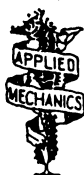


研究集会報告 13ME-S4

非線形波動現象の理論と応用



九州大学応用力学研究所

2002年4月

Reports of RIAM Symposium

No.11ME-S4

*Nonlinear Wave Phenomena and Mathematical Structure of
their Models*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 8 - 10, 1999

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

March, 2000

研究集会「非線形波動現象の理論と応用」報告集

2001年11月14日～16日

研究代表者 早稲田大学工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

目 次

1. 交通流セルオートマトンモデルにおける Euler-Lagrange 対応 1
龍谷大学工学部 松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)
龍谷大学工学部 西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)
2. 信号機付き Burgers Cellular Automaton 6
早稲田大学工学部 橋詰 真美 (HASHIZUME Mami)
早稲田大学理工学研究科 志田 篤彦 (SHIDA Atsuhiko)
早稲田大学工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
3. 周期離散戸田方程式と周期箱玉系 12
東京大学数理科学研究科 君嶋 妙子 (KIMIJIMA Taeko)
東京大学数理科学研究科 時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)
4. 結合型 KP ヒエラルキーから導かれた結合型戸田格子とその簡約 18
東京大学数理科学研究科 ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)
5. cKP 方程式系のさまざまな解について 24
東京大学数理科学研究科 磯島 伸 (ISOJIMA Shin)
東京大学数理科学研究科 ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)
東京大学数理科学研究科 薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)
6. Bilinear Forms of Relativistic Deformation of Integrable Lattices 30
九州大学応用力学研究所 丸野 健一 (MARUNO Ken-ichi)
Dep. Math, Univ. South Florida Wen-Xiu Ma
7. Supersymmetric Soliton Equations 36
CTP, Ecole Polytechnique, France A. Ramani
Inst. Phys. and Nucl. Eng., Romania A. S. Carstea
GMPIB, Univ. Paris VII, France B. Grammaticos
8. 拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$ の KNY 双有理表現の拡張として得られる $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ 43
東京大学数理科学研究科 竹縄 知之 (TAKENAWA Tomoyuki)

9. q -Painlevé III 方程式: 導出・対称性・特殊解	53
九州大学数理学研究院	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
神戸大学自然科学研究科	木村 欣司 (KIMURA Kinji)	
10. q -Painlevé V 方程式の有理解	61
神戸大学自然科学研究科	増田 哲 (MASUDA Tetsu)	
11. トロイダル対称性に基づくソリトン方程式の(2+1)次元化	69
立教大学理学部	笈 三郎 (KAKEI Saburo)	
12. 非一様性をもつ光ファイバー中のソリトン伝播	75
九州大学理学府	久保田 陽二 (KUBOTA Yoji)	
九州大学理学研究院	小田垣 孝 (ODAGAKI Takashi)	
13. 離散非線形シュレーディンガー方程式における変調不安定解の相空間構造	81
名古屋大学理学研究科	後藤 振一郎 (GOTO Shin-itiro)	
名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
名古屋大学理学研究科	山田 裕康 (YAMADA Hiroyasu)	
14. 非局所的な非線形シュレーディンガー方程式の多重ソリトン解とその性質	87
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	
15. 微分型非線形シュレーディンガー方程式の拡張について	94
東京大学数理科学研究科	土田 隆之 (TSUCHIDA Takayuki)	
16. 高温超伝導体で見られる非線形局在現象	100
日本原子力研究所	町田 昌彦 (MACHIDA Masahiko)	
日本原子力研究所	佐々 成正 (SASA Narimasa)	
17. 斜面上の粉体流の不安定性	107
九州大学理学府	御手洗 菜美子 (MITARAI Namiko)	
京都大学人間・環境学研究科	早川 尚男 (HAYAKAWA Hisao)	
九州大学理学研究院	中西 秀 (NAKANISHI Hiizu)	
18. 湾曲境界面下における渦糸の運動に関する実験	113
横浜国立大学工学研究科	舟久保 悠子 (FUNAKUBO Yuko)	
横浜国立大学工学研究院	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)	
19. 回転するループソリトン	120
富山大学工学部	角島 浩 (KAKUHATA Hiroshi)	
日本大学理工学部	紺野 公明 (KONNO Kimiaki)	

