

応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2
「戸田格子 40 周年 非線形波動研究の歩みと展望」 (研究代表者 西成 活裕)

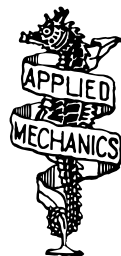
Reports of RIAM Symposium No.19ME-S2
40 years Anniversary of Toda lattice - history and perspective of nonlinear wave research
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 7 - 9, 2007

Article No. 28

大域的情報に基く時間発展ルールを 持つ二次元 CA について

中村 伸也 (NAKAMURA Shinya), 岩尾 昌央 (IWAO
Masataka) 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

(Received February 25, 2008)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
April, 2008

大域的情報に基づく時間発展ルールを持つ 二次元CAについて

早稲田大学基幹理工学研究科 中村 伸也 (NAKAMURA Shinya)
東京大学大学院数理科学研究科 岩尾 昌央 (IWAO Masataka)
早稲田大学基幹理工学研究科 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

1 概要

セルオートマトン (CA) とは、有限個の状態を取りうるセルが格子状に並び、簡単な時間発展規則によりセルの状態が変化していく離散的計算モデルである。よく知られた CA である ECA やライフゲームなどは、ある決まった近傍の情報に基づいて時間発展のルールが決められている。本稿は Global CA (GCA) として、ECA やライフゲームのように近傍を定めるのではなく、大域的な情報に基づく時間発展ルールを持つ CA について述べるものである。

2 GCA について

ここでは GCA の基本設定と時間発展ルール、そして特徴的な時間発展パターンについて説明する。

2.1 GCA の基本設定

GCA のセルは以下の 4 点の性質を持つものを用いる。

- セルは正方形で、取りうる内部状態は 2 種類である [図 1]。
- 内部に辺同士を結ぶ線を持つ。
- 境界条件は周期境界とする。
- セル内の線は必ずいずれかの閉曲線に含まれる。

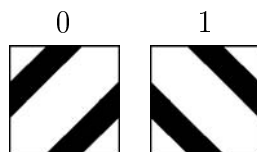


図 1: GCA のセルの内部状態

上記の第 4 項目については実際にセルを配置してみれば容易にわかる [図 2]。セル一つ一つに注目すると、4 つの辺はいずれも 1 本だけの線とつながっている。そのセルが隙間なく長形状に並べられると、セル内の線同士が繋がったとみなせば

曲線ができる。ここで周期境界であることを考えると長方形に並べられたセルの横の境界同士、縦の境界同士がそれぞれつながり、曲線の端になる部分がなくなりすべてが閉曲線になる。そして、各セル内の線はそうしてできた閉曲線のいずれかに含まれることになるわけである。

