

デジタル微分方程式

早稲田大学 理工学部 数理科学科 高橋 大輔

2000 年 8 月 流体若手夏の学校 (筋湯温泉)

目次

1	はじめに	2
2	まずは遊ぼう — 箱と玉の系	4
3	KdV 方程式から箱と玉の系へ	5
4	超離散化 (ultradiscretization)	7
5	箱玉系アラカルト、可積分系いろいろ	8
6	方程式と max	12
7	超離散化とカオス	14
8	反応拡散系のデジタル化	17

1 はじめに

何がしたいのか

- 離散的現象の理解のために、解析学をデジタルの世界に拡張したい。
現在はあるレベル以上はアナロジーにすぎない。(cf. 廣田良吾氏：差分学)
- デジタル的現象を物理的に理解したい。
現在は統計的手法、近似理論が主。もっと微積分学的なダイナミクスを厳密に導入したい。
- 連続解析学の表現力を高めたい。
Coupled Map Lattice, Cellular Automaton が良い手本。本質をすばっと抜き出す表現力がほしい。ただし、連続解析学の良いところもなるだけ忠実に反映させたい。

私のメールアドレスは daisuke@mse.waseda.ac.jp で質問等はいつでもどうぞ。以下は参考文献だが、自分の記事中心なので偏りが大きい。

解説記事

1. 中村佳正他：“可積分系の応用数理”
2. 高橋大輔：“箱と球でもソリトン系！”，日本物理学会誌 48 (1993) 37–40. (箱玉系解説)
3. 高橋大輔：“ソリトン・セルオートマトン”，数理科学 405 (1997) 33–39.
4. 時弘哲治, 薩摩順吉, 松木平淳太, 高橋大輔：“可積分セルオートマトン — ソリトン方程式の離散化の果てに何が見えたか —”，日本物理学会誌 52 (1997) 276–279.
5. 高橋大輔：“超離散的からくり”，数理科学 435 (1999) 12–17. (超離散特集号)
6. 高橋大輔：“反応拡散系と max-plus 方程式”，研究集会「非線形波動のメカニズム—現象とモデルの数理解造」(1999年11月,九州大学応用力学研究所)報告集(2000)141–146. (反応拡散方程式と超離散)
7. 高橋大輔：“アナログ + デジタル = 超離散”，「ながれ」

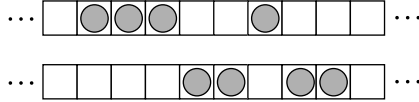
論文

1. D. Takahashi and J. Satsuma：“A Soliton Cellular Automaton”，J. Phys. Soc. Jpn. 59 (1990) 3514–3519. (箱玉系デビュー)
2. 高橋大輔, 薩摩順吉：“単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて”，日本応用数理学会論文誌 1 (1991) 41–60. (大箱系への拡張)

3. D. Takahashi and J. Matsukidaira : "On Discrete Soliton Equations Related to Cellular Automata", Phys. Lett. A **209** (1995) 184–188. (超離散戸田格子方程式、超離散化手法へのヒント)
4. M. Torii, D. Takahashi and J. Satsuma : "Combinatorial Representation of Invariants of a Soliton Cellular Automaton", Physica D. **92** (1996) 209–220. (代数とのつながり、後にクリスタルベース)
5. T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma : "From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure", Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250. (超離散化手法デビュー)
6. B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi and K. M. Tamizhmani : "Cellular Automata and Ultra-Discrete Painlevé Equations", Phys. Lett. A **226** (1997) 53–58. (パンルベ方程式への応用)
7. R. Hirota, M. Iwao, A. Ramani, D. Takahashi, B. Grammaticos and Y. Ohta : "From Integrability to Chaos in a Lotka–Volterra Cellular-Automaton", Phys. Lett. A **236** (1997) 39–44. (カオス系への応用)
8. D. Takahashi and J. Matsukidaira : "Box and Ball System with a Carrier and Ultradiscrete Modified KdV Equation", J. Phys. A **30** (1997) L733–L739. (運搬車の導入、クリスタルベースで重要に)
9. K. Nishinari and D. Takahashi : "Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton", J. Phys. A **31** (1998) 5439–5450. (超離散バーガーズ方程式、交通流への応用)
10. A. Nagai, D. Takahashi and T. Tokihiro : "Soliton Cellular Automaton, Toda Molecule Equation and Sorting Algorithm", Phys. Lett. A **255** (1999) 265–271. (ソーティングアルゴリズムとの関連)
11. T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira : "Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation", J. Phys. A **33** (2000) 607–619. (番号付き箱玉系)
12. S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki : "Affine crystals and vertex models", Int. J. Mod. Phys. A **7** (suupl. 1A) (1992) 449–484. (クリスタルベースの初期の頃の論文)

2 まず遊ぶ — 箱と玉の系

時間発展ルール



(0) 箱の列に玉を適当に入れる。

(1) すべての玉を左の方のものから順にそれぞれ 1 回ずつ右へ移す。それぞれの玉を移す先は右側に存在する最も近い空き箱。全部の玉が動いたら時刻を 1 増やす。

(2) (1) を繰り返す。

[問 1] 時刻 $t = 0$ で $\dots 001110000100\dots$ の初期状態を与える。 $t > 0$ での時間発展を求めよ。なお 0 は空箱、1 は玉の入った箱を表す。

[問 2] 時刻を逆にたどるためのルールを述べよ。

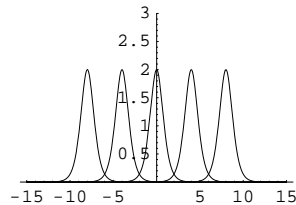
[問 3] $t = 0$ で $\dots 00111010011100\dots$ が与えられている。 $t \gg 0, t \ll 0$ でどのようなパターンが生まれるか。

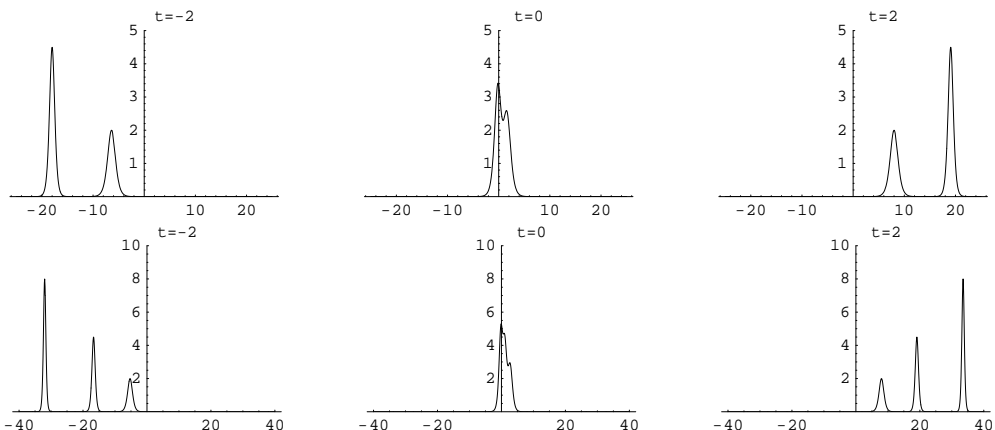
[問 4] $t = 0$ で $\dots 001110000110010100\dots, \dots 00111001110100011100\dots$ はどのようなパターンを生むか。