20. ソリトンの斜め相互作用について	九州大学応用力学研究所	辻 英一 (TSUJI Hidekazu)	128
	九州大学応用力学研究所	及川 正行 (OIKAWA Masayuki)	
21. ギンツブルグ・ランダウ方程式とパターン形成・ダイナミクス	龍谷大学理工学部	森田 善久 (MORITA Yashihisa)	134
22. 興奮性反応拡散方程式におけるパルスの分裂理論	九州大学理学研究院	早瀬 友美乃 (HAYASE Yumino)	144
	広島大学理学研究科	太田 隆夫 (OHTA Takao)	
23. 進行パターンの変調を記述する拡散弱不安定な位相方程式	名古屋大学理学研究科	増富 祐司 (MASUTOMI Yuji)	149
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
24. 離散ミッタークレフラー関数	大阪大学基礎工学研究科	永井 敦 (NAGAI Atsushi)	156
25. 離散可積分特異値計算法の高速化とその数値安定性	大阪大学基礎工学研究科	岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi)	163
	京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
	京都大学情報学研究科	辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)	
26. 離散可積分系のある性質について	東京都立大学理学研究科	山本 純一 (YAMAMOTO Jun-ichi)	168
	東京都立大学理学研究科	斉藤 暁 (Saito Satoru)	
	横浜国立大学工学研究院	斉藤 革子 (Saito Noriko)	
	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
27. 離散写像に伴う Hamiltonian Flow	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	174
	東京都立大学理学研究科	斉藤 暁 (Saito Satoru)	
	東京都立大学理学研究科	首藤 啓 (SHUDO Akira)	
	東京都立大学理学研究科	山本 純一 (YAMAMOTO Jun-ichi)	
28. Lie symmetry による境界値問題の厳密解の構成	名古屋大学理学研究科	村田 宗一 (MURATA Souichi)	180
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
29. 標準形理論による摂動 KdV 方程式の解析	大阪大学基礎工学研究科	平岡 裕章 (HIRAOKA Yasuaki)	186
	オハイオ州立大数学科	児玉 裕治 (KODAMA Yuji)	

30. Role of Nonlinear Rotating Modes in Establishing Normal Heat Conduction in One-Dimensional Nonlinear Lattices	190
Inst. Phys. and Tech., Russia	A. V. Savin	
大阪工業大学情報科学部	武野 正三 (TAKENO Shozo)	
31. ハミルトン系の全保存量を保つ差分化	196
大阪大学基礎工学研究科	峯崎 征隆 (MINESAKI Yukitaka)	
京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
32. 形式的に完全可積分な4階連立発展方程式の数え上げ	202
同志社大学工学部	渡邊 芳英 (WATANABE Yoshihide)	
広島大学工学研究科	伊藤 雅明 (ITO Masaaki)	
33. Darboux-Lamé Equations and Iso-Monodromic Deformation	209
同志社大学工学部	大宮 真弓 (OHMIYA Mayumi)	
	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
34. 古典微分幾何における可積分系 (非線型ダランベール公式の観点から)	215
福岡大学理学部	井ノ口 順一 (INOBUCHI Jun-ichi)	
35. 可積分系の幾何学的理論	222
力学系研究所	神部 勉 (KAMBE Tsutomu)	
36. 再帰方程式とは	228
早稲田大学理工学研究科	志田 篤彦 (SIDA Atsuhiko)	
早稲田大学理工学部	岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
37. 超離散化可能な再帰方程式系	233
早稲田大学理工学部	岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
38. 再帰方程式 I, II	239
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
早稲田大学理工学研究科	矢作 秀之 (YAHAGI Hideyuki)	

信号機付き Burgers Cellular Automaton

早稲田大学理工学部 橋詰真美 (Hashizume Mami)
志田篤彦 (Shida Atsuhiko)
高橋大輔 (Takahashi Daisuke)

1 従来のBCAモデル

Burgers 方程式と拡散方程式を差分化・超離散化することにより以下の系が得られる [1].

