow{\text{超離散化}} f_i^n = \max(0, s_1, s_2, s_1 + s_2 - a_{12})$$

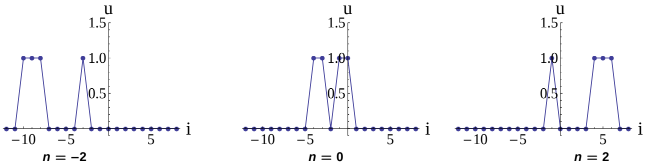
摂動形式は exp の和で表されることから超離散化が可能．

超離散ソリトン系

超離散ソリトン方程式（摂動形式解）は離散ソリトン方程式（摂動形式解）を超離散化することで得られる．

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
		$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解		

超離散ソリトン解の挙動（2 ソリトン解）．



変数変換 $u_i^n = f_{i+1}^n + f_i^{n+1} - f_i^n - f_{i+1}^{n+1}$

超離散ソリトン系

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$ ×	?

$\boxed{\text{ソリトン解（行列式形式）}}$

離散 KdV の行列式解（2 ソリトン解）

$$F_i^n = \begin{vmatrix} \eta_1(n,i) & \eta_1(n+2,i) \\ \eta_2(n,i) & \eta_2(n+2,i) \end{vmatrix} = \eta_1(n,i)\eta_2(n+2,i) - \eta_1(n+2,i)\eta_2(n,i)$$

負の問題のために行列式解は超離散化できない．

超離散ソリトン系

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
		$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$ ×	?

まとめると

- 超離散ソリトン方程式，摂動形式解は超離散化によって得られる．
- 行列式形式解は**負の問題**によって超離散化ができない．
- 同様の理由で Plücker 関係式も超離散化できない

超離散ソリトン系

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$ ×	？

- 超離散系における行列式解の対応物は？
- 超離散化を用いずに，超離散系で閉じた証明は与えられないか？

超離散ソリトン系

	離散ソリトン方程式		超離散ソリトン方程式
解表現 1	摂動形式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$	摂動形式解
解表現 2	カソラチ行列式解	$\xrightarrow{\text{超離散化}}$ ×	超離散パーマネント

- 超離散系における行列式解の対応物は？
- 超離散化を用いずに，超離散系で閉じた証明は与えられないか？

主張：超離散ソリトン系における行列式の対応物は**超離散パーマネント**である．

2-1 超離散パーマネント

行列式の定義

$$\det[A_{ij}] = \sum_{\pi_i} \mathrm{sign}(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N) \prod_{1 \le i \le N} A_{i\pi_i}$$

において符号をすべて正にしたものをパーマネントとよぶ．

$$\mathrm{perm}[A_{ij}] = \sum_{\pi_i} \prod_{1 \le i \le N} A_{i\pi_i}$$

ここで $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$ は N を自然数としたときの 1 から N までのあらゆる組み合わせの集合とする．パーマネントを超離散化したものを超離散パーマネント (UP) と定義する．

超離散パーマネント (UP)

$$\max[a_{ij}] = \max_{\pi_i} \sum_{1 \le i \le N} a_{i\pi_i}$$

超離散パーマネントの具体例

2×2 行列での例.
行列式

$$\det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

パーマネント

$$\mathrm{perm} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}$$

超離散パーマネント (UP)

$$\max \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \max(a_{11} + a_{22}, a_{12} + a_{21})$$

超離散パーマネントの具体例

3×3 行列での例.

UP

$$\max \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \max\big(a_{11}+a_{22}+a_{33},\ a_{11}+a_{23}+a_{32},\ a_{12}+a_{21}+a_{33},$$
$$a_{12}+a_{23}+a_{31},\ a_{13}+a_{21}+a_{32},\ a_{13}+a_{22}+a_{31}\big)$$

UP 解

UP を用いると超離散 KdV 方程式

$$f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n-1} = \max(f_{i+1}^n + f_i^n, f_{i+1}^{n-1} + f_i^{n+1} - 2)$$

の N ソリトン解は以下のように表される．(D Takahashi, R Hirota, JPSJ **76** (2007))