浅水波を記述する方程式 — Korteweg–de Vries (KdV) 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

u_t, u_x, u_{xxx} はそれぞれ $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$ である。パルス状の波 (孤立波, solitary wave) 同士が相互作用にかかわらず自己を保存する。それら波ひとつひとつをソリトン (soliton) という。KdV 方程式のソリトンは箱と玉の系の玉の集団とよく似たふるまいをする。





[大きな問] KdV 方程式と箱と玉の系に直接的なつながりはあるのか。

[答] Yes. 『KdV 方程式 Lotka Volterra 方程式 差分 Lotka Volterra 方程式 超離散 Lotka Volterra 方程式 箱と玉の系』という長いが直接的かつ厳密なつながりがある。(後述)

方程式あるいは解の構造を保存したままの差分化 + 超離散化 = 方程式のデジタル化

3 KdV 方程式から箱と玉の系へ

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \text{KdV 方程式}$$

$$\text{解 } u = 2(\log \tau)_{xx}$$

$$\tau(x, t) = 1 + e^{k_1 x - \omega_1 t} + e^{k_2 x - \omega_2 t} + a_{12} e^{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}$$

$$\omega_i = k_i^3, \quad a_{12} = \{(k_1 - k_2)/(k_1 + k_2)\}^2 \quad \text{2 ソリトン解}$$

↓ 構造を保存する差分化 $v_j^t = 1 + 2\varepsilon^2 u(\varepsilon(j - 2\delta t), \varepsilon^3 \delta t/3)$ として $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ ↑

$$\frac{1}{\delta}(v_j^{t+1} - v_j^t) = v_j^t v_{j-1}^t - v_j^{t+1} v_{j+1}^t \quad \text{差分 Lotka-Volterra 方程式}$$

$$\text{解 } v_j^t = \tau_{j+2}^{t+1} \tau_{j-1}^t / \tau_{j+1}^{t+1} \tau_j^t$$

$$\tau_j^t = 1 + e^{k_1 x - \omega_1 t} + e^{k_2 x - \omega_2 t} + a_{12} e^{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}$$

$$\omega_i = \log \frac{1 + \delta(1 + e^{k_i})}{1 + \delta(1 + e^{-k_i})}, \quad a_{12} = \sinh^2 \frac{k_1 - k_2}{2} / \sinh^2 \frac{k_1 + k_2}{2}$$

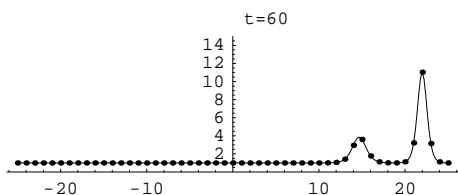
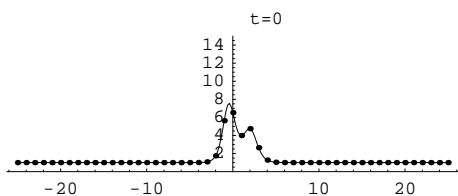
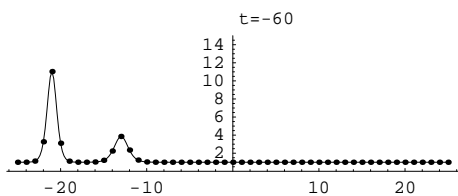
↓ 超離散化 $v_j^t = e^{U_j^t/\varepsilon}, \delta = e^{-1/\varepsilon}, \tau_j^t = e^{T_j^t/\varepsilon}, \varepsilon \rightarrow +0$

$$U_j^{t+1} - U_j^t = \max(0, U_{j-1}^t - 1) - \max(0, U_{j+1}^t - 1) \quad \text{超離散 Lotka-Volterra}$$

$$\text{解 } U_j^t = T_{j+2}^{t+1} + T_{j-1}^t - T_{j+1}^{t+1} - T_j^t \quad \text{方程式}$$

$$T^t = \max(0, K_1 j - \Omega_1 t, K_2 j - \Omega_2 t, (K_1 + K_2)j - (\Omega_1 + \Omega_2)t + A_{12})$$

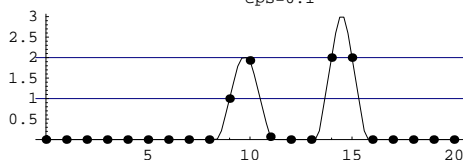
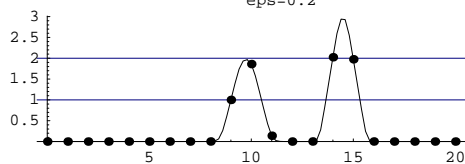
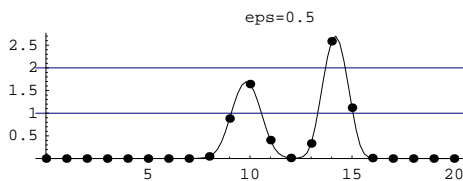
$$\Omega_i = \max(0, K_i - 1) - \max(0, -K_i - 1), \quad A_{12} = |K_1 - K_2| - |K_1 + K_2|$$



差分 LV 方程式

... 31.12
 ... 13..21
 ... 22.12
 ... 31.21
 ... 13.12
 ... 22.21
 ... 3112
 ... 13.21
 ... 2212
 ... 3121
 ... 1312
 ... 2221
 ... 1222
 ... 2131
 ... 1213
 ... 2122
 ... 12.31
 ... 2113
 ... 12.22
 ... 21.31
 ... 12.13 ..

