

アナログ + デジタル = 超離散

早稲田大学理工学部数理科学科
高橋大輔

平成 13 年 9 月 11 日

1 はじめに

流れを理解するのは本当に難しい。たとえば物体後流の Kármán 渦という現象がある [1]。あの流れを理解するのに Kármán 自身の渦系列による説明で、筆者にはかなりの本質が理解できたような気がする。しかし、円柱からの渦の剥離はどうなっているのか、レイノルズ数を高くしていった双子渦から渦列に遷移する様子はどうなっているのか、乱流になったらどうか、と疑問も果てしなく続く。これでは一種類の流れでさえ理解が終わらないぞ、人間の好奇心は限りないものだなあ、と安直な結論を出してみるのもいいかもしれない。しかし、上のような疑問を全部一挙に知ろうとするのはあまりに欲張りすぎているような気がする。つまり、全部知ろうと思わなければ、Kármán の説明でもいいときはいいのである。

では、流れの全部を理解しようと思わずに自分の知りたいことだけを知るにはどうするか。これも難しい問題である。ぼんやり認識している現象からすばっと本質を抜き出すのは至難の業である。たとえば山のような数値シミュレーション結果を目の前にして頭を抱えることがよくある。

さて、本稿では超離散化という最近開発された手法について解説する [2, 3, 4]。この手法を一言で言い表すと、微分方程式のようなアナログモデルとセルオートマトンのようなデジタルモデルとの間を直接かつ厳密に結びつけるものである。この手法を用いると、アナログモデルの本質を正確にデジタルモデルに反映させることができ、さらにたとえば微分方程式が単純なルールのゲームという形にまで変貌する場合もある。こうして本質をこわさずに方程式および解を究極に単純化するのである。

なお、Navier-Stokes 方程式そのものではまだ成果

がないが、流体に関する方程式も登場する。特集のタイトル「流体の数理的側面」の流体という言葉に少し比重が軽い内容になってしまったが、いつか比重をバランスできることを期待しつつ、とにかく超離散化とは何なのかを説明してみよう。

2 Burgers セルオートマトン

まず空間格子 j 、整数時刻 t を考え、 j, t に依存する変数 U_j^t を考える。このとき U_j^t に関する以下のような時間発展則を考える [5]。

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (1)$$

次の時刻の U_j^{t+1} は前の時刻の $U_{j-1}^t, U_j^t, U_{j+1}^t$ によって決まる。さらに前の時刻の U の値がすべて 0 か 1 だけで構成されているとすると、次の時刻の値も常に 0 か 1 であり、次の時刻の値は

$U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t$	000	001	010	011
U_j^{t+1}	0	0	0	1
	100	101	110	111
	1	1	0	1

(2)

という表から定まる。ということは初期値が 0 か 1 だけで構成されているならば任意の時刻でも 0 か 1 だけである。このように座標や状態変数のすべてが離散的であり、状態変数が有限種類の値しかとらないとき、系をセルオートマトンと呼ぶ [6]。ところで上の系の数値計算を行うと面白い現象が観察できる。まず、空間格子を周期 K で周期的であると、 U の平均値を $\rho \equiv \frac{1}{K} \sum_{j=1}^K U_j^t$ で定義すると (1) より ρ が時間によら

ないことを示せる。そして $\rho < 1/2$ のときは図 1 (a) のように時間が経つと右へ 1 ずつ進む定常パターンに、 $\rho > 1/2$ のときは左へ 1 ずつ進む定常パターンに落ち着くのである。