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_j^t + \frac{L}{2} - M, F_{j+1}^t) \quad (1)$$

$$\downarrow \quad U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + \frac{L}{2}$$

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (2)$$

この式 (2) が BCA と呼ばれているものであるが、さらに、この式は以下のルールを定めることにより、交通流のモデルとなる。

- 道路を格子点 (サイト) に区切り, j とする.
- U_j^t は時刻 t , サイト j における車の台数とする. ($U_j^t = \{0, 1, \dots, L\}$)
- それぞれのサイトの容量は L 台とする.
- 1 時刻あたり隣のサイトへ動ける車の最大数は M 台とする. (移動台数の制限)
- これらの制限の下, サイト j にいる車は $j+1$ の空きスペースを埋めるために動く.

2 SBCA の導入

BCA(2) において M は定数であり, 時刻 t とサイト j によらない定数であった. 以下では, この定数 M を時間 t と空間 j に依存した外部変数 M_j^t に置き換える. すると以下の系が得られる.

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_j^t + \frac{L}{2} - M_j^t, F_{j+1}^t) \quad (3)$$

$$\downarrow \quad U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + \frac{L}{2}$$

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (4)$$

すなわち, 線形化可能な形を保ったまま, 定数 M を時間空間依存性のある変数 M_j^t に自然に置き換えることができる. さらに, この M_j^t は時間・空間に関して任意の値を与えて構わないので, 確率変数にすることも可能である.

式 (4) は以下の交通流のモデルを表している.

- 道路を格子点 (サイト) に区切り, j とする.
- U_j^t は時刻 t , サイト j における車の台数とする. ($U_j^t = \{0, 1, \dots, L\}$)
- それぞれのサイトの容量は L 台とする.
- 時刻 t で, サイト $j-1$ から j へ動ける車の最大数を M_j^t とする.
- これらの制限の下, サイト j にいる車は $j+1$ の空きスペースを埋めるために動く.

この新しいモデルでは, M_j^t は時刻 t でのサイト $j-1$ から j への車の台数の制限となっている. 例えば, $L=1$ の時, M_j^t を

$$j=5 \text{ のとき } M_j^t = \begin{cases} 0 & (t \neq 3n) \\ 1 & (t = 3n) \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

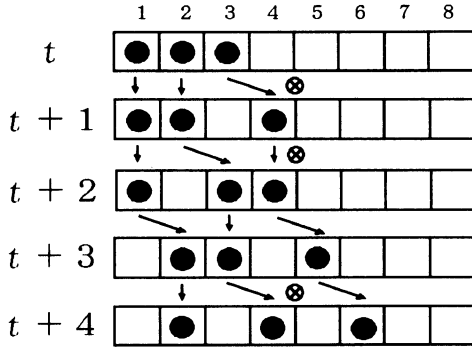
$$j \neq 5 \text{ のとき } M_j^t = 1$$

と定めると, 車は $j=4$ から $j=5$ へ 3 回に 1 回の割合で進めることになる. つまり, M_j^t はサイト $j-1$ と j の間に設置された“信号機”の役割を果たすのである. また, M_j^t の値を乱数で生成すると確率的な信号機を設置したことになる.

そこで, 式 (4) を信号機付き (Signalized) あるいは確率的 (Stochastic) という意味を込めて, **Signalized/Stochastic Burgers Cellular Automaton (SBCA)** と呼ぶことにする.