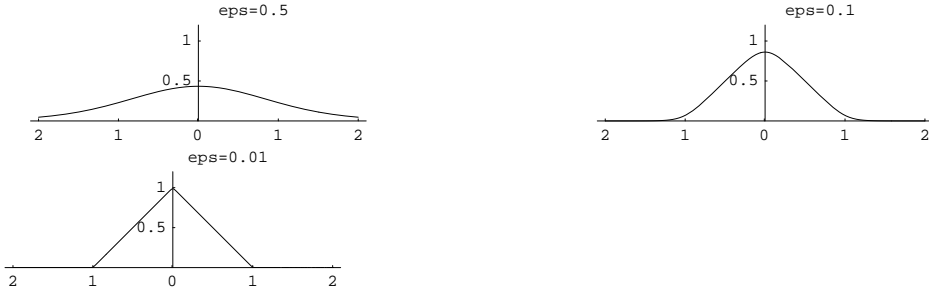
超離散 LV 方程式



差分 LV 方程式から超離散 LV 方程式への
解の遷移

4 超離散化 (ultradiscretization)

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots)$$



$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \{ \log(1 + e^{(x-1)/\varepsilon}) - 2 \log(1 + e^{x/\varepsilon}) + \log(1 + e^{(x+1)/\varepsilon}) \} \\ &= \max(0, x-1) - 2 \max(0, x) + \max(0, x+1) \end{aligned}$$

(参考) 統計力学でカノニカル分布に従う自由エネルギー

$$F(T, V, N) = -kT \log \sum_{\ell} e^{-E_{\ell}/kT}$$

$T \rightarrow +0$ で $F \rightarrow \min(E_0, E_1, \dots)$ (最小エネルギー状態が実現する)

超離散極限 = 低温極限

超離散化に慣れる

以下では $a = e^{A/\varepsilon}$, $b = e^{B/\varepsilon}$, $c = e^{C/\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$

- $c = a + b \rightarrow C = \max(A, B)$
- $c = \frac{1}{a + b} \rightarrow C = -\max(A, B) = \min(-A, -B)$
- $c = \frac{1 + a + b}{a^2(5 + b)} \rightarrow C = \max(0, A, B) - 2A - \max(0, B)$
- $c = (a + b)^2 \rightarrow C = 2 \max(A, B)$
- $c = a^2 + 2ab + b^2 \rightarrow C = \max(2A, A + B, 2B) = 2 \max(A, B)$

箱と玉の系から超離散 LV 方程式へ

V_j^t : 時刻 t 箱 j の玉の数 (= 0 or 1)

$$\begin{aligned}
V_j^{t+1} &= \min(1 - V_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (V_i^t - V_i^{t+1})) \\
&\downarrow S_j^t = \sum_{i=-\infty}^j V_i^t \\
S_{j+1}^{t+1} - S_j^t &= -\max(0, S_{j+1}^t - S_j^{t+1} - 1) \\
&\downarrow Y_j^t = S_{j+1}^t - S_j^{t+1} \\
Y_{j+1}^{t+1} - Y_j^t &= \max(0, Y_j^{t+1} - 1) - \max(0, Y_{j+1}^t - 1) \\
&\downarrow Y_j^t = U_{j-t}^j = U_\xi^t \quad (\text{座標変換}) \\
U_\xi^{t+1} - U_\xi^t &= \max(0, U_{\xi-1}^t - 1) - \max(0, U_{\xi+1}^t - 1) \quad \text{超離散 LV 方程式}
\end{aligned}$$

保存量

- $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$ の保存量 (時間によって変わらない量)

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (2u^3 + uu_{xx}) \, dx, \dots \quad (\text{可算無限個存在する})$$

- 箱と玉の系の保存量 = 玉と空箱のペア (深さ k) の個数

$$k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{可算無限個存在する})$$

5 箱玉系アラカルト、可積分系いろいろ

容量が箱によって異なる拡張 (可変容量)

```

capacity
21233313131213211113112111233323331111122211223232
-----
.1231.....211....11.....
...2311.....22....11.....
.....2131....1111..11.....
.....2131....31.11.....
.....11111..11.1122.....
.....31.11...133.....
.....11.112...232.....
.....11...31...13111.....
.....11..22.....11221.....
.....2..121.....11122....

```


$$V_j^{t+1} = \min(L_j - V_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (V_i^t - V_i^{t+1}))$$

可変容量箱玉系

↓

$$U_j^{t+1} - U_j^t = \max(0, U_{j-1}^t - L_t) - \max(0, U_{j+1}^{t+1} - L_{t+1})$$

可変容量超離散

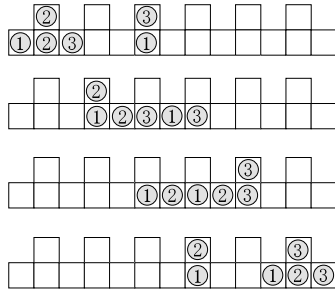
↑

LV 方程式

$$\frac{1}{\delta(t)}(v_j^{t+1} - v_j^t) = v_j^t v_{j-1}^t - v_j^{t+1} v_{j+1}^{t+1}$$

可変時間差分 LV 方程式

さらに玉に番号をつける拡張 (可変容量・番号付き)



$$U_{j,k}^t = \min\left(\sum_{i=-\infty}^{j-1} (U_{i,k}^{t-1} - U_{i,k}^t), L_j - \sum_{\ell=1}^{k-1} U_{j,\ell}^t - \sum_{\ell=k}^M U_{j,\ell}^{t-1}\right)$$

可変容量・

k : 玉の番号 ($1 \leq k \leq M$)

番号付き箱玉系

$$\downarrow Y_j^s = \sum_{i=-\infty}^j \left(\sum_{\ell=k}^M U_{i,\ell}^t + \sum_{t'=t+1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^M U_{i,\ell}^{t'} \right), s = Mt + k$$

$$Y_j^{s+1} + Y_{j-1}^{s-M} = \max(Y_j^s + Y_{j-1}^{s+1-M}, Y_{j-1}^{s+1} + Y_j^{s-M} - L_j)$$

↑

$$(1 + \delta_j) \sigma_{s-M}^{j-1} \sigma_{s+1}^j - \sigma_{s+1-M}^{j-1} \sigma_s^j - \delta_j \sigma_{s-M}^j \sigma_{s+1}^{j-1} = 0$$

↑

$$(a_\ell - b_m) \tau(\ell, m, n-1) \tau(\ell-1, m-1, n)$$

$$+ (c_n - a_\ell) \tau(\ell, m-1, n) \tau(\ell-1, m, n-1)$$

非自律 Kadomtsev

$$+ (b_m - c_n) \tau(\ell-1, m, n) \tau(\ell, m-1, n-1) = 0$$

-Petviashvili 方程式

最大積載量のある運搬車が玉を運ぶ系（運搬車付き）

```
.13332..23...13...2.....
...13332..32...31..2.....
.....13332.131..22..2.....
.....13332.23..13..2.....
.....13331.33..31..2.....
.....1333.133.22.2.....
.....1332.2311313.....
.....1331.32.3133.....
.....133.13.21333.....
.....132.312.2333.....
.....13.2131.3333.....
.....312.23..3333.....
.....213..32..3333.....
.....2.31.131..3333.....
.....2.22..23..3333...
.....2.13...32...3333.
```

$$U_j^{t+1} = \min(L - U_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (U_i^t - U_i^{t+1})) + \max(0, \sum_{i=-\infty}^j U_i^t - \sum_{i=-\infty}^{j-1} U_i^{t+1} - M)$$

