超離散化された波

高 橋　大 輔

1. 苦手なグラフ

中学の頃，グラフを描きましょうという問題に出会っても，直線や放物線のグラフを描くだけでちっとも面白いと思わなかった．同じ図形なら，幾何の問題で三角形や四角形の絵を描いていた方がずっと面白かった．しかしながら，高校生になって exp や sin などの高級な関数に出会い，しかも微分を習うと，がぜんグラフを描く楽しみが増えた．増減表を作って極大・極小を調べたりすると，予想もできない凸凹が浮かんでくるのである．こうなると現金なもので，直線や放物線も基本の可愛いヤツとして認知しようという気になる．

ところが，そういう楽しいグラフを描く問題の一部に，いつまでもイヤなタイプのものがあった．絶対値が出てくる問題である．たとえば

$$y = |2x - |x-3|| \tag{1}$$

のグラフを描きましょう，などと来た日には，場合分けをする面倒くささと，それぞれの場合に応じて折れ線を引くつまらなさの二重苦にさらされる．直線は無限遠方までスッと延びているのが可愛いのであって，途中でクキクキ折れては興ざめである．

でもまあ，入試は済んだことだし，どうもあの手の問題は苦しめるためだけの人工的なものだったのだろう，だって大学に入ったら絶対値はスカッと符号を取るためだけにしか使わないもんなあ，とその後は絶対値のグラフを記憶の片隅に追いやったつもりであった．――ところが，である．最近になって自ら墓穴を掘るという事態を招いてしまった．それも自分が専門としているソリトン理論で．とはいうものの，久しぶりに出会った絶対値はその姿や意味を大きく変えていた．見かけ自体が max という演算に化け，しかもあの大好きな微分と親戚であることが判明したのである．今や筆者にとって絶対値は，長い付き合いを覚悟するけれども，まだ完全に許したわけではない，という微妙な立場にまで昇格している．以下で，この小憎らしい絶対値，いやその実体は max について，しばらくおつきあいを願えれば幸いである．

2. 一定周期の漸化式

唐突であるが，次の漸化式を解いてみよう．

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1} \tag{2}$$

ここで max は大きい方（小さくない方）を答える演算を表し，$\max(A,B) = A$ $(A \geq B$ のとき$)$, B $(A < B$ のとき$)$ と定義する．3 項間漸化式なので，たとえば初期値として X_0, X_1 の 2 つが必要である．この漸化式のイヤなところはもちろん $\max(0, X_n)$ で，この手の漸化式の解き方を習うことはあまりない．答がたちどころにわかった人は，業界人か天才のどちらかである，あって欲しい．凡人の筆者は仕方がないので場合分けをしてがんば

ることにすると，表 1 のような解のパターンが得られる．この表を見ると，どの場合でも $X_5 = X_0$, $X_6 = X_1$ となっている．ということは，任意の初期値から出発して，$X_{n+5} = X_n$ という周期 5 の周期解が常に得られる．

表 1　場合分けによる (2) の解

初期条件	X_0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
$0 \le X_0 \le X_1$	X_0	X_1	$X_1 - X_0$	$-X_0$	$X_0 - X_1$	X_0	X_1
$0 \le X_1 < X_0$	X_0	X_1	$X_1 - X_0$	$-X_1$	$X_0 - X_1$	X_0	X_1
$X_0 < 0 \le X_1$	X_0	X_1	$X_1 - X_0$	$-X_0$	$-X_1$	X_0	X_1
$X_1 < 0 \le X_0$	X_0	X_1	$-X_0$	$-X_1$	$X_0 - X_1$	X_0	X_1
$X_0 < 0, X_1 < 0$	X_0	X_1	$-X_0$	$-X_0 - X_1$	$-X_1$	X_0	X_1

しかしながら，場合分けは最後の手段として温存しておきたい，あるいは，使っても使っていないふりをしていたい．そこで，max に正面から取り組んで解を追ってみよう．すると，

$$
\begin{aligned}
X_2 &= \max(0, X_1) - X_0,\\
X_3 &= \max(0, X_2) - X_1\\
&= \max(0, \max(0, X_1) - X_0) - X_1\\
&= \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1,\\
X_4 &= \max(0, X_3) - X_2\\
&= \max(0, \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1)\\
&\qquad - \max(0, X_1) + X_0\\
&= \max(0, X_0) - X_1,\\
X_5 &= \max(0, X_4) - X_3\\
&= \max(0, \max(0, X_0) - X_1)\\
&\qquad - \max(0, X_0, X_1) + X_0 + X_1\\
&= X_0,\\
X_6 &= \max(0, X_5) - X_4\\
&= \max(0, X_0) - \max(0, X_0) + X_1\\
&= X_1
\end{aligned}
$$