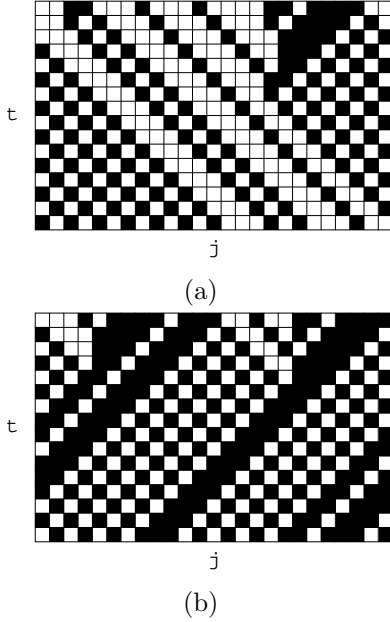


図 1: (1) の数値計算。 が 1 を が 0 を表し、時間軸は下向き。(a) $\rho = 0.4$, (b) $\rho = 0.6$

なお、この時間発展を手で計算することも簡単である。まず、空間格子を離散化された道路と思い、その正方向を車の進行方向と想定しよう。そして、格子上で与えられた 0, 1 の並びの 1 を車、0 を空きスペースと考えよう。すると、ある時刻の状態から次の時刻の状態を得るには、すべての車を「自分のひとつ前の格子に車がいればじっとし、空いていればそこへ進む」というルールで一挙に動かせばよい。このことは (2) の表をじっと眺めれば理解できるであろう。

さて、(1) や (2) は単なる整数のゲームであり、流体とは何ら関係がなさそうに見える。ところが実は 1 次元衝撃波のモデルである Burgers 方程式と深いつながりがある [5]。以下に関連する方程式を一挙に並べよう。

$$u_t = 2vu_x + v_{xx} \quad (\text{Burgers 方程式}) \quad (3)$$

$$\uparrow \quad v = (\log f)_x = f_x/f \quad (\text{Cole-Hopf 変換}) \quad (4)$$

$$f_t = f_{xx} \quad (\text{拡散方程式}) \quad (5)$$

$$u_j^{t+1} = u_j^t + \frac{1}{\Delta x} \{ \log(e^{-\Delta x u_j^t} + e^{\Delta x u_{j+1}^t}) - \log(e^{-\Delta x u_{j-1}^t} + e^{\Delta x u_j^t}) \} \quad (6)$$

(差分 Burgers 方程式)

$$\uparrow \quad u_j^t = \frac{1}{\Delta x} (\log f_{j+1}^t - \log f_j^t) \quad (7)$$

(差分 Cole-Hopf 変換)

$$f_j^{t+1} = (f_{j-1}^t + f_{j+1}^t)/2 \quad (\text{差分拡散方程式}) \quad (8)$$

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (9)$$

(超離散 Burgers 方程式)

$$\uparrow \quad U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + 1/2 \quad (10)$$

(超離散 Cole-Hopf 変換)

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_{j+1}^t) \quad (11)$$

(超離散拡散方程式)

説明をわかりやすくするために式中の定数等を簡単なものにしており、もっとパラメータを導入して自由度を高めることができる。詳しくは文献 [5] を参照していただきたい。さて、(3) が Burgers 方程式であり、Cole-Hopf 変換 (4) によって線形の拡散方程式 (5) から導くことができるという強烈的な性質をもっている。この性質によっていろんな解を容易に書き下すことができる。

これと同じ構図をもっている差分方程式が (6) ~ (8) である。(8) は拡散方程式の陽的な差分化 (の特別な場合) になっている。時間刻み幅 Δt と格子間隔 Δx を $\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ (臨界安定) に保って $\Delta x, \Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、(8) の連続極限として拡散方程式 (5) が得られる。(7) も (4) の差分近似になっているのがすぐ見てとれる。問題は差分 Burgers 方程式と名付けた (6) である。確かに (6) で $u_j^t = v(j\Delta x, t\Delta t)$ とおき、拡散方程式と同じ連続極限をとると (3) が得られる。しかしながらこの差分スキームを Burgers 方程式の数値計算で採用することは、精度・計算効率の面からまずないであろう。それでもこの方程式を差分化として採用しているのは、線形化できるという Burgers

方程式の重要な性質をそのまま差分の方に反映させたいからである。

さて、(9)~(11) は (6)~(8) の 超離散化 によって得られる [7]。超離散化とは公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots)$$