運搬車付き箱玉系（ L ：箱の容量， M ：運搬車の最大積載量）

↓

$$V_j^{t+1} + \max(0, V_{j+1}^{t+1} - L) - \max(0, V_{j+1}^t - M) = V_j^t + \max(0, V_{j-1}^t - L) - \max(0, V_{j-1}^t - M) \quad \text{超離散修正 KdV 方程式}$$

↑

$$\frac{v_j^{t+1} (1 + \delta v_{j+1}^{t+1})}{1 + a v_j^{t+1}} = \frac{v_j^t (1 + \delta v_{j-1}^t)}{1 + a v_j^t} \quad \text{差分修正 KdV 方程式}$$

超離散戸田格子方程式

$$\frac{d^2 v_j}{dt^2} = e^{v_{j+1}} - 2e^{v_j} + e^{v_{j-1}}$$

戸田格子方程式

↓ 解の構造を保存する差分化

$$u_j^{t+1} - 2u_j^t + u_j^{t-1} = \log(1 + \delta^2(e^{u_{j+1}^t} - 1)) - 2\log(1 + \delta^2(e^{u_j^t} - 1)) + \log(1 + \delta^2(e^{u_{j-1}^t} - 1))$$

差分戸田格子方程式

$$\Downarrow \quad \text{超離散化} \quad u = \frac{U}{\varepsilon}, \delta = e^{-1/2\varepsilon}, \varepsilon \rightarrow +0$$

$$U_j^{t+1} - 2U_j^t + U_j^{t-1} = \max(0, U_{j+1}^t - 1) - 2\max(0, U_j^t - 1) + \max(0, U_{j-1}^t - 1)$$

超離散戸田格子方程式

...24.....3..71		
...33.....21.62..		
...42.....12.53..		
...51.....3.44...		
...6.....2135....		
...15....1226.....		...-4... ..
...24...317.....		...-3... ..
...33.218.....		...-2... ..
...43271.....		...-1... ..
...1682.....	...4.....5....
...3662.....	...13...41....
...263.51.....	...22...32....
...1721..6.....	...3123.....
...812...15.....	...54.....
...713...24.....	...144.....
...6221.....33...	...5.13.....
...5312.....42...	...41..22.....
...44.3.....51...	...32...31....
...35.21.....6...	...23.....4....
...26.12.....15...	...14.....13...
...17..3.....24	
...8..21.....3	

バーガーズ方程式とルール番号 184 の CA

$$f_t = f_{xx} \xrightarrow{u = (\log f)_x} u = 2uu_x + u_{xx}$$

↓ 差分化

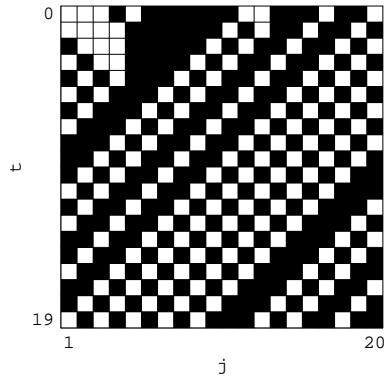
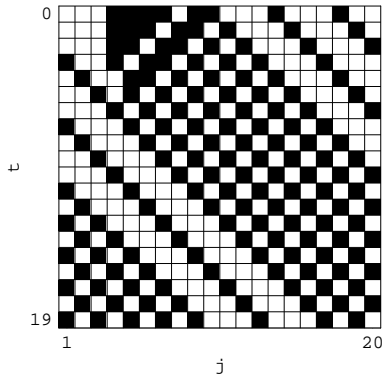
$$f_j^{t+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^t + f_{j-1}^t) \xrightarrow{v_j^t = f_{j+1}^t / f_j^t} v_j^{t+1} = v_{j-1}^t \frac{1 + v_{j+1}^t v_j^t}{1 + v_j^t v_{j-1}^t}$$

↓ 超離散化

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_{j+1}^t) \xrightarrow{U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + 1/2} U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t)$$

↓ $U = 0, 1$ 限定

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} : \frac{000}{0} \quad \frac{001}{0} \quad \frac{010}{0} \quad \frac{011}{1} \quad \frac{100}{1} \quad \frac{101}{1} \quad \frac{110}{0} \quad \frac{111}{1}$$



6 方程式と max

微分方程式と解のセット

$$y'' + 5y' + 6y = 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1$$

$$\text{解 } y(x) = e^{-2x} - e^{-3x} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-2x)^n}{n!} - \frac{(-3x)^n}{n!} \right)$$

解が確かに解であることを確かめるには代入すればよい。

方程式：微分と四則演算で構成、解：四則演算で構成、解の確認：微分と四則演算

解をどのように求めるかは問わないなら、方程式と解のセットは微分と四則演算さえあればよい。

差分方程式と解のセット

$$y_{j+2} + 5y_{j+1} + 6y_j = 0, \quad y_0 = 0, y_1 = 1$$

$$\text{解 } y_j = (-2)^j - (-3)^j$$

差分方程式の場合は四則演算さえあれば OK。

今までの $+$, $-$, $*$, $/$ と同じ演算規則をもつ \oplus , \ominus , \otimes , \oslash を作る事ができれば差分方程式と解を翻訳できる。

$$\text{上の例: } y_{j+2} \oplus (\hat{5} \otimes y_{j+1}) \oplus (\hat{6} \otimes y_j) = \hat{0}, \quad y_0 = \hat{0}, \quad y_1 = \hat{1}$$

$$\text{解 } y_j = \underbrace{(\ominus \hat{2}) \otimes \cdots \otimes (\ominus \hat{2})}_{j \text{ 個}} \ominus \underbrace{(\ominus \hat{3}) \otimes \cdots \otimes (\ominus \hat{3})}_{j \text{ 個}}$$

注：非線形方程式でも同じ

どのような演算を作ればいいのか

和・積については

$$a \oplus b = b \oplus a, \quad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

$$a \otimes b = b \otimes a, \quad (a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$$

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$$

ひとつの作り方： $f(x)$ を適当に見つくるって

$$a \oplus b \equiv f(f^{-1}(a) + f^{-1}(b)), \quad a \otimes b \equiv f(f^{-1}(a) \cdot f^{-1}(b))$$

とすれば上の演算規則は満たされる。

超離散化では $f(x) = \varepsilon \log x, f^{-1}(x) = e^{x/\varepsilon}$ とする。

$$a \oplus b = \varepsilon \log(e^{a/\varepsilon} + e^{b/\varepsilon}) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} \max(a, b)$$

$$a \otimes b = \varepsilon \log(e^{a/\varepsilon} \cdot e^{b/\varepsilon}) = a + b$$

注： $\varepsilon \rightarrow +0$ は和の演算を変えるが、交換則・結合則などの演算則は変えない。

他に何ができればいいか

『零元』 $a \oplus \hat{0} = a$ $\max(a, \hat{0}) = a$ より $\hat{0} = -\infty$ (ちょっと苦しい)