となって，$X_5 = X_0$, $X_6 = X_1$ という結論が得られる．この式変形をただちにフォローできた人は max 演算に相当慣れた方であろう．実は，上の式変形で max に関する基本公式

$$
\begin{aligned}
&\max(A, B) + C = \max(A + C, B + C)\\
&\max(A, \max(B, C)) = \max(A, B, C)\\
&\max(A, B) + \max(C, D)\\
&\qquad = \max(A + C, A + D, B + C, B + D)
\end{aligned}
$$

を用いている.（$\max(A, B, C, \cdots)$ は A, B, C, $\cdots$ のうちで最大のものを答える演算を表す.）たとえば X_4 のところでは，導出の一部で

$$
\begin{aligned}
&\max(0, \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1)\\
&= \max(X_0 + X_1, \max(0, X_0, X_1))\\
&\qquad - X_0 - X_1\\
&= \max(0, X_0, X_1, X_0 + X_1) - X_0 - X_1\\
&= \max(0, X_0) + \max(0, X_1) - X_0 - X_1
\end{aligned}
$$

という変形を行っている．

ところで，前の節で絶対値の話をしていたのに，ここでは max しか登場していない．実は両者は同じものと言ってよく，

$$
\begin{aligned}
&|X| = \max(X, -X),\\
&\max(A, B) = \frac{1}{2}(|A - B| + A + B)
\end{aligned}
$$

によって相互に表現を変えることができる．したがって max を考えることは絶対値を考えることと同じなのである．たとえば (1) は

$$
\begin{aligned}
y &= \max(2x - \max(x - 3, 3 - x),\\
&\qquad \max(x - 3, 3 - x) - 2x)\\
&= 6\max(0, x - 1) - 2\max(0, x - 3)\\
&\qquad - 3x + 3
\end{aligned}
$$

となる（この変形はさらに技巧を要する）.

3. パラレルワールド

またまた唐突であるが，今度は

$$x_{n+1} = \frac{1+x_n}{x_{n-1}} \tag{3}$$

という漸化式を考えよう[1]．この式の場合，なじみ深い四則演算だけなので，ずっと与しやすいと思えるが，**非線形**の漸化式なのでやはり途方に暮れる．筆者はオチを知っているので，とりあえず初期値 x_0, x_1 を用いて次々と計算してみることにする．

$$\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1+x_1}{x_0}, \\
x_3 &= \frac{1+(1+x_1)/x_0}{x_1} = \frac{1+x_0+x_1}{x_0x_1}, \\
x_4 &= \frac{1+(1+x_0+x_1)/x_0x_1}{(1+x_1)/x_0} \\
&= \frac{(1+x_0)(1+x_1)}{(1+x_1)x_1} = \frac{1+x_0}{x_1}, \\
x_5 &= \frac{1+(1+x_0)/x_1}{(1+x_0+x_1)/x_0x_1} \\
&= \frac{(1+x_0+x_1)x_0}{1+x_0+x_1} = x_0, \\
x_6 &= \frac{1+x_0}{(1+x_0)/x_1} = x_1
\end{aligned}$$

なんと，またまた $x_5 = x_0$, $x_6 = x_1$ となった．x_3 あたりでどうなるだろうかと思わせておいて，x_4 以降でうまい具合に分母・分子の約分で簡単になる．このような約分の仕組みは**可積分**と呼ばれる性質のいい方程式群にしばしば見られる現象である．

さて，うすうすお感じかもしれないが，(2) と (3) には強い関係がある．初期値からの両者の答を $n = 2, 3, 4$ のところだけ並べてみよう．

$$\begin{cases} X_2 = \max(0, X_1) - X_0 \\ x_2 = \dfrac{1+x_1}{x_0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_3 = \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1 \\ x_3 = \dfrac{1+x_0+x_1}{x_0x_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_4 = \max(0, X_0) - X_1 \\ x_4 = \dfrac{1+x_0}{x_1} \end{cases}$$

X_n の max, 0, $-$ を，x_n の $+$, 1, / に対応させれば，X から x あるいはその逆の書き換えが可能となる．また，前に述べた X_4 の式変形の一部

$$\begin{aligned}
&\max(0, \max(0, X_0, X_1) - X_0 - X_1) \\
&= \max(0, X_0) + \max(0, X_1) - X_0 - X_1
\end{aligned}$$