を用いて、与えられた差分方程式の従属変数を離散化する手法のことである。(6)~(8) に現れる u_j^t, f_j^t を $u_j^t = (U_j^t - 1/2)/\Delta x \varepsilon, f_j^t = \exp(F_j^t/\varepsilon)$ と変数変換し $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を行うと、上の公式を使って (9)~(11) が得られる。ただし \max, \min に関する自明な公式

$$\max(A, B) + C = \max(A + C, B + C),$$

$$\max(A, B) = -\min(-A, -B)$$

なども用いる。(9) は (1) と同じである。(9) も (11) も初期時刻の従属変数がすべて整数なら任意の時刻でも整数であり、超離散化によって確かに従属変数が離散化できる。さらに、 G_j^t, H_j^t が (11) の解ならば、 $F_j^t \equiv \max(G_j^t, H_j^t)$ も (11) の解になるという意味で、(11) は \max 演算に関して線形である。

3 解のふるまい

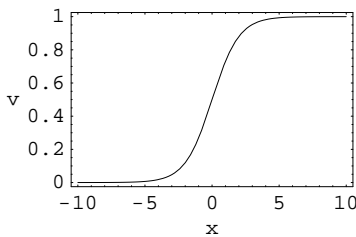
前節で、微分・差分・超離散の方程式同士が極限で一致し、すべて線形化可能という意味で親戚であることがわかった。では、解の方はどうであろうか。まず、単一の衝撃波は拡散方程式の解

(5) の解: $f(x, t) = 1 + \exp(kx + k^2t),$

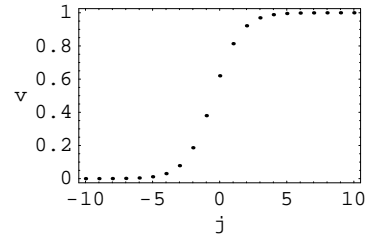
(8) の解: $f_j^t = 1 + \exp(kj)(\cosh k)^t,$

(11) の解: $F_j^t = \max(0, Kj + |K|t)$

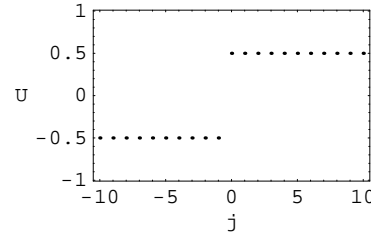
から Cole-Hopf 変換によって得られる。図 2 にそれぞれの解のプロットの例を示す。



(a)



(b)



(c)

図 2: 衝撃波解 (a) 微分 (b) 差分 (c) 超離散

この図からわかるように、差分・超離散方程式でも単一の衝撃波解はちゃんと存在している。ところが、微分・差分方程式の方には複数の衝撃波を重ね合わせた厳密解が存在するが、超離散方程式の方では存在しない。このように超離散化を行うと、元の系で見えていたものが見えなくなることがある。解の近似を目指しているわけではないのでこれは仕方がない。しかしながら面白いことに、元の系でよく見えなかったものが超離散化によって見えることもある。今の Burgers 方程式でそのことを示そう。

(6) の超離散化を行うときに $u_j^t = (U_j^t - 1/2)/\Delta x \varepsilon$ の変数変換を行い $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとるが、 ε を有限のままにとどめておこう。すると

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \varepsilon \log(e^{-U_j^t+1/2} + e^{U_{j+1}^t-1/2}) - \varepsilon \log(e^{-U_{j-1}^t+1/2} + e^{U_j^t-1/2}) \quad (12)$$

が得られる。この方程式は、元の (6) の変数 u を U に変換しただけで本質的には (6) と何ら変わらない。そして U の初期値を図 1 (a) と同じにし、 ε が 1.0, 0.1, 0.01 のそれぞれの場合に (12) を数値計算してみよう。 U の時間発展を密度プロットすると図 3 のようになる。

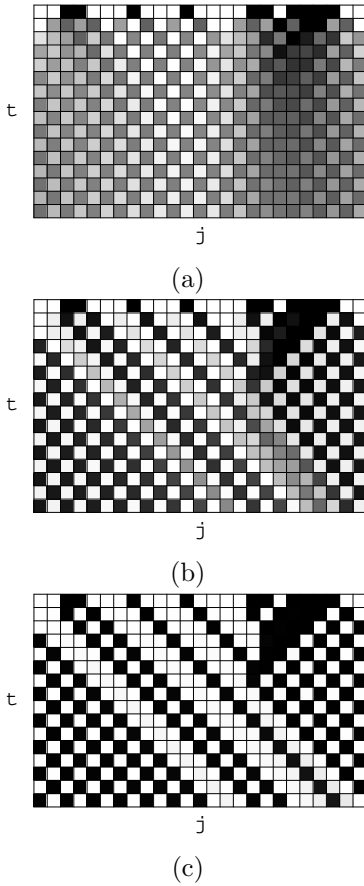


図 3: (12) の数値計算。(a) $\varepsilon = 1$ (b) $\varepsilon = 0.1$ (c) $\varepsilon = 0.01$