『単位元』 $a \otimes \hat{1} = a$ $a + \hat{1} = a$ より $\hat{1} = 0$ (OK)

『差』 $a \oplus b = c$ $a = c \ominus b$ $\max(a, b) = c$ $a = ???$ (✕)

『商』 $a \otimes b = c$ $a = c \oslash b$ $a + b = c$ $a = c - b$ (OK)

超離散の世界は四則演算のうち差が定義できず、零元がちょっと苦しい系

これに関連して生じる大きな問題 — 負の処理

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} \xrightarrow{x_n = e^{X_n/\varepsilon}} X_{n+1} = \varepsilon \log(e^{X_n/\varepsilon} + e^{X_{n-1}/\varepsilon})$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} X_{n+1} = \max(X_n, X_{n-1})$$

$$x_{n-1} = x_{n+1} - x_n \xrightarrow{x_n = e^{X_n/\varepsilon}} X_{n-1} = \varepsilon \log(e^{X_{n+1}/\varepsilon} - e^{X_n/\varepsilon})$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow +0} X_{n-1} = ???$$

方程式や解に負の項が入る場合は超離散化できない、かもしれない

負の問題にまっこうから取り組むとうまくいかないが、微分 差分 超離散という流れの中ではそうでもない。差分化に自由度がある。

例：
$$\frac{du}{dt} = uv, \quad \frac{dv}{dt} = -uv \quad \text{二波相互作用}$$

$u + v = c$. 解は

$$u = cAe^{ct}/(1 + Ae^{ct}), \quad v = c - u = c/(1 + Ae^{ct})$$

解の構造を保存する差分化。たとえば

$$\frac{1}{\delta}(u_{n+1} - u_n) = u_n v_n, \quad \frac{1}{\delta}(v_{n+1} - v_n) = -u_n v_n$$

$u_n + v_n = c$. しかし超離散化で困る。そこで

$$\frac{1}{\delta}(u_{n+1} - u_n) = u_n v_{n+1}, \quad \frac{1}{\delta}(v_{n+1} - v_n) = -u_n v_{n+1}$$

すると

$$u_{n+1} = (1 + \delta v_{n+1})u_n, \quad v_{n+1} = \frac{v_n}{1 + \delta u_n}$$

やはり $u_n + v_n = c$. 解は

$$u_n = cA(1 + c\delta)^n/(1 + A(1 + c\delta)^n), \quad v_n = c/(1 + A(1 + c\delta)^n)$$

超離散化すると ($u_n = e^{U_n/\varepsilon}$, $v_n = e^{V_n/\varepsilon}$, $\delta = e^{-1/\varepsilon}$, $c = e^{(k+1)/\varepsilon}$, $A = e^{-a/\varepsilon}$)

$$U_{n+1} = U_n + \max(0, V_{n+1} - 1), \quad V_{n+1} = V_n - \max(0, U_n - 1)$$

$\max(U_n, V_n) = k + 1$. 解は

$$U_n = k + 1 + \min(0, kn - a), \quad V_n = k + 1 - \max(0, kn - a)$$

工夫次第で負の問題を避けることができる。何をしたいかが肝心。

7 超離散化とカオス

2次元 Lotka-Volterra 方程式 (生存競争のモデル) : $x(t), y(t)$

$$\dot{x} = x(a - y), \quad \dot{y} = y(x - b)$$

保存量 $C = x + y - b \log x - a \log y$ xy 平面における C の等高線 = $(x(t), y(t))$ の解軌道

• 下手な差分化

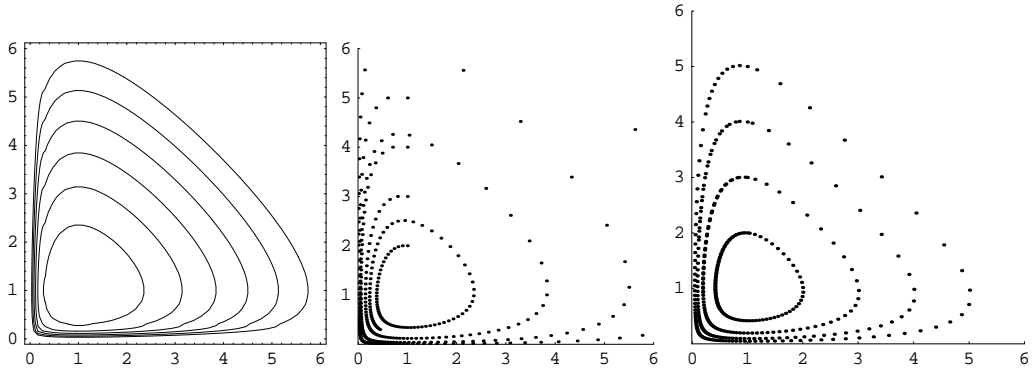
$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = x_n(a - y_n), \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} = y_n(x_n - b)$$

• 上手な差分化 (前の差分 Lotka-Volterra 方程式に周期境界条件)

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{\delta} = a x_n - x_{n+1} y_{n+1}, \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\delta} = y_n x_n - b y_{n+1}$$

書き換えると

$$y_{n+1} = y_n(1 + \delta x_n)/(1 + \delta b), \quad x_{n+1} = x_n(1 + \delta a)/(1 + \delta y_{n+1})$$