も，x_4 の式変形の一部

$$1+(1+x_0+x_1)/x_0x_1 = (1+x_0)(1+x_1)/x_0x_1$$

とみごとに符合している．

4. 超離散化

いったい (2) と (3) はどういうつながりがあるのだろうか．それを読み解くのが**超離散化**である[2,3]．このヘンテコリンな名前の由来は後で述べることにして，とりあえず以下の公式を認めていただこう．

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \tag{4}$$

これを用いれば，まず

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon}$$

という**変数変換**により，(3) を

$$X_{n+1} = \varepsilon \log(1 + e^{X_n/\varepsilon}) - X_{n-1}$$

と変換し，$\varepsilon \to +0$ の**極限**で (4) を使って

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1}$$

と (2) が導かれる．このような変数変換と極限を用いる式変形を超離散化と呼ぶことにする．ただし，解の値の対応を考えると，

$$X_n > 0 \leftrightarrow x_n = \infty, \qquad X_n < 0 \leftrightarrow x_n = 0$$

ということになり，X_n が x_n の零点や発散点を拾っていることがわかる．方程式の性質を調べるのに零点や特異点の挙動を調べるという常套手段があるが，まさに X_n はそれを行っている．重要なのは，(4) の他に

$$\begin{aligned}
\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\right) \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} \times e^{B/\varepsilon}) &= A + B, \\
\left(\lim_{\varepsilon\to+0}\right) \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} \,/\, e^{B/\varepsilon}) &= A - B
\end{aligned}$$

を加えてできる基本演算の対応

$$+ \leftrightarrow \max, \qquad \times \leftrightarrow +, \qquad / \leftrightarrow -$$

であり，代数の変更による方程式・解の変換が行われたのである．なお，max と ± を基本演算とする代数は**マックス–プラス代数**と呼ばれる．

5. リミットサイクル

とはいうものの，上の一例だけではタマタマ感が強すぎる．そこで，上の例を少しひねったものを次に紹介する．(2) の max の中の X_n を X_{n-5} に変更すると

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-5}) - X_{n-1} \tag{5}$$

という方程式が得られる．(2) では任意の初期値で $X_{n+5} = X_n$ という周期解が得られたので，この方程式にもそれと同じものが解として存在する．ただ，こちらの方では，形式的には $X_{n-5} \sim X_n$ の 6 つの X で X_{n+1} を決める形になっているので解空間の次元が非常に高く，それ以外の解もたくさんあるはずである．ちょっと次元が高すぎて困るが，(5) をよくよく見ると n が奇数の X_n は奇数のものから，偶数の X_n は偶数のものから決まる形になっている．ということは (5) は

$$X_{n+1} = \max(0, X_{n-2}) - X_n \tag{6}$$

としても本質は変わらない．すると初期値は X_0, X_1, X_2 の 3 つ，解空間は 3 次元ですむ．試しに適当な初期値から計算した X_n の値を順に並べると，

$$1,\ 2,\ 3,\ -2,\ \underline{4,\ -1,\ 1},\ 3,\ -3,\ \underline{4,\ -1,\ 1},\ \cdots$$
$$3,\ 2,\ 1,\ 2,\ 0,\ \underline{1,\ 1,\ -1},\ 2,\ -1,\ \underline{1,\ 1,\ -1},\ \cdots$$

となる．どちらの例でも下線を引いたところが繰り返しになるので，途中から周期 5 の周期解に落ち込んでいる．

実は，(6) では任意の初期値から周期 5 の解に落ち込むことが証明できる．詳細は省略するが，まず，(6) の解のうち最初から周期 5 になるものは

$$\min(X_{n-2}, X_n, X_{n-2} + X_n) + X_{n-1} = 0 \tag{7}$$

を満たしていることがわかる．(min は，$\min(A, B) = -\max(-A, -B)$ より max の言い換えに過ぎない．）さらに上式の左辺に絶対値をつけたもの，すなわち

$$F_n = |\min(X_{n-2}, X_n, X_{n-2} + X_n) + X_{n-1}|$$

は，任意の初期値に対し n について広義単調減少であることも証明できる．広義単調減少なのでもう少し補足が必要であるが，初期値の時点で $F_n > 0$ だった解が n の増加とともに F_n が減少し，最後には $F_n = 0$，つまり (7) が表す周期解に落ち込む．