では、簡単な例を用いてこの新しいモデルの解のふるまいについて確認する。

例) $L = 1$ とし、前述の M_j^t を用いた場合を想定する。



この図で、横軸は空間、縦軸は時間、●は車を表す。また、 $M_j^t = 0$ を表す記号として、 t と $t+1$ の間の j と $j-1$ の中間の位置に ⊗ を置く。

次に、車の動きを1台ずつ観察する。まずは、時刻 t から $t+1$ での車の動きをみる。サイト $j=1$ にいる車は前のサイト $j=2$ が空いていないので、時刻 $t+1$ ではそのままサイト $j=1$ に留まる。サイト $j=2$ にいる車も前が空いていないのでサイト $j=2$ に留まる。サイト $j=3$ にいる車は前が空いているので、時刻 $t+1$ ではサイト $j=4$ に移動する。

次に、時刻 $t+1$ から $t+2$ での車の動きをみる。サイト $j=1$ にいる車は前が空いていないのでサイト $j=1$ に留まる。サイト $j=2$ にいる車は前が空いているので一つ進む。ここまでは、BCA モデルと全く同じ動きである。

そして、時刻 $t+1$ でサイト $j=4$ にいる車は前は空いているが、 $M_5^{t+1} = 0$ であるので、サイト $j=4$ に留まる。そして時刻 $t+2$ から $t+3$ では $M_5^{t+2} = 1$ になりかつ前が空いているので、サイト $j=5$ に進む。このように、信号機 M_j^t によって車の動きが制御されるところが SBCA モデルの特徴である。

3 SBCA と noisy-Burgers 方程式の関係について

次に、SBCA と連続の方程式との関係について述べる。BCA は Burgers 方程式の超離散化で得られていたが、SBCA は Burgers 方程式にノイズの入った noisy-

Burgers 方程式の超離散化により得られる [2, 3]。以下にその導出を示す。

まず noisy-Burgers 方程式とは、次式で表される方程式である。

$$v_t = v_{xx} + 2vv_x + \eta_x \quad (5)$$

$\eta = \eta(x, t)$ は Burgers 方程式に対する摂動である。この noisy-Burgers 方程式は、Cole-Hopf 変換 $v = f_x/f$ によって、拡散方程式 $f_t = f_{xx}$ にノイズの入った摂動付き拡散方程式

$$f_t = f_{xx} + \eta f \quad (6)$$

に変換される。この式の空間と時間を差分化すると、次の摂動付き差分拡散方程式が得られる。

$$\frac{f_j^{t+1} - f_j^t}{\Delta t} = \frac{f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t}{(\Delta x)^2} + \eta_j^t f_j^t \quad (7)$$

ここで、 Δt と Δx はそれぞれ t と x の差分間隔を表す。

次に、差分 Cole-Hopf 変換 $u_j^t = f_{j+1}^t/f_j^t$ を使って、式 (7) を変形する。すると、次の差分 noisy-Burgers 方程式

$$u_j^{t+1} = u_{j-1}^t \frac{1 + \frac{1-2\delta+\Delta t\eta_{j+1}^t}{\delta} u_j^t + u_j^t u_{j+1}^t}{1 + \frac{1-2\delta+\Delta t\eta_j^t}{\delta} u_{j-1}^t + u_{j-1}^t u_j^t} \quad (8)$$

が得られる。ここで、 $\delta = \Delta t/(\Delta x)^2$ である。なお、 $v(j\Delta x, t\Delta t) = (\log u_j^t)/\Delta x$ とし、 $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ とすると、式 (8) から式 (5) が得られる。

さらに、次の変数変換を使って、式 (8) を超離散化する。

$$u_j^t = e^{(U_j^t - \frac{1}{2})/\epsilon} \\ \frac{1 - 2\delta + \Delta t\eta_j^t}{\delta} = e^{(\frac{1}{2} - M_j^t)/\epsilon} \quad (9)$$

すると、式 (8) から、 $\epsilon \rightarrow +0$ で超離散 noisy-Burgers 方程式

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(M_j^t, U_{j-1}^t, L - U_j^t) \\ - \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t)$$