2d LV 方程式の解軌道

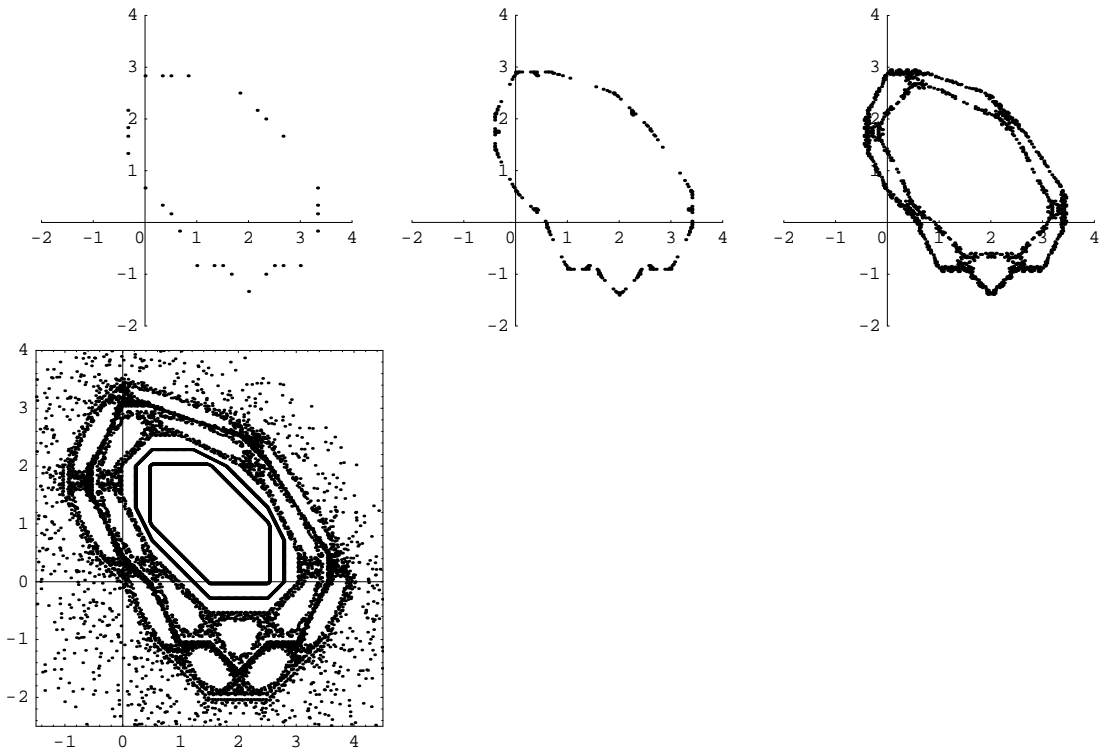
下手な差分化

うまい差分化

しかし保存量が見つからない。そこで超離散化。 $\delta = 1$ (一般性を失わない)

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon}, y_n = e^{Y_n/\varepsilon}, 1 + a = e^{A/\varepsilon}, 1 + b = e^{B/\varepsilon}$$

$Y_{n+1} = Y_n + \max(0, X_n) - B,$	$X_{n+1} = X_n + A - \max(0, Y_{n+1})$
-------------------------------------	--

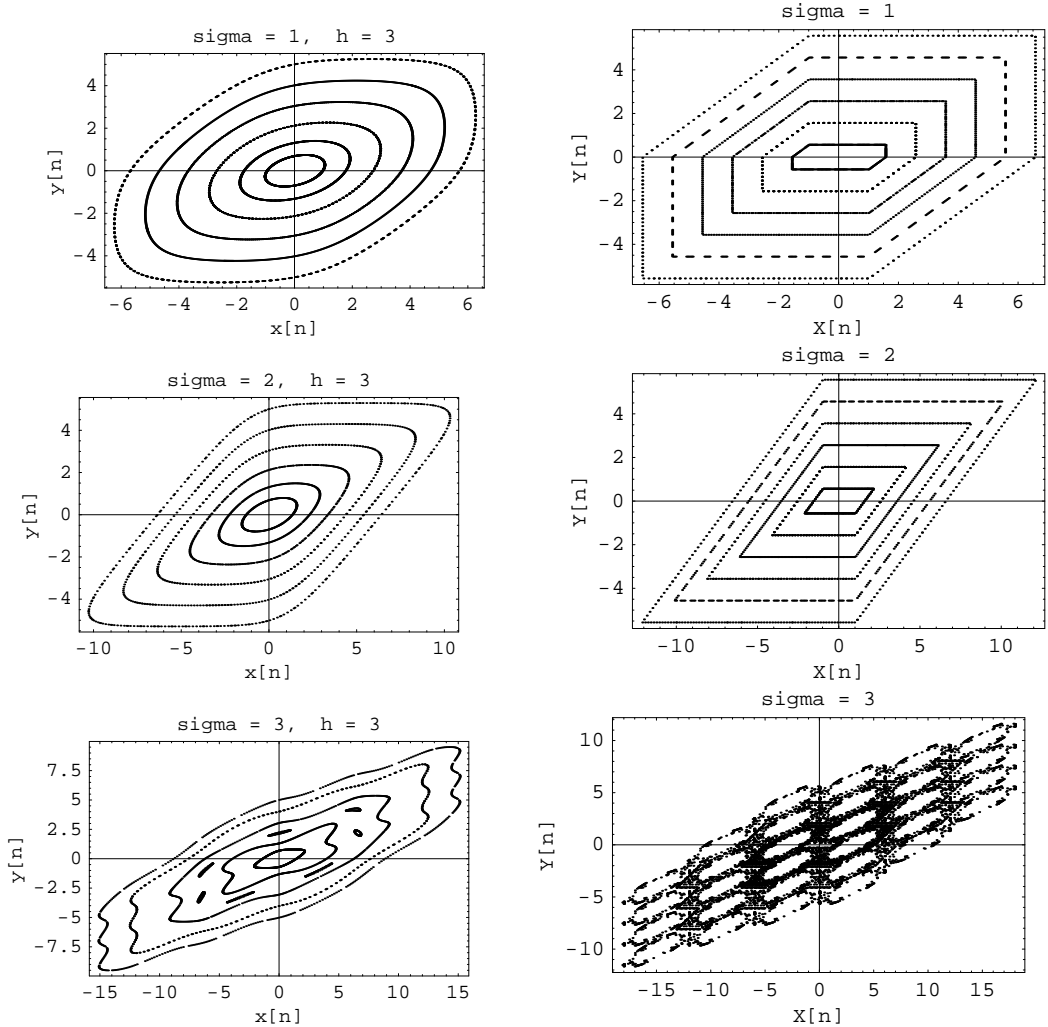


切断型戸田格子方程式

$$x_{n+1} = x_n / (y_n)^\sigma, \quad y_{n+1} = y_n (h + x_{n+1}) / (h + 1/x_{n+1}) \quad (\sigma = 1, 2, 3)$$

超離散化

$$X_{n+1} = X_n - \sigma Y_n \quad Y_{n+1} = Y_n + \max(1, X_{n+1}) - \max(1, -X_{n+1})$$



- $\sigma = 1$ の場合

$$\max(X_n - Y_n, Y_n - X_n, 1 + Y_n, 1 - Y_n, X_n, -X_n) = \text{const.}$$

- $\sigma = 2$ の場合

$$\max(X_n - Y_n, Y_n - X_n, 1 + Y_n, 1 - Y_n) = \text{const.}$$

これを逆超離散化すると差分系の保存則（超離散化のひとつの利点）

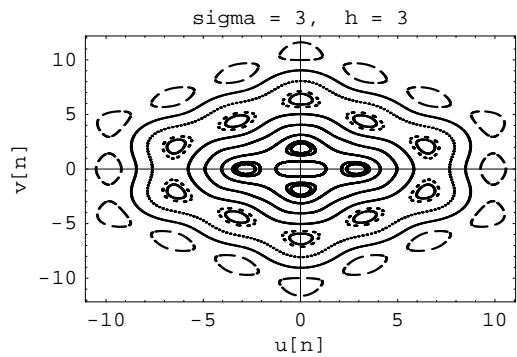
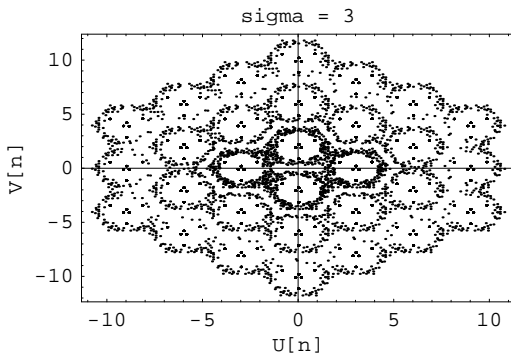
- $\sigma = 1$ の場合

$$\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{x_n} + h\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) + x_n + \frac{1}{x_n} = \text{const.}$$