解空間において (7) が表す図形は，力学系の用語で**リミットサイクル**（極限軌道）と呼ばれるものに対応し，それほど目新しいものではない．ところが，超離散化を通じて同じことがもう片方の世界で起こるのである．漸化式

$$x_{n+1} = \frac{1 + x_{n-2}}{x_n} \tag{8}$$

は変換 $x_n = e^{X_n/\varepsilon}$，極限 $\varepsilon \to +0$ の超離散化を通じて (6) に帰着する．また

$$f_n = \frac{x_{n-2}x_{n-1}x_n}{1 + x_{n-2} + x_n} + \frac{1 + x_{n-2} + x_n}{x_{n-2}x_{n-1}x_n}$$

が狭義単調減少な量であることを (8) だけから示すことができる．$n \to \infty$ で f_n は最小値 2 に収束し，このとき

$$\frac{x_{n-2}x_{n-1}x_n}{1 + x_{n-2} + x_n} = 1 \tag{9}$$

が成り立つ．そしてこの式が周期 5 の周期解を表すリミットサイクルとなっている．これら性質の前提条件として任意の n で $x_n > 0$ を仮定する必要があるが，$x_n = e^{X_n/\varepsilon}$ の変換を考えることや，x_0, x_1, x_2 が正なら (8) の解は常に正ということを考慮するとそれほど強い条件ではない．そして，もちろん f_n や (9) も超離散化によって向こうの世界の F_n や (7) にバッチリ帰着する．

6. 波もまた

では，いよいよ本特集号のテーマ，波の世界の登場である．**超離散ロトカ–ボルテラ方程式**と呼ばれる次の偏差分方程式を考えよう[2,3]．

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \max(0,\, U_{j-1}^n - 1) - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1) \qquad (10)$$

U_j^n の 2 つの添え字 $j,\, n$ はともに整数で，j が空間座標を，n が時間を表すとする．また，添え字の範囲は $-\infty < j < \infty$, $-\infty < n < \infty$ を考える．(10) は n についての時間発展方程式と見ることができ，ある n におけるすべての j に対する U の値と，$\lim_{|j|\to\infty} U_j^n = 0$ という境界条件があれば，時間正負方向に U の値を計算できる．

(10) の解のひとつに

$$U_j^n = F_{j-1}^n + F_{j+2}^{n+1} - F_j^n - F_{j+1}^{n+1},$$
$$F_j^n = \max(0, 2j - n)$$

がある．ただし，この解を (10) に直接代入して確認するだけでも難しく，解自身をノーヒントで見つけるのは至難の業である．詳しいことは参考文献 2, 3) を見てほしい．

U_j^n は $2j-n$ だけに依存するので，j を横軸にして U_j^0 のグラフを描けばそれを時間とともに 1/2 の速さで動かせばよい．U_j^0 は

$$U_j^0 = \max(0, 2j-2) + \max(0, 2j+3) - \max(0, 2j) - \max(0, 2j+1)$$

であり，$j = -3/2,\, -1/2,\, 0,\, 1$ で折れ曲がる図 1 のようなグラフになる．このグラフを n 軸方向に

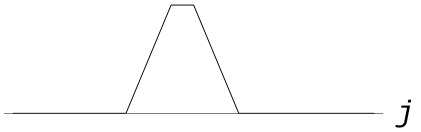

図 1　U_j^0 のグラフ

速さ 1/2 でずらしていけば U_j^n のグラフとなり，図 2 のようにななめの台ができる．

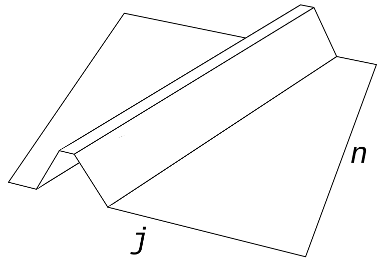

図 2　1 ソリトン解

$j \rightarrow$

$n \downarrow$

```
. . . 2 1 . . . . . .
. . . 1 2 . . . . . .
. . . . 2 1 . . . . .
. . . . 1 2 . . . . .
. . . . . 2 1 . . . .
. . . . . 1 2 . . . .
. . . . . . 2 1 . . .
. . . . . . 1 2 . . .
. . . . . . . 2 1 . .
```

