

超離散的からくり

高橋 大輔

1. 単純な仕掛け

万華鏡というおもちゃがある．からくりとしては単純で，3枚の鏡を三角柱状に配置した中に色の付いた小片が入っているだけである．しかしそれを覗くと図1のように華麗な世界が広がる．さらに万華鏡の筒をくるくると動かしてみれば予想もしない模様が次々と出現する．万華鏡のいいところは，仕掛けの単純さとその効果の美しさにあり，両方に驚きが隠されている．

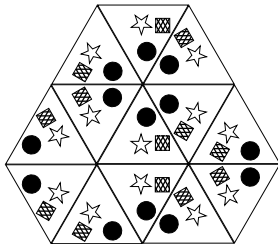


図1 万華鏡

数理学でも同じような体験をしばしば味わう．一見どうなっているのだろうと思わせる現象が，種を明かせば単純であり，その単純さに感激することもあれば，それを理解した上で現象を見直して世の中うまくできているなあとほれぼれすることもある．本特集の「超離散」もこの種の感激を味わうにはもってこいの仕掛けであり，変数変換と極限のうまい組み合わせが意外な結果をもたらすことになる．

では，超離散を解説する前に，まずは変数変換だけで方程式にどのような味が加わるのかを

見てみよう．たとえば差分方程式

$$u_j^{t+1} = (u_{j-1}^t + u_{j+1}^t) / (1 + u_{j-1}^t u_{j+1}^t) \quad (1)$$

を考える． j は空間格子番号， t は時刻であり，ともに整数値をとるとしよう．初期時刻 $t = 0$ で初期値 u_j^0 ($-\infty < j < \infty$) を $\dots 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \dots$ にした場合と， $\dots 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \dots$ にした場合の解の様子がそれぞれ図2の上，下図に示されている．両図とも縦軸下方向が時間の進む方向であり， u_j^t の大きさはグレースケールで表現され，黒色が濃いほど値が大きいことを表している（値の変化が激しいので \log スケールでプロットしている．）(1) が非線形方程式であるので解の重ね合わせができず，その証拠に下図は上図を2つずらして重ねたものになっていない．

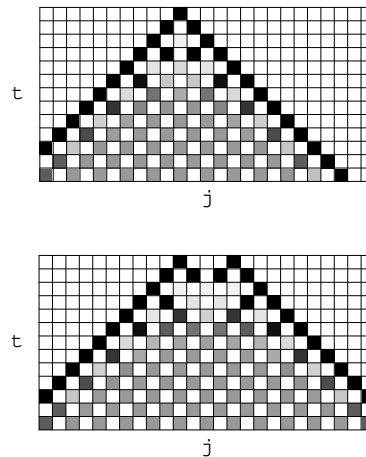


図2 (1) の解の様子

ところが (1) に変数変換 $u = \tanh(v)$ を施し \tanh の加法定理を用いれば

$$v_j^{t+1} = v_{j-1}^t + v_{j+1}^t \quad (2)$$

というたいへん簡単な線形の方程式が得られる。これを利用すれば ϕ_j^t, ψ_j^t という 2 つの (1) の解に対し, (2) を通じてそれらを重ね合わせた $\tanh(\operatorname{arctanh}(\phi_j^t) + \operatorname{arctanh}(\psi_j^t))$ がやはり (1) の解となる。なお, u が任意の実数値をとるためには v を複素数の範囲で考える必要がある。

ところで線形の方程式なら解を定数倍したのもやはり解となる。(2) でのその性質は (1) にどう反映するのだろうか。結果は単純であるが, 変数変換を別な見方によって見通しよく説明しよう。まず一般に $f(x)$ という関数があるとし, その逆関数を $f^{-1}(x)$ とする。すると 2 項演算

$$x \oplus y = f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$$

は交換法則・結合法則

$$x \oplus y = y \oplus x, \quad (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$$

を満たす。たとえば結合法則は

$$\begin{aligned} (x \oplus y) \oplus z &= f(f^{-1}(f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))) + f^{-1}(z)) \\ &= f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y) + f^{-1}(z)) \\ &= x \oplus (y \oplus z) \end{aligned}$$