が得られる。この式は SBCA (4) に他ならない。よって、SBCA が noisy-Burgers 方程式の超離散化により得られることがわかった。

変数変換

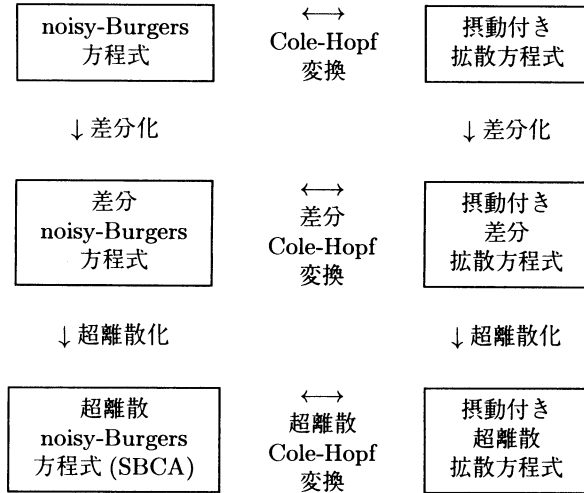
$$f_j^t = \delta^t e^{F_j^t/\epsilon} \quad (10)$$

と式 (9) を用いれば, 式 (7) から $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限で次の摂動付き超離散拡散方程式が得られる. ここで, δ^t は δ の t 乗である.

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_j^t + \frac{L}{2} - M_j^t, F_{j+1}^t)$$

これは式 (3) と等しい.

以上の関係全体を表にまとめる.



4 SBCA モデルの基本図

交通流モデルの妥当性の検証に基本図を用いることがしばしばある. そこで SBCA によってどのような基本図が得られるかを調べる.

まず, 基本図とは「密度と交通流率の関係をプロットした図」であり, 横軸に密度, 縦軸に交通流率をとる. そして密度とは「単位距離あたりの車の平均台数」のことであり, 交通流率とは「単位距離あたりの車の平均運動量」のことである. SBCA において密度 ρ と交通流率 q は次式で定義される.

$$\rho = \frac{1}{KL} \sum_{j=1}^K U_j^t$$

$$q = \frac{1}{KL} \sum_{j=1}^K \min(M_{j+1}^t, U_j^t, L - U_{j+1}^t)$$

ここで, K はサイト数である.

図 1 と図 2 に M_j^t が定数の場合, つまり BCA と等価な場合の基本図を示す. 図 1 は $L = M = 1$, 図 2 は $L = 3, M = 1$ の時の図である.

なお, 以下では特に断りが無い場合は $L = 1, K = 50$ とし, 空間方向は周期 K の周期境界条件を用いることとする.

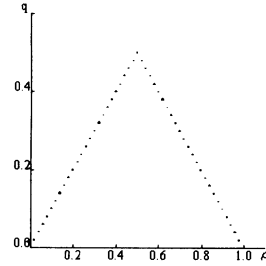


図 1: $L = M = 1$ の時の基本図

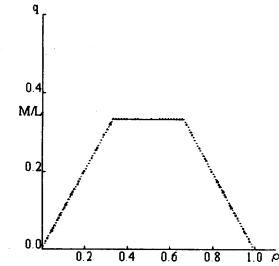


図 2: $L = 3, M = 1$ の時の基本図

4.1 周期的な信号機の場合

4.1.1 信号機が 1 台

まずは, M_j^t が一ヶ所でのみ周期的な変動をする場合を考える. 図 3, 図 4, 図 5, 図 6 は M_j^t を

$$j = 20 \text{ のとき } M_j^t = \begin{cases} 0 & (t \neq 3n) \\ 1 & (t = 3n) \end{cases} \quad (n \text{ は整数})$$

$$j \neq 20 \text{ のとき } M_j^t = 1$$

とした時の図である. つまり, サイト $j = 19, 20$ 間に 3 時刻毎に 1 回車を 1 台通す信号機を設置した場合になっている. (以下, このような M_j^t を表すのに, 「 $M_{20}^t = 001$ の繰り返しでそれ以外では $M_j^t = 1$ 」という表現を用いる) そして, 図 3, 図 4, 図 5 はそれぞれ密度を $\rho = 0.3, \rho = 0.5, \rho = 0.8$ とした時の車のパターンを表している. また, 図 6 は基本図である.