- $\sigma = 2$ の場合

$$\frac{x_n}{y_n} + \frac{y_n}{x_n} + h\left(y_n + \frac{1}{y_n}\right) = \text{const.}$$

- $\sigma = 3$ の場合、保存則は見つからないが非常に美しいカオス系



変数変換 $X_n = U_n + \frac{3}{2}V_n, Y_n = V_n$ より

$$U_{n+1} = U_n - \sigma V_n + \frac{\sigma}{2} \left\{ \max(1, -U_n + \frac{\sigma}{2} V_n) - \max(1, U_n - \frac{\sigma}{2} V_n) \right\}$$

$$V_{n+1} = V_n + \max(1, U_n - \frac{\sigma}{2} V_n) - \max(1, -U_n + \frac{\sigma}{2} V_n)$$

8 反応拡散系のデジタル化

反応拡散系

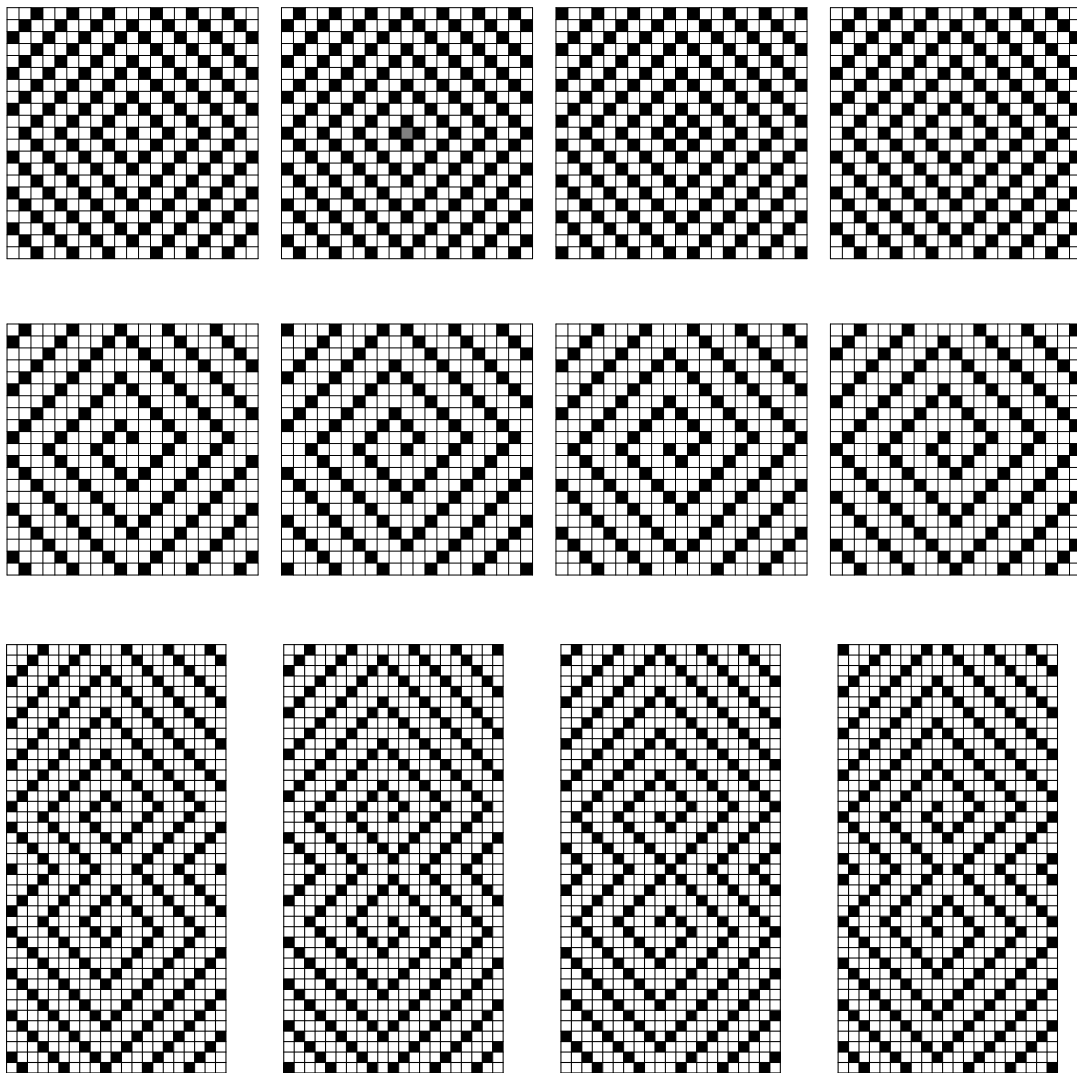
2 種以上の種の反応過程と拡散過程の共存によってターゲットやスパイラルなどの興味深いパターンが観察される。たとえば Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応のモデル方程式

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + \frac{1}{\delta} \left\{ u(1-u) - \frac{Fv(u-q)}{u+q} \right\} \\ v_t = D_v \Delta v + u - v \end{cases}$$

適当な初期条件からターゲットパターンやスパイラルパターン。 アニメ

これらパターンを再現する単純な max-plus 方程式

$$\begin{cases} U_{i,j}^{t+1} = \max(U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t) - U_{i,j}^t - V_{i,j}^t \\ V_{i,j}^{t+1} = U_{i,j}^t \end{cases}$$

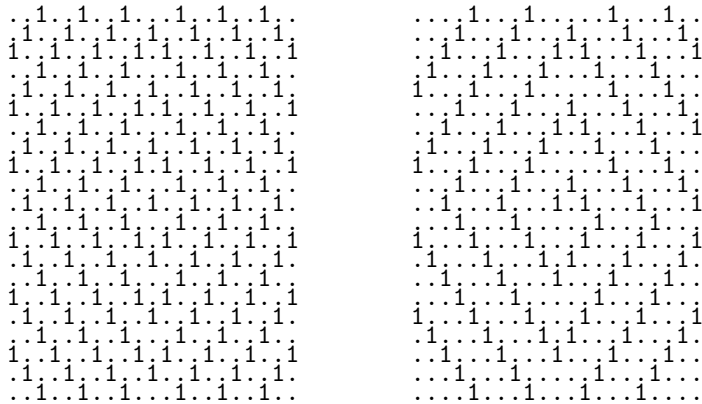


U 一本で書くと

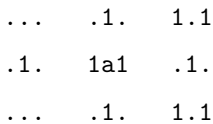
$$U_{i,j}^{t+1} = \max(U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t) - U_{i,j}^t - U_{i,j}^{t-1} \quad (1)$$