と確認できる。この和 \oplus に対して積 \otimes を定義するには

$$x \otimes y = f(f^{-1}(x)f^{-1}(y))$$

とすればよい。すると交換・結合・分配法則

$$\begin{aligned} x \otimes y &= y \otimes x, \quad (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z) \\ x \otimes (y \oplus z) &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z) \end{aligned}$$

がすべて成立する。

実は $f(x) = \tanh(x)$ とした場合に $x \oplus y = \tanh(\operatorname{arctanh}(x) + \operatorname{arctanh}(y)) = (x + y)/(1 + xy)$ となるので (1) は $u_j^{t+1} = u_{j-1}^t \oplus u_{j+1}^t$ と書ける。つまり \oplus に関して線形な方程式になる。そこで解を「定数倍」するときにも \otimes に関して定数倍しなければならない。すなわち u_j^t が (1)

の解である場合に

$$c \otimes u_j^t = \tanh(\operatorname{arctanh}(c) \operatorname{arctanh}(u_j^t))$$

も解となるのである。これは単純に定数倍することとは違う。

以上のように変数変換 $f(x)$ は基本演算をパラレルに変換しつつ, 方程式と解をセットで変換する。

2. 超離散化のひねり

前節では, 変数変換によって単純な方程式から複雑な方程式へ, 演算の本質を損なわずに移行できることを説明した。次に極限を用いた方程式の変換を見てみよう。再び (1) の解を考えることにし, 今度は初期値 u_j^0 を 1 点だけ大きな値にして他はすべて 0 にしてみる。たとえば $\dots 0 0 10^{20} 0 0 \dots$ を初期値にして解をプロットしてみると図 3 のようになる。

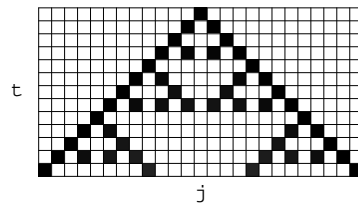


図 3 別の初期値による解

この図ではグレーの部分がほとんど分からない。(1) で u_{j-1}^t, u_{j+1}^t の値が 0 と ∞ だけであるとして粗っぽく評価すると

u_{j-1}^t	u_{j+1}^t	u_j^{t+1}
0	0	0
0	∞	∞
∞	0	∞
∞	∞	0

となり, 確かに初期値が 0 と ∞ だけであると常に 0 と ∞ だけのパターンが得られる。

この漸近評価自身を発展方程式の形で (1) から導こう。まず $u_j^t = e^{(U_j^t - 1/2)/\varepsilon}$ という変数変換を考える。 $-1/2$ というのは便宜上付けた定

数である．これ (1) を書き換えると

$$U_j^{t+1} = \varepsilon \{ \log(e^{U_{j-1}^t/\varepsilon} + e^{U_{j+1}^t/\varepsilon}) - \log(1 + e^{(U_{j-1}^t + U_{j+1}^t - 1)/\varepsilon}) \}$$

となる．さらに $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を考えると，公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots) \quad (3)$$

より

$$U_j^{t+1} = \max(U_{j-1}^t, U_{j+1}^t) - \max(0, U_{j-1}^t + U_{j+1}^t - 1) \quad (4)$$

が得られる¹⁾．この方程式の U の値が 0 か 1 だけであるとしよう．すると上式より

U_{j-1}^t	U_{j+1}^t	U_j^{t+1}
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

となる． $u = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} e^{(U-1/2)/\varepsilon}$ の変数変換から $U = 0, 1$ がそれぞれ $u = 0, \infty$ に対応しており，上に掲げた U の表と u の表が対応するのである．

さて，初期値を 0, 1 に限定するという条件のもとでは，上の表だけあれば時間発展をたどれる．このとき U の時間発展は

$$U_j^{t+1} = U_{j-1}^t \text{ 田 } U_{j+1}^t$$

と書ける．田は論理演算の排他的論理和 (Exclusive OR) である．この系はセルオートマトン (CA) 理論でよく知られているルール番号 90 の CA に等しい²⁾．そしてこの CA はシェルピンスキーのガスケットと呼ばれる図 4 に示すようなフラクタル図形を生成する．