数値実験の結果から, 車のパターンは, t が大きいところで周期的になっていて, $\rho < 1/3$ では右ヘシフト, $1/3 \leq \rho \leq 2/3$ 付近では定在的, $\rho > 2/3$ では左ヘシフトしていることがわかる. そして, 交通流率は

$$q^t = \begin{cases} \rho & (\rho < 1/3) \\ 1/3 & (1/3 \leq \rho \leq 2/3) \\ 1 - \rho & (\rho > 2/3) \end{cases}$$

となっている.

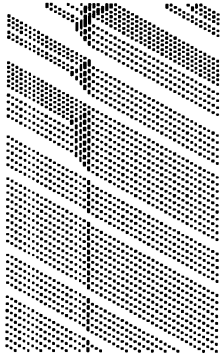


図 3: $\rho = 0.3$ の時の車のパターン

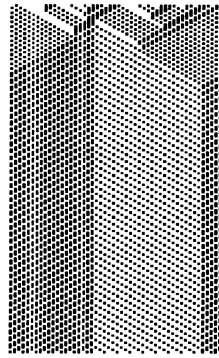


図 4: $\rho = 0.5$ の時の車のパターン

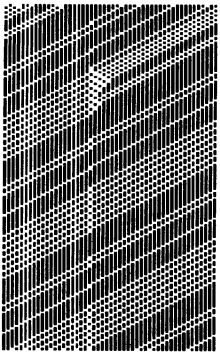


図 5: $\rho = 0.8$ の時の車のパターン

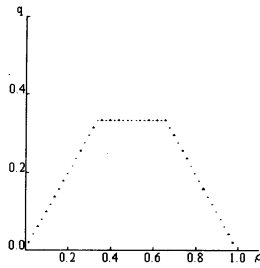


図 6: 基本図

4.1.2 信号機が 2 台

次に、規則的な信号機を 2 台設置した時を考える。

図 7 は “ $M_{20}^t = 00101$ の繰り返し, $M_{30}^t = 0000111$ の繰り返し, それ以外は $M_j^t = 1$ ” とした場合の基本図である。少し分かりにくいのが、図 7 はきれいな台形ではなく、台形の脚の部分折れ線になっている。図 8 に、図 7 の傾きを各密度ごとにプロットした図を示す。図 8 は横軸に密度、縦軸に隣接点から計算される傾きをプロットしている。図 8 により、図 7 の台形の脚が折れ線になっていることがはっきりと確認できる。この台形の脚が折れ線になるのはどういう場合かという問題を、一般の場合に解決することにはいまだ成功していない。しかし少なくともわかっているのは、信号機のパターンと信号機同士の間隔(またはサイトの数)のそれぞれの組み合わせにより、脚がまっすぐな台形と脚の折れた台形に分かれることである。

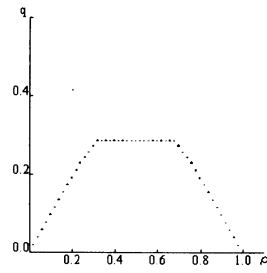


図 7: “ $M_{20}^t = 00101$ の繰り返し, $M_{30}^t = 0000111$ の繰り返し” の時の基本図

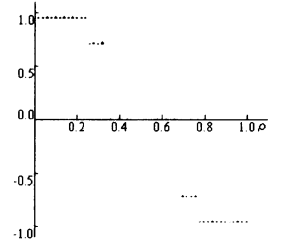


図 8: 図 7 の各密度ごとの傾きのプロット図

4.1.3 信号機を全サイトに設置

次に、信号機の数を一気に増やして、全サイトに(つまり信号機を K 台)設置した時の基本図を見る。

まずは、点滅の周期が 10 である信号機を全サイトに設置した場合を考える。図 9 にこの時の M_j^t の点滅パターンの例を示した。この図は横軸がサイトを、縦軸が時間を表している。たとえば $j = 1$ の所では時刻毎に 0101111000 という 10 周期の点滅パターンの繰り返しになっている。