図 3　格子点での値

さらに $j,\, n$ が整数の格子点での U_j^n の値を並べると，図 3 のようになる．ただし . は 0 を表す．U の値はすべて整数となっている．よく考えればこれは当たり前で，(10) に従えば格子点上で初期値が整数なら任意の時刻での U の値も整数となる．

もっと複雑な解として，たとえば

$$U_j^n = F_{j-1}^n + F_{j+2}^{n+1} - F_j^n - F_{j+1}^{n+1},$$
$$F_j^n = \max(0,\, j,\, 2j-n,\, 5j-4n,\, 3j-n-2,\, 6j-4n-2,\, 7j-5n-4,\, 8j-5n-8)$$

がある．格子点のところだけで U の値を調べると図 4 のようになる．この数字の動きを**波**と見立てよう．図の上の方で，隣の数字の和が 6, 3 の波がそれぞれ平均速度 4/5, 1/2 で右に動き，和が 2 の波が速さ 0 つまりその場でじっとしている．この速さの違いにより図の中央付近でぶつかり合う．ところが図の下の方では，再び前と同じ 3 つの波が順序を入れ替え，軌道をずらして存在している．速い波ほど右にいるので以降は互いにぶつからない．

以上のようにそれぞれの波が相互作用にかかわらず自己を保存するような系は**ソリトン系**と呼ば

$j \rightarrow$

```
...15...12.....11.............
....24...21....11.............
.....33..12....11.............
......42..21...11.............
.......51.12...11.............
.......15..21..11.............
........24.12..11.............
.........33.21.11.............
..........4212.11.............
...........512111.............
...........151211.............
...........115121.............
...........111512.............
...........11.2421............
...........11.1242............
...........11..2151...........
...........11..1215...........
...........11...2124..........
...........11...12.33.........
...........11....21.42........
...........11....12..51.......
...........11.....21.15.......
...........11.....12..24......
...........11......21..33.....
...........11......12...42....
...........11.......21...51...
```

$n \downarrow$

図 4　3 ソリトン解

れ，ひとつひとつの波を**ソリトン**という．しかし，図のような数字を本当にソリトンと思っていいのだろうか．たとえば，ばらばらに並んだ数字の列を小さい順に並べ直す**ソーティング**という操作がある．5, 3, 6, 2, 4, 1 が与えられると 1, 2, 3, 4, 5, 6 と並べ直す操作である．見立てだけでいいならソーティングの数字もソリトンと言い張ることができる．

そこで (10) が単なる見立てでない証拠を示そう．**差分ロトカ–ボルテラ方程式**と呼ばれる次のソリトン方程式がある．この式もソリトン解を豊富に持っている．

$$\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1} - u_j^n) = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1}$$

式を整理した後に $u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$, $\delta = e^{-1/\varepsilon}$ という変換を行い，$\varepsilon \to +0$ の極限をとる，すなわち超離散化を行えば，この式から (10) が得られる．一方，$u_j^n = u_j(n\delta)$ とし，$\delta \to 0$ によって時間に関する**連続極限**をとると

$$\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1})$$

という $u_j(t)$ に関する連立常微分方程式が得られる．これは**ロトカ–ボルテラ方程式**と呼ばれる生態系のモデルになっている．この方程式もソリトン解を持っている．そしてさらに，$u_j(t) = 1 + \epsilon^2 v(\epsilon(j-2t), \epsilon^3 t/3)$ とし，$\epsilon \to 0$ として空間に関する連続極限をとると，

$$v_t + 6vv_x + v_{xxx} = 0$$

という偏微分方程式が得られる．この方程式は**コルテヴェグ–ド・フリース方程式**（KdV 方程式）と呼ばるソリトン系の代表格であり，底が浅い水面での小振幅・長波長の波の運動のモデル方程式となっている．この方程式の 3 ソリトン解（もちろん厳密解である）をプロットすると，たとえば図 5 のようになる．自己を保存するというソリトンの本質は図 4 と同じである．また，ソリトンを表す厳密解の代数構造も，KdV 方程式, 微分・差分・超離散ロトカ–ボルテラ方程式で同一である．