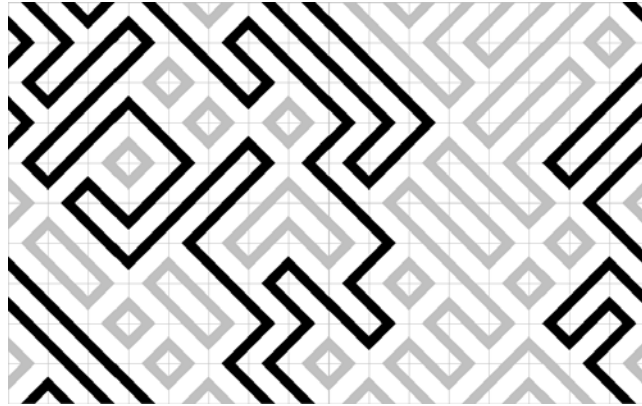


図 2: 乱数によるセルの配置。黒線が 1 つの閉曲線になっている。

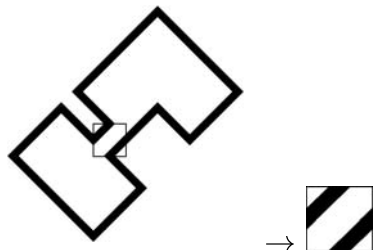
2.2 GCA の時間発展ルール

前節では、GCA のセルの基本設定とセル内の線同士がつながって閉曲線ができることを見た。この節ではその閉曲線同士の関係を基に時間発展ルールを定める。

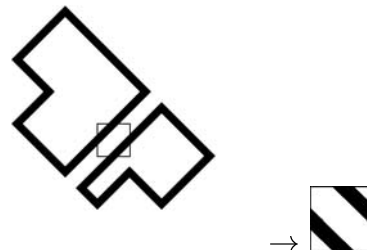
セル内の 2 本の線の間を考えると、それらが同じ曲線上にある場合と異なる曲線上にある場合の 2 通りがある。また、セルの内部状態が 2 種類であることもあわせると次の時間発展ルールを考えることができる。

GCA 時間発展ルール

同じ曲線上のときは
状態を変えない



異なる曲線上のときは
状態を変える

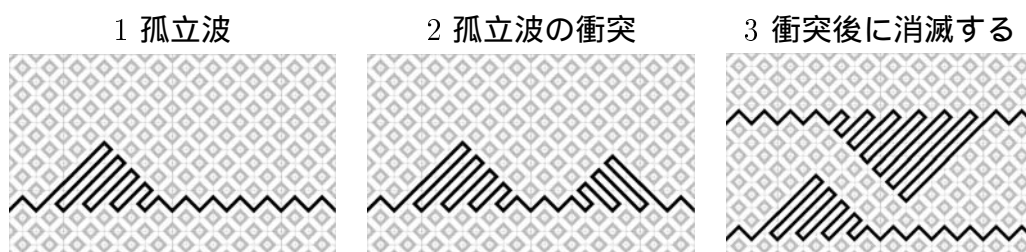


GCA が大域的な情報による時間発展ルールを持つというのは、上記のルールが曲線同士の関係から作られているからである。セル内の線がどの閉曲線上にあるのかは、あらかじめ決められた範囲のセルを見ただけでは判定できず、一般にセル全体を調べなければならない。

時間発展ルールとしては上記のルールとは逆に、同じ曲線上のときは状態を変え、異なる曲線上のときは状態を変えない、とするルールも考えられるが、そのルールでは時間発展の様子が単調であるためここでは省略する。

2.3 GCA の特徴的パターン

この節では GCA の時間発展における特徴的なパターンについて説明する。



- 1 孤立波パターン
このパターンは、山型のギザギザ部分がある方向にパターンが平行移動していく。時間発展ルールは空間的な方向が関係していないので、このパターンは左右および上下に反転させても同様に平行移動するパターンになる。
- 2 孤立波の衝突
1の孤立波パターン同士が向かい合っているパターンである。互いに逆向きに進むパターン同士であるので次第に近づき、ついには衝突する。しかし、その後には大小どちらの山型パターンとも衝突前の形に戻り、パターン同士のすり抜けが起こったことになる。
- 3 衝突後に消滅する
2と同様に逆向きに進むパターン同士なので衝突が起こるが、2とは異なり山の頂上部分同士で衝突が起こる。このパターンでは衝突後しばらくすると、全ての曲線が可能なものの中で最も小さな閉曲線 (図での灰色の正方形の曲線) のみになってしまう。最小の曲線のみで構成されるパターンは時間発展において安定であるため、そのようなパターンになることを消滅と呼ぶことにする。

2.4 GCA の拡張性

GCA では、内部に辺同士を結ぶ線をもつ正方形をセルとし、時間発展ルールはセル内の線同士の関係によって定めていた。これらを踏まえて以下の条件によって拡張を考えると、セルの形状や配置方法など極めて多様な拡張が可能である。これらの条件はいずれも、セル内の線がつながると必ず閉曲線になるようにするものである。特に2つ目の条件から、複数の種類のセルを用いることができることになる。複数種類のセルを用いる場合は、当然時間発展ルールはセルの形状毎に設定する必要がある。