超離散 KdV 方程式の N ソリトン解（UP 形式）

$$f_i^n = \max \begin{bmatrix} |s_1| & |s_1 + 2p_1| & \dots & |s_1 + 2(N-1)p_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N| & |s_N + 2p_N| & \dots & |s_N + 2(N-1)p_N| \end{bmatrix}$$

$$s_j \equiv s_j(n,i) = p_j n - q_j i + c_j, \qquad q_j = \frac{1}{2}(|p_j + 1| - |p_j - 1|)$$

（注） この解は超離散化から導かれるものではなく，発見的に与えたもの．

比較

離散 KdV 方程式の行列式解

$$F_i^n = \det \begin{bmatrix} \eta_1(n,i) & \eta_1(n+2,i) & \dots & \eta_1(n+2(N-1),i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_N(n,i) & \eta_N(n+2,i) & \dots & \eta_N(n+2(N-1),i) \end{bmatrix}$$

超離散 KdV 方程式の N ソリトン解（UP 形式）

$$f_i^n = \max \begin{bmatrix} |s_1| & |s_1+2p_1| & \dots & |s_1+2(N-1)p_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N| & |s_N+2p_N| & \dots & |s_N+2(N-1)p_N| \end{bmatrix}$$

$$s_j \equiv s_j(n,i) = p_j n - q_j i + c_j, \qquad q_j = \frac{1}{2}(|p_j+1| - |p_j-1|)$$

となり離散系に対応した表現が与えられる．

比較

離散 KdV 方程式の行列式解

$$F_i^n = \det \begin{bmatrix} \eta_1(n,i) & \eta_1(n+2,i) & \dots & \eta_1(n+2(N-1),i) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_N(n,i) & \eta_N(n+2,i) & \dots & \eta_N(n+2(N-1),i) \end{bmatrix}$$

超離散 KdV 方程式の N ソリトン解（UP 形式）

定義より $s_j(n,i) + 2kp_j = s_j(n+2k,i)$ であるから

$$f_i^n = \max \begin{bmatrix} |s_1(n,i)| & |s_1(n+2,i)| & \dots & |s_1(n+2(N-1),i)| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(n,i)| & |s_N(n+2,i)| & \dots & |s_N(n+2(N-1),i)| \end{bmatrix}$$

$$s_j \equiv s_j(n,i) = p_j n - q_j i + c_j, \qquad q_j = \frac{1}{2}(|p_j+1| - |p_j-1|)$$

となり離散系に対応した表現が与えられる．

UP 解と摂動形式解

摂動形式解の 1 ソリトン解

$$f_i^n = 2\max(0, s_1) \qquad (s \equiv s(n,i))$$

に対して UP 解は

$$\begin{aligned} f_i^n = |s_1(n,i)| &= \max(-s_1, s_1) \\ &= \max(0, 2s_1) - s_1 \end{aligned}$$

で表される.

UP 解と摂動形式解

摂動形式解の 2 ソリトン解 ($0 \le p_1 \le p_2$)

$$f_i^n = 2\max(0, s_1, s_2, s_1+s_2-2p_1) \qquad (s_j \equiv s_j(n,i))$$

に対して UP 解は

$$\begin{aligned}
f_i^n &= \max\begin{bmatrix} |s_1-p_1| & |s_1+p_1| \\ |s_2-p_2| & |s_2+p_2| \end{bmatrix} \\
&= \max(|s_1-p_1|+|s_2+p_2|, |s_2-p_2|+|s_1+p_1|) \\
&= \max(|s_1+s_2|+|p_2-p_1|, |s_1-s_2|+|p_1+p_2|) \\
&= 2\max(0, s_1+p_1, s_2+p_1, s_1+s_2+p_2-p_1) \\
&\qquad -s_1-s_2+p_2-p_1 \\
&\backsimeq 2\max(0, s_1, s_2, s_1+s_2-2p_1) \\
&\qquad -s_1-s_2+2p_2 \qquad (s_j+p_1 \to s_j)
\end{aligned}$$