この M_j^t を用いて描いた基本図を図 10 に示す。基本図はきれいな台形の形をしている。

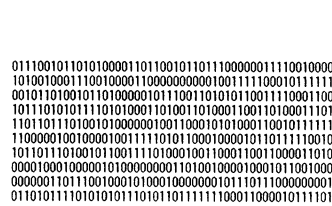


図 9: 点滅周期が 10 の時の M_j^t の例

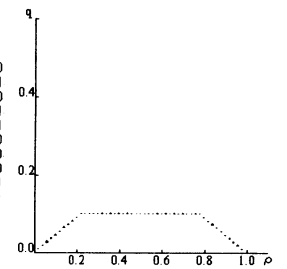


図 10: 点滅周期が 10 の時の基本図

次に、徐々に信号機の点滅周期を長くする。図 11, 図 12 は点滅周期を 50 にした時の図であり、図 13, 図 14 は点滅周期を 100 にした時の図である。

点滅周期を長くしていくと、台形の脚に現れる折れ線が多くなり、交通流率は小さく、基本図の形は曲線に近づいていくように見える。

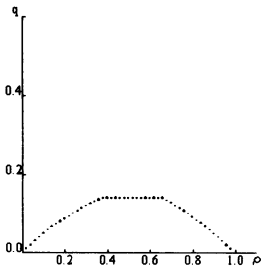


図 11: 点減周期が 50 の時の基本図

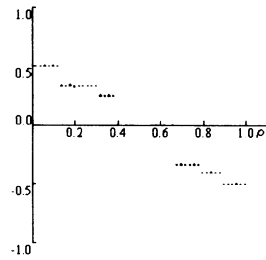


図 12: 図 11 の各密度ごとの傾きのプロット図

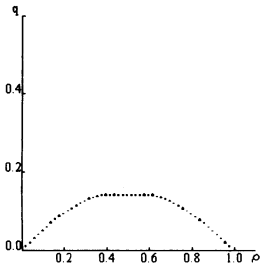


図 13: 点減周期が 100 の時の基本図

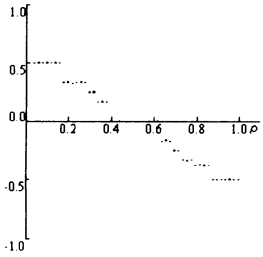


図 14: 図 13 の各密度ごとの傾きのプロット図

4.2 確率的な信号機の場合

次に、点減が確率的な信号機を設置した場合、すなわち M_j^t を乱数によって決めた場合を考える。

4.2.1 信号機が 1 台

図 15 は、 M_{20}^t の値を各時刻で 1/2 の確率で 0 か 1 に選び、他のサイトは $M_j^t = 1$ とした場合の基本図である。このように、 M_j^t を 1 サイトで確率的にした

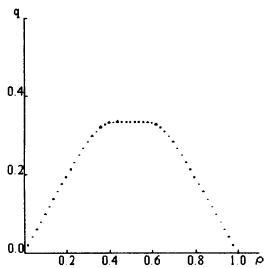


図 15: 基本図

だけで、基本図はなめらかな曲線状になり、今の場合は

台形を丸くしたような形になった。この形についての理論的な解析はまだ行っていない。

4.2.2 信号機を全サイトに設置

今度は、確率的な信号機を全サイトに設置する、つまり、 M_j^t を任意の j, t で確率変数とみなす。

図 16, 図 17, 図 18 は密度が 0.3, 0.5, 0.8 における車のパターンの例である。そして、図 19 はこの時の基本図である。車のパターンに周期性は全く見られないが、低密度では平均して右にシフトし、 $\rho = 1/2$ 付近ではそのまま下にシフト、高密度では左にシフトしている様子がわかる。そして、図 19 の基本図ではきれいな曲線が得られた。