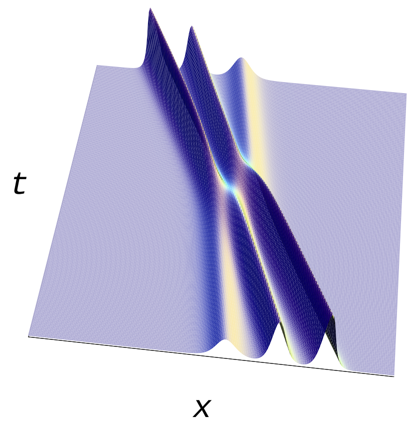

図 5　KdV 方程式の 3 ソリトン解

さてここで，超離散化の「超」の由来について述べる．超離散化で得られる方程式は，max と ± が基本演算となるマックス–プラス代数によって記述される．ということは，式中に現れる係数・定数や初期値・境界値などがすべて整数であれば，任意の時刻の状態値（たとえば (10) の U）も整数になる．これによって，従来の差分方程式で唯一離散化できなかった状態変数を自然に離散化でき，空間・時間変数とともに**全変数離散化**のシナリオが完成する．もうこれ以上離散化できる変数がないまで離散化した，という意味で「超」という接頭辞が付くのである．

7. あれも波，これも波

前節の途中でソーティングはソリトンの見立てに過ぎないと述べたが，実はソリトン方程式の超離散化からソーティング・アルゴリズムも得られる[4]．大きい波が小さい波を追い越していくのだからそのようなことは不思議ではない．重要なことは，既成概念にとらわれないモノの見方をどれだけ獲得できるかである．アホなことを言いだした者の勝ちとは言い過ぎかもしれないが，科学の本質がそこにあるのも事実である．

最後に，波というお題に関係するアヤシイ見立てを紹介する．**コラッツ予想**（角谷の問題，$3x+1$ 問題）と呼ばれる有名な予想がある[5]．任意の自然数に対し，奇数のときは 3 倍してから 1 を加え，偶数のときは 2 で割るという操作を繰り返すと，最後には 1, 4, 2 というループに必ず落ち込むという予想であり，未解決問題となっている．この予想は，偶数のとき 2 で割るという操作を省略して以下のように言い換えることができる.「自然数を 3 倍し，さらにその数の 2 進数表示で最も下位の 1 の桁にさらに 1 を加える．この操作を繰り返し行うと，最後には必ず一桁だけ 1 になる数，つまり 2 のべき乗になる.」

自然数 123 に対してこの操作を行った例を図 6 に示す．各行は右を上位桁とする 2 進表示の数を表し，一回の操作ごとに得られる新しい数を次の行に書いている．3 倍する操作も 2 進数では簡単で，右へ一桁ずらして元のものと和をとればよい．図を見ると，最後には一桁だけの 1 が一回の操作ごとに二桁右へずれるパターンになっている.（これが元の問題の 1, 4, 2 のサイクルに相当する.）予想が正しければ，任意のビット列に上記の手続きを施すと最後にはいつもそうなる．

これは波の問題に見えないだろうか．筆者には，ビット列で表された適当な形の波が最後には同じ定常波に落ち込むという，波の**漸近定常解**の問題に見えるのである．もちろんこの見立てには強引な点があり，未解決問題をこねくることしかできない素人感覚の危うさも自覚している．しかし，0 と 1 のシンプルなゲームが超離散化を介して微分方程式と結びついた例がいくつかある[2,3,6]．たとえば先述の超離散ロトカ–ボルテラ方程式も**箱玉系**という名前の 2 進ゲームに帰着する．このような例を数回経験すると，コラッツ予想ですら波に見えて仕方がない．超離散化を体験した人間は，この妖しく心地よい感覚にとりつかれてしまうのである．

上位桁 →

```
11.1111...............................
.1..111.1.............................
...11.1...1...........................
....1...1.11..........................
......1.111..1........................
.........11.111.......................
..........1..11.1.....................
............11....1...................
.............1.1..11..................
.................11..1................
..................1.111...............
.....................11.1.............
......................1...1...........
........................1.11..........
...........................1.1........
...............................1......
.................................1....
...................................1..
```

図 6　コラッツ予想，. は 0 を表す

参考文献

1) R.Hirota and H.Yahagi, “Recurrence Equations, An Integrable System”, J. Phys. Soc. Jpn. **71** (2002) 2867–2872
2) “特集 超離散”, 数理科学 **435** (1999)
3) 中村佳正編,「可積分系の応用数理」,（裳華房，2000）
4) A.Nagai, D.Takahashi and T.Tokihiro, “Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm”, Phys. Lett. A **255** (1999) 265–271
5) R. ガイ,「数論における未解決問題集」,（一松信監訳，シュプリンガー・フェアラーク・東京，1994）
6) K.Nishinari and D.Takahashi, “Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule–184 cellular automaton”, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 5439–5450

（たかはし・だいすけ，早稲田大学）