で表される．

UP 解と摂動形式解

一般に任意実数 y_j, r_j が

$$0 \leq r_1 \leq r_2 \leq \cdots \leq r_N$$

を満たす時，

$$\max \begin{bmatrix} |y_1 + (-N+1)r_1| & |y_1 + (-N+3)r_1| & \dots & |y_1 + (N-1)r_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |y_N + (-N+1)r_N| & |y_N + (-N+3)r_N| & \dots & |y_N + (N-1)r_N| \end{bmatrix}$$

$$= \max_{\rho_j = \pm 1} \left(\sum_{1 \leq j \leq N} \rho_j y_j - \sum_{1 \leq j < j' \leq N} \rho_j \rho_{j'} r_j \right) + \sum_{1 \leq j < j' \leq N} r_{j'}$$

が成り立つ．この公式を用いることで UP 解と摂動形式解の変換が可能になる．

UP 解

既知の他の超離散ソリトン方程式

- **超離散 mKdV 方程式**
  D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997).
  M. Murata, S. Isojima, A. Nobe and J. Satsuma, J. Phys. A: Math. Gen. **39**(2006).
- **超離散戸田方程式**
  J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, Phys. Lett. A **225** (1997)

についても同様に次の UP 形式で（基本的には）表される.

$$f_i^n = \max \begin{bmatrix} |s_1| & |s_1 + r_1| & \cdots & |s_1 + (N-1)r_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N| & |s_N + r_N| & \cdots & |s_N + (N-1)r_N| \end{bmatrix}$$

$$s_j \equiv s_j(n, i) = p_j n - q_j i + c_j,$$

r_j は p_j, q_j から定まる値.

2-2 UP 解を用いた証明

超離散系で閉じた証明法，特に Plücker 関係式を用いるような証明法を与えるために，行列式と超離散パーマネントの違いをみる．

行列式がみたすいくつかの性質を UP も満たす．

$$c \times \det[a_1\ a_2\ \ldots\ a_N] = \det[ca_1\ a_2\ \ldots\ a_N], \qquad (c: \text{const.})$$

ここで a_i は N 次元ベクトル.

これに対して

$$c + \max[a_1\ a_2\ \ldots\ a_N] = \max[c + a_1\ a_2\ \ldots\ a_N]$$

行列式と超離散パーマネントの違い（一般）

$$\det[a_1 + b_1\ a_2\ \ldots\ a_N] = \det[a_1\ a_2\ \ldots\ a_N] + \det[b_1\ a_2\ \ldots\ a_N],$$

に対して

$$\max[\max(a_1, b_1)\ a_2\ \ldots\ a_N] = \max\Big(\max[a_1\ a_2\ \ldots\ a_N], \max[b_1\ a_2\ \ldots\ a_N]\Big).$$

ここで b_i は N 次元ベクトルであり $\max(a_j, b_j)$ は

$$\max(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} \max(a_{1j}, b_{1j}) \\ \max(a_{2j}, b_{2j}) \\ \ldots \\ \max(a_{Nj}, b_{Nj}) \end{pmatrix}$$

とする.

行列式と超離散パーマネントの違い (一般)

ただし

$$\det[a_1\ a_1\ a_3\ \ldots\ a_N] = 0$$

に対して

$$\max[a_1\ a_1\ a_3\ \ldots\ a_N] = -\infty$$

は一般にはならない.

例：

$$\max\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{12} & a_{12} \end{bmatrix} = \max(a_{11}+a_{12}, a_{12}+a_{11}) = a_{11}+a_{12}$$

行列式と超離散パーマネントの違い (一般)

これによって離散ソリトン解の証明の際に用いる

$$
\begin{aligned}
&\det[-- \ \ b_1+b_2 \ \ b_2+b_3] \\
=&\det[-- \ \ b_1 \ \ b_2]+\det[-- \ \ b_1 \ \ b_3]+\det[-- \ \ b_2 \ \ b_3]
\end{aligned}
$$

といった変形は UP では一般には対応しない．

$$
\begin{aligned}
&\max[-- \ \ \max(b_1,b_2) \ \ \max(b_2,b_3)] \\
=&\max(\max[-- \ \ b_1 \ \ b_2], \max[-- \ \ b_1 \ \ b_3], \max[-- \ \ b_2 \ \ b_2], \max[-- \ \ b_2 \ \ b_3])
\end{aligned}
$$

ただし $-- \equiv a_1 \ \ldots \ a_{N-2}$ と略記している．

行列式と超離散パーマネントの違い (一般)