- セルの形状は偶数角形とする。

- セルの種類や並べ方は平面を埋め尽くせるものとする。
- セル内には辺同士を結ぶ線が存在し、1つの辺には1つの線のみがつながっている。

3 GCA の拡張例

GCA の拡張例として次のような設定を考える。

- 四角形と八角形の2種類のセルを用い、それらを交互に並べる。
- 四角形セルはGCAと同じセル、時間発展ルールとする。
- 八角形セルは内部状態を14種類とする [図4]。

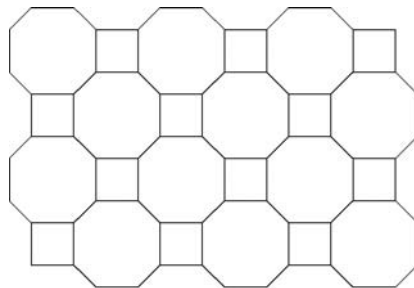


図3: 四角形セルと八角形セルの配置例

3.1 八角形セルについて

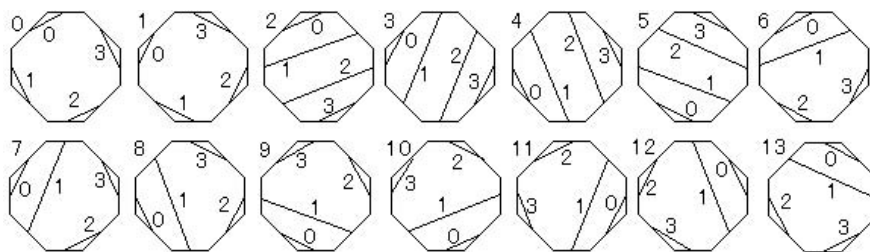


図4: 八角形セルの内部状態

八角形セルの各内部状態は上図の通りである。辺の数とセル内の線の本数が増えただけで基本的にはGCAの正方形セルと同じである。セル内の線に付された番号は4本の線を識別するための番号である。

時間発展ルールを決めるにはセル内の線同士の関係を考えなければならない。GCAでは2通りだけの場合分けで済んだが、この拡張例での八角形セルには[表1]にあるように15通りの場合分けが必要である。表中の r はセル内の線同士の関係を表す変

数である。この場合分けを基に [表 2] のように時間発展ルールを定める。 U はセル内部状態を表す変数である。[表 2] は、ある時刻のあるセルの状態が U 、セル内の線同士の関係が r のときに、次の時刻でセルの状態をどれにするかを示している。八角形セルの内部状態は、状態 0 と 1、2 から 5、6 から 13 はそれぞれ回転すれば同じ状態となるので、時間発展ルールもその対称性を考慮して定めている。