ε が小さいほど元の図 1 (a) に近づくことが上の図からわかる。 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限が図 1 (a) であるので当然である。一方、 ε が 1 程度の比較的大きな値の場合は、数ステップでパターンがくずれていくこともわかる。実は $u_j^t = (U_j^t - 1/2)/\Delta x \varepsilon$ という変数変換では U が $1/2$ よりちょっとでも大きいと $\varepsilon \rightarrow +0$ で u が無限大、小さいと負の無限大になる。ということは超離散方程式における有限振幅の波の時間変化は差分方程式の方で無限振幅の波の変化に対応する。このスケール変換によって差分の方で見えなかった秩序だったパターンが超離散化によって見えるのである。

ここまでで、Burgers 方程式 (3) と超離散 Burgers 方程式 (9) ひいてはセルオートマトン (2) がある意味で等価であることをわかっていただけたと思う。このように連続の世界を超離散化によってフルデジタルの世界に直接的に変換できる。もちろん変換できるといのは事実の指摘だけであり有用性の証にはならな

い。ところがこのような結びつきがわかると以下に示すように便利なことに使えるのである。

図 1 で示したように、セルオートマトン (2) では ρ が $1/2$ より小さいか大きいかで定常パターンが右シフトか左シフトに分かれる。この現象は前から知られており、その証明にはビットパターン解析が従来用いられていた。ところが、超離散化によって微分・差分方程式とのつながりが発見されたことで、もっと解析的な証明が可能になった。証明の詳細を示すのは紙数の都合上省略するが、その大筋を述べよう。超離散 Cole-Hopf 変換 (10) によってセルオートマトンの初期値問題は 超離散拡散方程式 (11) の初期値問題に翻訳できる。すると超離散拡散方程式は \max に関して「線形」であるので、定常パターンの証明が非常に楽になる。たとえば (11) を用いると

$$\begin{aligned}
 F_j^t &= \max(F_{j-1}^{t-1}, F_{j+1}^{t-1}) = \max(F_{j-2}^{t-2}, F_j^{t-2}, F_{j+2}^{t-2}) \\
 &= \dots = \max(F_{j-t}^0, F_{j-t+2}^0, \dots, F_{j+t-2}^0, F_{j+t}^0)
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

となり、 F_j^t を初期値 F_j^0 で陽に表現できる。このようなことを用いて、パターン解析でなく式の上での証明が可能になる。

さらに、実はセルオートマトン (2) は以前から交通流の渋滞形成モデルのベースとして用いられてきた。また、渋滞波の摂動伝播と Burgers 方程式との関連も指摘されていた [8]。ところが超離散化によっていったん解析的な見通しがついたことにより、今までの離散渋滞形成モデルを統一的な観点で見直したり、多車線モデルの拡張や離散モデルの不安定性解析などが行えるようになった [9]。すなわち、離散モデルは離散モデル、連続モデルは連続モデルとバラバラに行われていた解析が超離散化によって統一的に行える可能性が出てきた。このように、超離散化による「新しいもの見方」がモデル作りや解析に大いに生きてくるのである。

4 さらになる応用へ

今までは超離散化手法について Burgers 方程式に沿って説明してきた。ところで超離散化手法は単なる非解析的極限に過ぎず、方程式のもっている性質とは独立のものである。つまり手法には汎用性があり、い