同様に $-- \equiv a_1 \ \ldots \ a_{N-2}$ としたとき成り立つ Plücker 関係式 ($n = 3$)

$$\begin{aligned} &\det[- - \ b_1 \ b_3] \times \det[- - \ b_2 \ b_4] \\ &= \det[- - \ b_1 \ b_2] \times \det[- - \ b_3 \ b_4] + \det[- - \ b_1 \ b_4] \times \det[- - \ b_2 \ b_3]. \end{aligned}$$

に対して UP では

$$\begin{aligned} &\max[- - \ b_1 \ b_3] + \max[- - \ b_2 \ b_4] \\ &= \max\Big(\max[- - \ b_1 \ b_2] + \max[- - \ b_3 \ b_4], \ \max[- - \ b_1 \ b_4] + \max[- - \ b_2 \ b_3]\Big) \end{aligned}$$

といった関係式は <u>必ずしも成り立たない</u>.

行列式と超離散パーマネントの違い (一般)

同様に $-- \equiv a_1 \ \dots \ a_{N-2}$ としたとき成り立つ Plücker 関係式 ($n=3$)

$$
\begin{aligned}
&\det[--\ b_1\ b_3] \times \det[--\ b_2\ b_4] \\
&= \det[--\ b_1\ b_2] \times \det[--\ b_3\ b_4] + \det[--\ b_1\ b_4] \times \det[--\ b_2\ b_3].
\end{aligned}
$$

に対して UP では

$$
\begin{aligned}
&\max\Big(\max[--\ b_1\ b_2] + \max[--\ b_3\ b_4],\ \max[--\ b_1\ b_3] + \max[--\ b_2\ b_4]\Big) \\
&= \max\Big(\max[--\ b_1\ b_2] + \max[--\ b_3\ b_4],\ \max[--\ b_1\ b_4] + \max[--\ b_2\ b_3]\Big) \\
&= \max\Big(\max[--\ b_1\ b_3] + \max[--\ b_2\ b_4],\ \max[--\ b_1\ b_4] + \max[--\ b_2\ b_3]\Big)
\end{aligned}
$$

が任意の a_i, b_i で成り立つ．

行列式と超離散パーマネントの違い (ソリトン形式)

UP の各要素が超離散ソリトン解の形式，すなわち

$$\max[x_1\ x_2\ \dots\ x_N] = \max\begin{bmatrix} |y_1| & |y_1+r_1| & \dots & |y_1+(N-1)r_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |y_N| & |y_N+r_N| & \dots & |y_N+(N-1)r_N| \end{bmatrix}, \quad (y_i, r_i \text{は任意実数})$$

という条件，$x_k = (|y_j + kr_j|)^T_{1\le j\le N}$ を加えると

$$\max[- - x_{N-2}\ x_N] \ge \max[- - x_{N-1}\ x_{N-1}]$$

といった大小関係が示される．

行列式と超離散パーマネントの違い (ソリトン形式)

$$\max[\max(b_1, b_2) \;\; \max(b_2, b_3)]$$
$$= \max(\max[b_1 \;\; b_2], \max[b_1 \;\; b_3], \max[b_2 \;\; b_2], \max[b_2 \;\; b_3])$$

に対して b_j を $x_k = (|y_j + (k-2)r_j|)^T_{1\le j\le 2}$ に置き換えると

$$\max[x_2 \;\; x_2] = \max\begin{bmatrix} |y_1| & |y_1| \\ |y_2| & |y_2| \end{bmatrix} = \max\big(|y_1 + y_2|, |y_1 - y_2|\big)$$

$$\max[x_1 \;\; x_3] = \max\begin{bmatrix} |y_1 - r_1| & |y_1 + r_1| \\ |y_2 - r_2| & |y_2 + r_2| \end{bmatrix}$$
$$= \max(|y_1 + y_2| + |r_1 - r_2|, |y_1 - y_2| + |r_1 + r_2|)$$

したがって $\max[x_1 \;\; x_3] \ge \max[x_2 \;\; x_2]$ が成り立つ．

$$\max[\max(x_1, x_2) \;\; \max(x_2, x_3)]$$
$$= \max(\max[x_1 \;\; x_2], \max[x_1 \;\; x_3], \max[x_2 \;\; x_3]).$$