表 1: 八角形セルでの場合分け

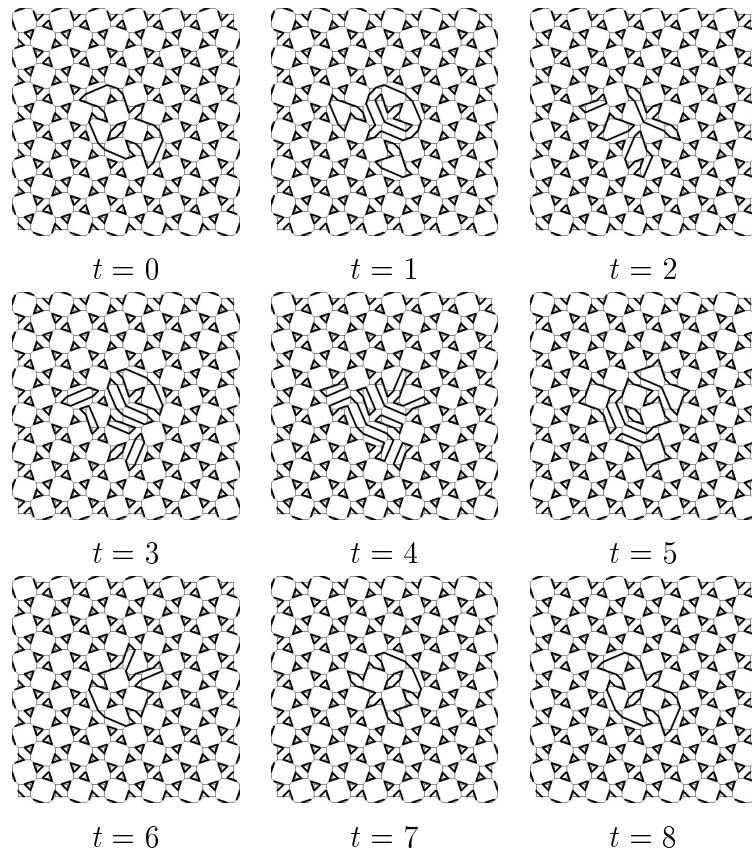
$r = 0$	4 本とも異なる			
$r = 1$	0,1 番の線が同じ	$r = 2$	0,2 番の線が同じ	
$r = 3$	0,3 番の線が同じ	$r = 4$	1,2 番の線が同じ	
$r = 5$	1,3 番の線が同じ	$r = 6$	2,3 番の線が同じ	
$r = 7$	0,1 番、2,3 番の線がそれぞれ同じ			
$r = 8$	0,2 番、1,3 番の線がそれぞれ同じ			
$r = 9$	0,3 番、1,2 番の線がそれぞれ同じ			
$r = 10$	1,2,3 番の線が同じ	$r = 11$	0,2,3 番の線が同じ	
$r = 12$	0,1,3 番の線が同じ	$r = 13$	0,1,2 番の線が同じ	
$r = 14$	4 本とも同じ			

表 2: 八角形セルの時間発展ルール

$U \setminus r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	1	11	2	9	13	4	7	1	1	1	1	1	1	1	0
1	0	12	3	10	6	5	8	0	0	0	0	0	0	0	1
2	4	6	2	0	2	2	10	1	1	1	4	4	4	4	2
3	5	7	3	1	3	3	11	0	0	0	5	5	5	5	3
4	2	8	4	0	4	4	12	1	1	1	2	2	2	2	4
5	3	9	5	1	5	5	13	0	0	0	3	3	3	3	5
6	12	2	9	11	1	1	1	1	1	1	12	12	12	12	6
7	13	3	10	12	0	0	0	0	0	0	13	13	13	13	6
8	6	4	11	13	1	1	1	1	1	1	6	6	6	6	6
9	7	5	12	6	0	0	0	0	0	0	7	7	7	7	6
10	8	2	13	7	1	1	1	1	1	1	8	8	8	8	6
11	9	3	6	8	0	0	0	0	0	0	9	9	9	9	6
12	10	4	7	9	1	1	1	1	1	1	10	10	10	10	6
13	11	5	8	10	0	0	0	0	0	0	11	11	11	11	6

3.2 GCA の拡張 3 特徴的パターン

特徴的な時間発展パターンの 1 例を挙げる。このパターンでは、初期状態では鳥のような形であったものが、8 回の時間発展後に再び初期の鳥型の形状に戻る。



このほかにも、周期的に形を変えながら移動していくものや、自分自身の形を複製しながら大きくなっていくものなどさまざまなパターンが存在する。

4 まとめと今後の課題

まとめ

- GCA は、閉曲線同士の関係という大域的な情報に基き時間発展していく。
- GCA では孤立波的なパターンが存在し、その衝突や消滅が起きる。
- GCA のある拡張では、GCA とは大きく異なる特徴を持ち図形的にも興味深いパターンが見られた。

今後の課題

- GCA やその拡張について、その時間発展のメカニズムを解析する。
- GCA およびその拡張について、どのような性質のルールが構築可能かを模索していく。
- 生物の挙動など、実際の現象との関連性について考察する。