ろいろな系に応用できる。そこで、そのうちのいくつかを細かいことを抜きにして紹介しよう。詳しいことは参考文献を参照していただきたい。

4.1 ソリトン方程式

底が浅い水の表面の波を記述する方程式として Korteweg–de Vries (KdV) 方程式

$$u_t + 12 u u_x + u_{xxx} = 0$$

がある。この方程式はソリトン解をもつ可積分方程式として知られている。このソリトン解の構造を保存した差分化として差分ロトカ - ボルテラ方程式

$$\frac{u_j^{t+1} - u_j^t}{\delta} = u_j^t u_{j-1}^t - u_j^{t+1} u_{j+1}^{t+1}$$

があり、それを超離散化することにより箱玉系と呼んでいる以下の方程式が得られる [7]。

$$T_j^{t+1} = \min\left(1 - T_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (T_i^t - T_i^{t+1})\right)$$

T は 0 か 1 をとる離散変数であり、上式はセルオートマトンを構成する。図 4 に KdV 方程式と箱玉系の解の例を示す。

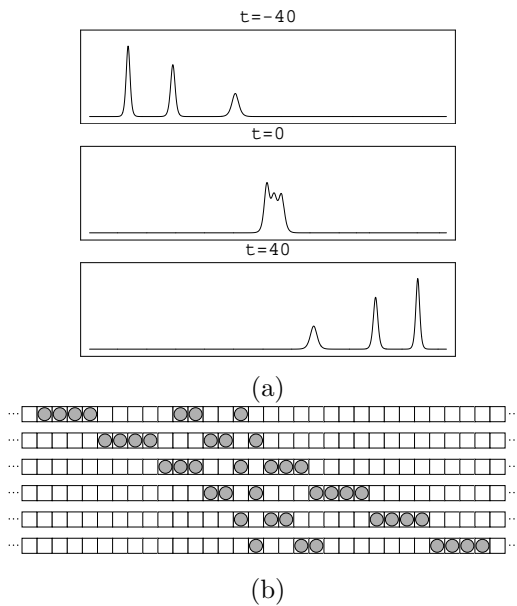


図 4: (a) KdV 方程式の 3 ソリトン解, (b) 箱玉系の 3 ソリトン解

KdV 方程式では 3 つの孤立波が、箱玉系では 3 つの玉の集団がソリトンのふるまいをしている。両者の背後にある代数構造が完全に等価であることは現在ですでにわかっている。

4.2 カオス

次はカオスのマッピングに超離散化を適用した例である [10]。切断型戸田格子方程式と呼ばれる以下のマッピングがある。

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n / y_n^3 \\ y_{n+1} = y_n (h + x_{n+1}) / (h + 1/x_{n+1}) \end{cases} \quad (14)$$

この方程式の変数をうまく変換して超離散化すると

$$\begin{cases} X_{n+1} = X_n - 3Y_n - \frac{3}{2} \left\{ \max(H, X_n - \frac{3}{2}Y_n) - \max(H, \frac{3}{2}Y_n - X_n) \right\} \\ Y_{n+1} = Y_n + \max(H, X_n - \frac{3}{2}Y_n) - \max(H, \frac{3}{2}Y_n - X_n) \end{cases} \quad (15)$$