条件付き超離散 Plücker 関係式

Plücker 関係式の対応についても $x_k = (|y_j + kr_j|)^T_{1 \le j \le N}$ とすることで

$$
\begin{aligned}
&\max[-- \; x_{k_1} \, x_{k_3}] + \max[-- \; x_{k_2} \, x_{N+1}] \\
= \max\Big(&\max[-- \; x_{k_1} \, x_{k_2}] + \max[-- \; x_{k_3} \, x_{N+1}], \\
&\max[-- \, x_{k_2} \, x_{k_3}] + \max[-- \, x_{k_1} \, x_{N+1}]\Big).
\end{aligned}
$$

が成り立つ．ここで $0 \le k_1 < k_2 < k_3 \le N$ とし，$--$ は x_0 から x_N のうち x_{k_i} $(i = 1, 2, 3)$ を除いた

$$
-- \equiv \max[x_0 \; \ldots \; \widehat{x_{k_1}} \; \ldots \; \widehat{x_{k_2}} \; \ldots \; \widehat{x_{k_3}} \; \ldots \; x_N]
$$

とする．
上の関係式を**条件付き超離散 Plücker 関係式**と呼ぶことにする．

条件付き超離散 Plücker 関係式

例:$N=2$ のとき，$k_1=0$, $k_2=1$, $k_3=2$.

$$\max\begin{bmatrix}|y_1| & |y_1+2r_1|\\|y_2| & |y_2+2r_2|\end{bmatrix}+\max\begin{bmatrix}|y_1+r_1| & |y_1+3r_1|\\|y_2+r_2| & |y_2+3r_2|\end{bmatrix}$$

$$=\max\Bigg(\max\begin{bmatrix}|y_1| & |y_1+r_1|\\|y_2| & |y_2+r_2|\end{bmatrix}+\max\begin{bmatrix}|y_1+2r_1| & |y_1+3r_1|\\|y_2+2r_2| & |y_2+3r_2|\end{bmatrix},$$

$$\max\begin{bmatrix}|y_1| & |y_1+3r_1|\\|y_2| & |y_2+3r_2|\end{bmatrix}+\max\begin{bmatrix}|y_1+r_1| & |y_1+2r_1|\\|y_2+r_2| & |y_2+2r_2|\end{bmatrix}\Bigg)$$

条件付き超離散 Plücker 関係式

証明はソリトン形式の条件をいれた UP が

$$\max[x_1\ x_2\ \dots\ x_N] = \max\Big(y_N + Nr_N + \max[x_1\ \dots\ x_{N-1}], \\ -y_N - r_N + \max[x_2\ \dots\ x_N]\Big) \\ (0 \le r_1 \le r_2 \le \cdots \le r_N \text{のとき})$$

と展開される性質を利用して帰納法で与えられる. (RIMS 講究録 (2009) 掲載予定.)

以上に挙げた，UP が満たす性質を利用することで超離散ソリトン方程式の証明が与えられる.

微分，離散ソリトン方程式の対応（再掲）

例：KP 方程式（双線形形式）の N ソリトン解

$$\tau(x,y,t) = \begin{vmatrix} f_1 & f_1' & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & f_N' & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c} \text{ただし } f_j = f_j(x,y,t) \text{ として} \\ \dfrac{\partial f_j}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x^2}, \quad \dfrac{\partial f_j}{\partial t} = \dfrac{\partial^3 f_j}{\partial x^3}. \end{array} \right)$$

を KP 方程式（双線形形式）

$$\frac{1}{12}(\tau\tau_{4x} - 4\tau_x\tau_{3x} + 3\tau_{xx}^2) - \frac{1}{3}(\tau\tau_{xt} - \tau_x\tau_t) + \frac{1}{4}(\tau\tau_{yy} - \tau_y^2) = 0$$

に代入し，計算すると Plücker 関係式（$n = 3$）

$$\begin{aligned} &|a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_2| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_3 \ b_4| \\ -&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_3| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_2 \ b_4| \\ +&|a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_4| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_2 \ b_3| = 0 \end{aligned}$$

となり解であることが証明される．

微分，離散ソリトン方程式の対応 (再掲)