時間に関して可逆な方程式（元の BZ 系にはない性質） パターンを生成するだけならもっと単純できれいに解ける方程式があるのでは？(たとえ BZ 系のモデルになっていなくても)

2 + 1 次元方程式の 1 + 1 次元へのリダクション

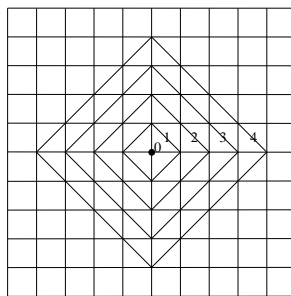


ターゲットパターンの中央部の 3 × 3 領域は a が -1 を表すとして



を繰り返す。またスパイラルパターンは上の図が左回りに 90 度ずつ回転する。

下図のようにある点を中心とする同心菱形（？）のラインを考える。



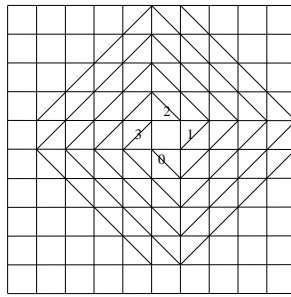
この同心菱形に内側から 0, 1, 2, ... と番号をつける。そして、各同心菱形の上で U の値を等しくするような（異なる菱形の上では値が異なってもよい）初期値を考える。すると、任意の時刻での U の値はやはり同心菱形の上で同じ値をとる。

時刻 t での n 番目の同心菱形上の U の値を F_n^t とすると、 F_n^t は

$$F_n^{t+1} = \begin{cases} \max(F_{n-1}^t, F_n^t, F_{n+1}^t) - F_n^t - F_n^{t-1} & \text{if } n > 0 \\ \max(F_0^t, F_1^t) - F_0^t - F_0^{t-1} & \text{if } n = 0 \end{cases}$$

に従う。これがターゲットパターンの由来であり、もし $F_n^0 = F_n^1 = 10000\dots$ とおくと $F_n^2 = 01000\dots$, $F_n^3 = 10100\dots$, $F_n^4 = 10010\dots$ となってターゲットがどんどん外へ拡がっていく。また、 $F_n^0 = 00000$, $F_n^1 = 10000\dots$ とすると 1 本だけのターゲットが拡がる。

今度は次のような 4 つのラインを考える。



するともし各ラインで U の値を等しくするような初期値を与えれば、任意の時刻でやはり各ラインで U の値が等しいことがわかる。もし n 番のラインの時刻 t での U の値を F_n^t とすると、今度は F_n^t は

$$F_n^{t+1} = \max(F_{n-1}^t, F_n^t, F_{n+1}^t) - F_n^t - F_n^{t-1}$$

に従う。ただし n は mod 4 で考える。

以上をまとめると、ターゲット、スパイラルパターンともに

$$F_n^{t+1} = \max(F_{n-1}^t, F_n^t, F_{n+1}^t) - F_n^t - F_n^{t-1} \quad (2)$$

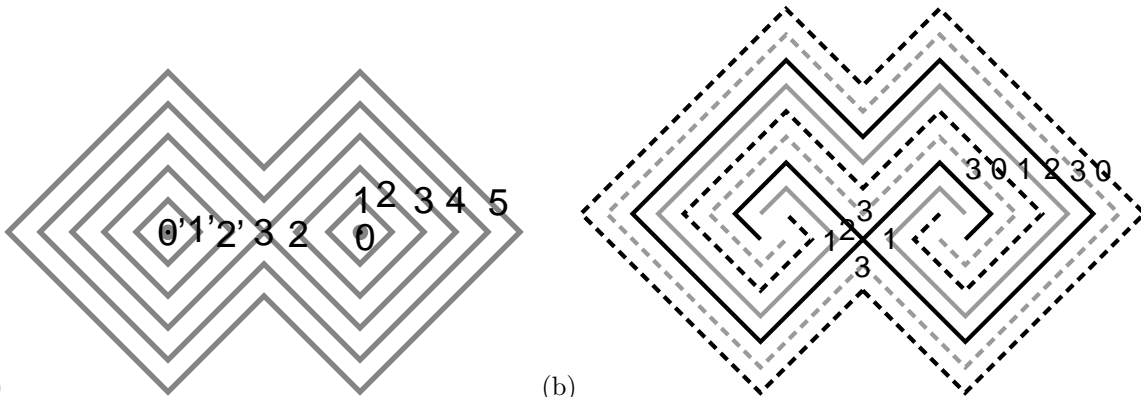
の方程式で生成され、ターゲットパターンは $n \leq 0$ の半無限格子で境界条件として $n = 0$ で

$$F_0^{t+1} = \max(F_0^t, F_1^t) - F_0^t - F_0^{t-1} \quad (3)$$

を与えれば良く、スパイラルパターンは n を mod 4 の 4 周期解として考えればよいことになる。

ダブルターゲット、ダブルスパイラルの解も同様に作るができる。下図の (a) にダブルター

ゲットの場合の等値線、(b) にダブルスパイラルの場合の等値線を示す。



(a) の場合の解は以下のようにして構成できる。まず、 F_0 は (3) に従い、 $n \geq 1$ の F_n は (2) に従う。また $F_{n'}$ は F_n と同様の方程式に従う。ただし、 F_n と $F_{n'}$ は異なる値に取ることも可能。

(b) の場合の解は n に関して mod 4 で (2) に従う。ただし、値が 0 をとる部分では解の接続がかなり自由にできるので、ダブルスパイラルを取り囲む外側の領域（外側の 3 のラインよりも外）はもっと自由にとれるはず。（とはいうものの、ダブルスパイラルの中央部で作られた波が外側に広がる場合、 $t \rightarrow \infty$ では mod 4 の解になるであろう。）

逆超離散化

まだよくわからないが、とにかくやってみると面白いものが出てきた。まず、パターン方程式

(1) を素直に逆超離散すると

$$u_{i,j}^{t+1} + u_{i,j}^t + u_{i,j}^{t-1} = \log[\alpha\{\exp(u_{i+1,j}^t) + \exp(u_{i-1,j}^t) + \exp(u_{i,j+1}^t) + \exp(u_{i,j-1}^t)\} + \beta \exp(u_{i,j}^t)]$$

となる。これを $u_{i,j}^t = u(hi, hj, ht)$ と連続化するとテイラー展開より $O(h^2)$ までで

$$u_{tt} = \frac{\alpha}{4\alpha + \beta} (\Delta u + |\nabla u|^2) + \frac{1}{h^2} (\log(4\alpha + \beta) - 2u)$$

となる。 $\Delta u + |\nabla u|^2$ は何だろう？