が得られる。両者の数値計算結果を図 5 に示す。

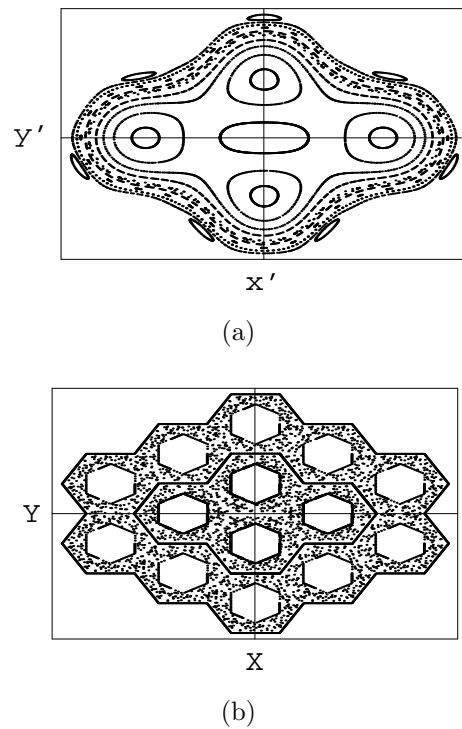


図 5: (a) 切断型戸田格子方程式, (b) その超離散化

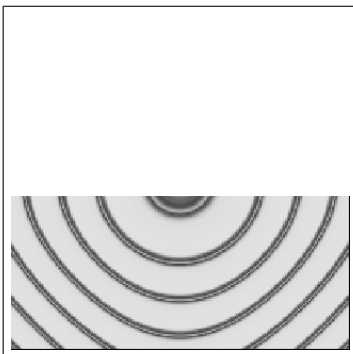
両図とも適当な初期値からの軌道をいくつか描いている。ただし (a) の図は xy 位相平面上のプロットを座標変換し、さらに log-log プロットで描いている。(a) の図の各軌道が滑らかな曲線を構成するのに対し、(b) の方は多角形状の軌道が観察できる。この多角形軌道は簡単に式で表現できる。これを用いれば、ある程度は解の挙動を厳密に議論することができる。(a) では式の上でのそのような議論はたいへん難しい。(14) のような差分型の写像を、そしてあわよくば微分型の写像まで、(15) のような区分線形型の写像に翻訳してカオス軌道の解析ができないかというのが筆者の期待である。

4.3 反応拡散系

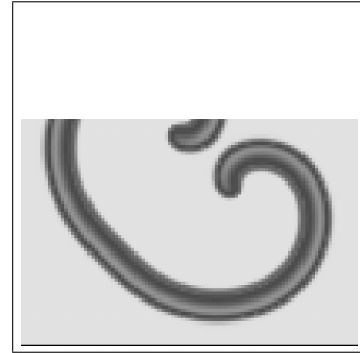
パターン形成の分野では、Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応などの反応拡散系が代表格として登場する。そして反応拡散系では 2 種以上の種の反応過程と拡散過程の共存によってターゲットやスパイラルなどの興味深いパターンが観察される。たとえば BZ 反応のモデル方程式は

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + \frac{1}{\delta} \left\{ u(1-u) - \frac{Fv(u-q)}{u+q} \right\} \\ v_t = D_v \Delta v + u - v \end{cases} \quad (16)$$

という連立の $2+1$ 次元偏微分方程式で与えられる [11]。 D_u, D_v, δ, F, q は物理定数である。適当な初期条件から数値計算を行うと、図 6 のようなターゲットパターンや二重スパイラルパターンを得ることができる。なお、各図とも u の密度プロットである。



(a)



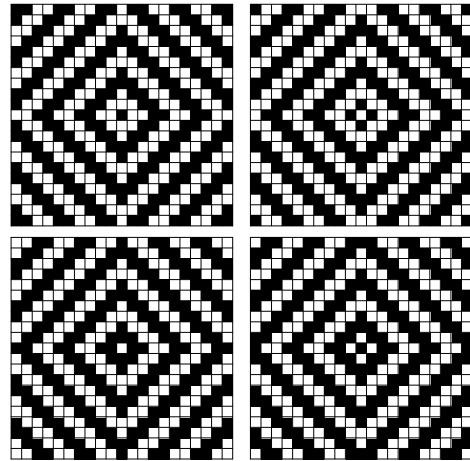
(b)

図 6: (a) ターゲットパターン, (b) 二重スパイラルパターン

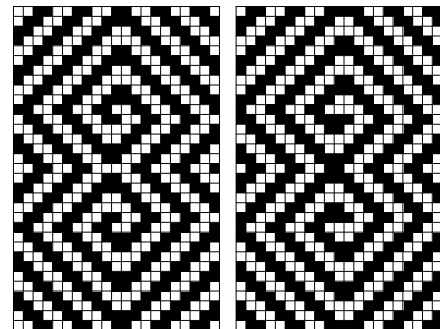
これらパターンを再現する単純な方程式として

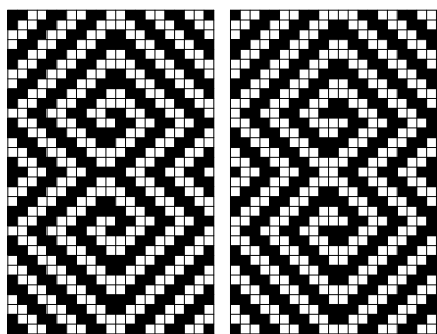
$$\begin{cases} U_{i,j}^{t+1} = \max(U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, \\ \quad U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t) - V_{i,j}^t \\ V_{i,j}^{t+1} = U_{i,j}^t \end{cases} \quad (17)$$