同様に離散 KP 方程式（双線形形式）の N ソリトン解

$$\tau(l,m,n) = \begin{vmatrix} \phi_1(0) & \phi_1(1) & \cdots & \phi_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(0) & \phi_N(1) & \cdots & \phi_N(N-1) \end{vmatrix}$$

（ただし $\phi_j(s) = \phi_j(s;l,m,n)$ として適当な分散関係式を満たすものとする．）

を離散 KP 方程式（双線形形式）

$$\begin{aligned} & a_1(a_2-a_3)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1) \\ +& a_2(a_3-a_1)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1) \\ +& a_3(a_1-a_2)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) = 0 \end{aligned}$$

に代入し，計算すると Plücker 関係式（$n=3$）

$$\begin{aligned} & |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_2| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_3 \ b_4| \\ -& |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_3| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_2 \ b_4| \\ +& |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_1 \ b_4| \times |a_1 \ \ldots \ a_{N-2} \ b_2 \ b_3| = 0 \end{aligned}$$

となり解であることが証明される．

超離散 KP 方程式

超離散 KP 方程式（双線形形式）の N ソリトン解

$$\tau(l,m,n) = \max \begin{bmatrix} \phi_1(0) & \phi_1(1) & \cdots & \phi_1(N-1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_N(0) & \phi_N(1) & \cdots & \phi_N(N-1) \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c} \phi_j(s) = \phi_j(s;l,m,n) \\ \text{については後述} \end{array} \right)$$

を超離散 KP 方程式（双線形形式）

$$\begin{aligned} &\tau(l,m+1,n) + \tau(l+1,m,n+1) - a_2 \\ &= \max\big(\tau(l+1,m,n) + \tau(l,m+1,n+1) - a_1, \\ &\qquad \tau(l,m,n+1) + \tau(l+1,m+1,n) - a_2\big) \qquad (a_1 > a_2 > a_3) \end{aligned}$$

に代入し，ソリトン解の条件を利用して計算すると条件付き超離散 Plücker 関係式

$$\begin{aligned} &\max[- - \ x_{k_1} \ x_{k_3}] + \max[- - \ x_{k_2} \ x_{N+1}] \\ &= \max\big(\max[- - \ x_{k_1} \ x_{k_2}] + \max[- - \ x_{k_3} \ x_{N+1}], \\ &\qquad \max[- - x_{k_1} \ x_{N+1}] + \max[- - x_{k_2} \ x_{k_3}]\big). \end{aligned}$$

となり解であることが証明される．

超離散 KP 方程式（補足）

超離散 KP **方程式は離散** KP **方程式**

$$\begin{aligned} &a_1(a_2 - a_3)\tau(l+1,m,n)\tau(l,m+1,n+1)\\ +&a_2(a_3 - a_1)\tau(l,m+1,n)\tau(l+1,m,n+1)\\ +&a_3(a_1 - a_2)\tau(l,m,n+1)\tau(l+1,m+1,n) = 0 \end{aligned}$$

を超離散化して得られる．

超離散 KP **方程式**

$$\begin{aligned} &\tau(l,m+1,n) + \tau(l+1,m,n+1) - a_2\\ = \max\Big(&\tau(l+1,m,n) + \tau(l,m+1,n+1) - a_1,\\ &\tau(l,m,n+1) + \tau(l+1,m+1,n) - a_2\Big) \qquad (a_1 > a_2 > a_3) \end{aligned}$$

超離散 KP 方程式（補足）

UP 形式のソリトン解は，離散 KP 方程式の行列式を UP に置き換え，各要素を超離散化したもので定義する．

$$\tau(l,m,n,s) = \max[\phi_i(l,m,n,s+j-1)]_{1\le i,j\le N}.$$

ϕ_i は

$$\begin{aligned}
\phi_i(l+1,m,n,s) &= \max(\phi_i(l,m,n,s),\ \phi_i(l,m,n,s+1)-a_1)\\
\phi_i(l,m+1,n,s) &= \max(\phi_i(l,m,n,s),\ \phi_i(l,m,n,s+1)-a_2)\\
\phi_i(l,m,n+1,s) &= \max(\phi_i(l,m,n,s),\ \phi_i(l,m,n,s+1)-a_3)
\end{aligned}$$