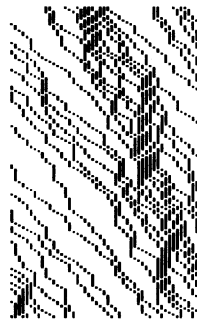


図 16: $\rho = 0.3$ の時の車のパターン



図 17: $\rho = 0.5$ の時の車のパターン

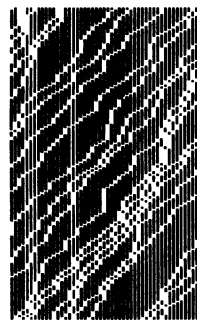


図 18: $\rho = 0.8$ の時の車のパターン

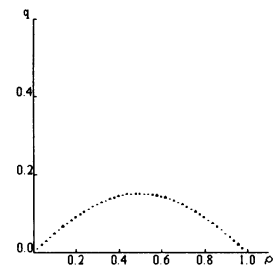


図 19: 基本図

このモデルの交通流率はサイト数 $K \rightarrow \infty$, 時刻 $t \rightarrow \infty$ のときに理論的に次式で与えられる。

$$q^t = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\alpha\rho(1-\rho)}}{2} \quad (11)$$

α は M_j^t を 1 にする確率を表す。ここで求められた理

論式を図 20 にプロットする。また、図 21 に $\alpha = 0.5$ の時の数値実験との比較を示す。

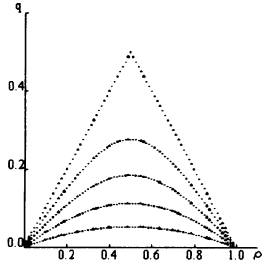


図 20: 理論値 (上から $\alpha = 1.0, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$)

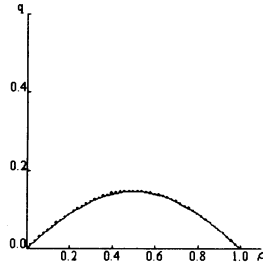


図 21: 実線が理論値, 点線が実験値

この図の実線は式 (11) を, 点は実験により得られた値をそれぞれ表している。

実は, $L = 1$ の場合に M_j^t を確率変数とみなした時の SBCA モデルは, 「Nagel-Schreckenberg モデル」で $v_{\max} = 1$ とした場合と等価なモデルになっている。そして, 先ほど導いた式 (11) は Schadschneider と Schreckenberg によってすでに示されている [4]。ただし, 一般の L の場合については, モデル自身が Nagel-Schreckenberg モデルの範疇になく, 理論式もまだ導かれていない。

5 結論

本研究では, noisy-Burgers 方程式の超離散化により, 制御変数が自然に入ったセルオートマトン (SBCA) を形成できた。そして, この SBCA を交通流のモデルとして用いることにより, 信号機付きのセルオートマトンモデルを得た。さらに, 基本図を描くと台形の脚が折れた多角形状の形になることを見つけた。また, 信号機の点滅を確率的にすることにより, 基本図はなめらかな曲線になることも確認された。我々の取り扱った超離散モデルは, 微分・差分系と平行に線形化可能であるという性質を持っており, その基本的性質についてまだまだ多くのことを示せるのではないだろうか。

参考文献

- [1] K. Nishinari and D. Takahashi: “Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 Cellular Automaton”, J. Phys. A: Math. Gen. **31**(1998) 5439–5450.
- [2] M. Hisakado: “KPZ equation and surface growth model”, cond-mat/9812073.
- [3] 笹本智弘: “一次元排他過程の定常状態について”, 京大数理研講究録 **1221**(2001) 49–69.
- [4] A. Schadschneider and M. Schreckenberg: “Cellular Automaton models and traffic flow”, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) L679–L683.