を考える [12, 13]。適当な初期値から数値計算したものが図 7 であり、図 6 に類似したターゲット、スパイラルパターンが観察できる。



(a)





(b)

図 7: (a) ターゲットパターン, (b) 二重スパイラルパターンの時間変化。ともに U のプロットで、 U が 1 を U が 0 を表し、4 ステップで元に戻る周期パターンである。

現在のところ、超離散化によって (16) と (17) を結びつけることには成功していない。しかしながら、同じようなパターンを生成する両モデルの間には直接的でなくとも何らかの関係があるはずであり、連続系のパターン生成機構の離散対応物がどのようなものであるかをぜひ知りたいと思う。

5 おわりに

超離散化手法とはどのようなものであるかをここまで駆け足で説明してきた。可積分系分野で生まれた手法ではあるが、前節で述べたように手法自体は汎用的なので非可積分系にも応用できる。ただし手法には弱点がいくつか存在し、どんな方程式でもできるというわけには今のところいかない。また無理やり微分方程式から差分方程式・超離散方程式を作っても、解の挙動が全く異なってしまうことが多い。うまく超離散化するコツは、元の方程式のどのような性質を保って離散化するのかを明確に定めておくことである。この意味で可積分系では常に可積分性に注目して離散化すればよく、また厳密解や保存則が明示的に知られているのでチェックが容易であり、たいてい成功してしまう。

最後に再び「はじめに」のところの話に戻るが、筆者は学生の頃に Navier–Stokes 方程式の非線形性の強烈さに苦しめられる一方で、解の豊かさ・美しさにしびれた思い出がある。しばらく後に格子気体のような単純明快なセルオートマトンでもフルシミュレシ

ョンが可能であることを知ってたいへん驚きもした。しかし、差分法のシミュレーションプログラムでさえ極言すれば単なるビット演算の固まりである。本稿で述べた超離散化手法がそのまま使えるとは自分でも信じていないが、いつの日か再び Navier–Stokes 方程式に搦め手からアタックするぞという夢は持ち続けたいと思う。

参考文献

- [1] 今井功, 「流体力学」前編, 裳華房 (1991).
- [2] 高橋大輔, ‘ソリトン・セルオートマトン’, 数理科学 **405** (1997) 33–39.
- [3] 時弘哲治, 薩摩順吉, 松木平淳太, 高橋大輔, ‘可積分セルオートマトン — ソリトン方程式の離散化の果てに何が見えたか —’, 日本物理学会誌 **52** (1997) 276–279.
- [4] 高橋大輔, ‘超離散的からくり’, 数理科学 **435** (1999) 12–17.
- [5] K. Nishinari and D. Takahashi, ‘Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule–184 cellular automaton’, J. Phys. A **31** (1998) 5439–5450.
- [6] S. Wolfram, ‘Cellular Automata and Complexity’, Addison-Wesley (1994).
- [7] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, ‘From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure’, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247–3250.
- [8] T. Musha and H. Higuti, ‘Traffic current fluctuation and the Burgers equation’, Jpn. J. Appl. Phys. **17** (1978) 811.
- [9] K. Nishinari and D. Takahashi, ‘A new deterministic CA model for traffic flow with multiple states’, J. Phys. A **32** (1998) 93–104.
- [10] 木村欣司, ‘超離散戸田型マップの近可積分性’, 早稲田大学理工学部情報学科平成 10 年度卒業論文.

- [11] 三池秀俊・森義仁・山口智彦, 「非平衡系の科学 III 反応・拡散系のダイナミクス」, 講談社サイエンスフィク (1998).
- [12] 高橋大輔, 九州大学応用力学研究所研究集会「非線形波動のメカニズム—現象とモデルの数理構造」報告集 (2000) 141–146.
- [13] 志田篤彦, ‘パターン形成ダイナミクスのモデル化’, 早稲田大学理工学部数理科学科平成 11 年度卒業論文.