を満たす

$$\begin{aligned}
&\phi_i(l,m,n,s)\\
&=\max\Big(p_i s+\max(0,p_i-a_1)l+\max(0,p_i-a_2)m+\max(0,p_i-a_3)n+c_i,\\
&\qquad -p_i s+\max(0,-p_i-a_1)l+\max(0,-p_i-a_2)m+\max(0,-p_i-a_3)n+c_i'\Big).\\
&\fallingdotseq |y_i(l,m,n)+p_i s|
\end{aligned}$$

で与える．

2-3 摂動形式を用いた証明

なお，UP を用いない摂動形式での証明法も与えられている．

- D Takahashi, R Hirota, JPSJ **76** (2007),
- H Nagai, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008),
- Y. Nakata, J. Phys. A: Math. Theor. **42** (2009))

この証明方法から以下の一般化した超離散ソリトン解が満たすソリトン方程式や超離散 Bäcklund 変換が与えられる．

$$f_i^n = \max \begin{bmatrix} |s_1 + (-N+1)r_1| & |s_1 + (-N+3)r_1| & \dots & |s_1 + (N-1)r_1| \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ |s_N + (-N+1)r_N| & |s_N + (-N+3)r_N| & \dots & |s_N + (N-1)r_N| \end{bmatrix}$$

$$\Bumpeq 2 \max_{\mu_j = 0,1} \left(\sum_{1 \le j \le N} \mu_j s_j(n,i) - \sum_{1 \le j < j' \le N} \mu_j \mu_{j'} a_{jj'} \right)$$

$$s_j \equiv s_j(n,i) = p_j n - q_j i + c_j, \qquad r_j = k p_j + l q_j \quad (k, l \ge 0)$$

$$a_{jj'} = \min(\max(r_j, -r_{j'}), \max(-r_j, r_{j'})).$$

一般化超離散ソリトン方程式

一般化したソリトン解 f_i^n が満たす方程式の例として

$$f_i^n + f_{i-l+1}^{n+k} = \max(f_{i-l}^{n+k-1} + f_{i+1}^{n+1}, f_{i-l}^{n+k} + f_{i+1}^{n} - 2C), \qquad (k \geq 2)$$

$$f_i^n + f_{i-l-1}^{n+k-1} = \max(f_{i-l}^{n+k-1} + f_{i-1}^{n}, f_{i-l}^{n+k} + f_{i-1}^{n-1} - 2L) \qquad (k, l \geq 1)$$

などが挙げられる．ただし $0 \leq p_1 \leq \cdots \leq p_N$ としたとき，上の方程式では

$$q_j = \min(p_j, C), \qquad (C \geq 0),$$

下の方程式では

$$q_j = \max(0, p_j - L), \qquad (L \geq 0)$$

という分散関係式を満たすとする．

超離散 Bäcklund 変換

g_i^n を $N+1$ ソリトン解

$$g_i^n = \max_{\mu_j=0,1}\left(\sum_{1\le j\le N+1}\mu_j s_j(n,i) - \sum_{1\le j<j'\le N+1}\mu_j\mu_{j'}a_{jj'}\right),$$

とし分散関係式

$$0 \le q_1 \le q_2 \le \cdots \le q_{N+1},$$
$$p_1 - q_1 \le p_2 - q_2 \le \cdots \le p_{N+1} - q_{N+1},$$

とすると摂動形式の N ソリトン解 f_i^n と g_i^n は

$$\boxed{f_i^n + g_{i+\beta}^{n+\alpha} = \max(f_{i+\beta}^{n+\alpha} + g_i^n, f_{i+\beta+l}^{n+\alpha-k} + g_{i-l}^{n+k} - A),}$$

を満たす．ただし A, k, l, α, β は次を満たすものとする．

$$A = (k-\alpha)p_{N+1} + (\beta + l)q_{N+1},$$
$$0 \le k, l, \qquad 0 \le \alpha \le k, \qquad \alpha - k - l \le \beta \le \alpha.$$

最後に

UP にソリトン形式を付加することで

- 超離散ソリトン解
- Plücker 関係式
- 超離散 Bäcklund 変換

等について離散ソリトン系と同等の対応がみられる．

今後の展望

- 行列式と UP の対応（負の問題）
- ソリトン形式を除いた証明（拡張）
- トロピカル幾何等との関連
- 超離散版佐藤理論