以上のように $e^{x/\varepsilon}$ 型の変換や公式 (3) を利用して，(1) のような差分方程式から (4) のような区分線形写像型の差分方程式を得る手続きを 超離散化 という³⁾．

超離散化の変数変換は ε が有限の場合 $\varepsilon \log(x)$

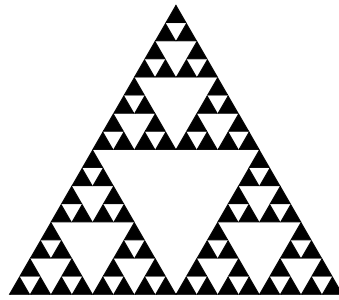


図 4 シェルピンスキーのガスケット

であるので，前節で述べた \oplus, \otimes が

$$x \oplus y = \varepsilon \log(e^{x/\varepsilon} + e^{y/\varepsilon})$$

$$x \otimes y = x + y$$

となる．さらに $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると

$$x \oplus y = \max(x, y), \quad x \otimes y = x + y$$

となる．このように超離散化では通常の和，積が $\max, +$ に置き換わる．和，積ともに簡単な演算に置き換わることが重要である．また，(4) のような区分線形写像型の方程式が得られるので，従属変数が連続的な系から離散的な系へ変換しやすい．このようにして，みかけが全く異なる系同士の代数構造が実は同じ，という驚きを超離散化によってしばしば味わうことができるのである．

3. 箱と玉の系

この節と次節で超離散化の応用例を挙げる．最初は超離散化の出発点となった箱と玉の系である^{3,4)}．まず同じ大きさの玉を N 個用意する．そして大きさが玉ひとつ分の箱を無限個用意し，横に 1 列に並べる．この箱の列にすべての玉を適当に放り込んで系の初期状態を作る．次に系の時間発展則を以下のように定める．

『時刻 t での状態が与えられているとする．このとき，左の方の玉から順に，右側の最も近い空き箱に動かしていく．すべての玉が 1 回ずつ動いたら時刻を 1 増やして $t+1$ とする 』

ある初期状態からこの発展則にしたがって玉を動かしていった時間発展の様子を図 5 に示す。

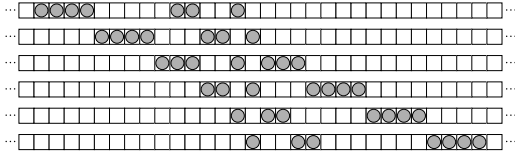


図 5 箱と玉の系の時間発展

時刻は下に増えていく。この図から $t \ll 0$ では $\bullet\bullet\bullet\bullet$, $\bullet\bullet$, \bullet の玉の集団が十分離れてお互い干渉し合うことなく動いていることが分かる。そして左の集団ほどサイズが大きく移動速度が速いので、この図のようにいつかは集団同士がぶつかる。ところが時間が経つと再び 3 つの玉の集団 \bullet , $\bullet\bullet$, $\bullet\bullet\bullet\bullet$ に分かれ、 $t \gg 0$ ではそれらが速度差のためにどんどん離れていく。すなわち 3 つの玉の集団が非線形相互作用にもかかわらず自己を保存するのである。

この性質はソリトン系が共通に持っている特徴であり、たとえばコルテヴェグ - ド・フリース (KdV) 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 12u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

の 3 ソリトン解は図 6 のようになる⁵⁾。KdV 方程式のパルス状の波および箱と玉の系の玉の集団は、どちらも「相互作用にも関わらず自己を保存する」という性質をもっておりソリトンと呼ばれる。

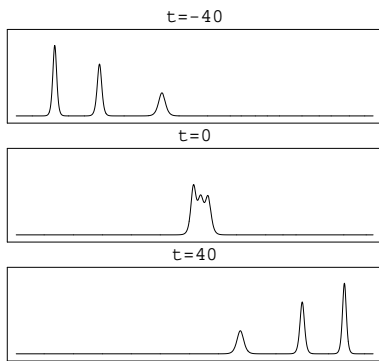


図 6 KdV 方程式の 3 ソリトン解

さらに、図で直感的に観察される類似性以上に、方程式と解の数学的構造において両者には直接的かつ厳密な関連がある。箱と玉の系の時間発展を記述する方程式は、左から j 番目の箱の時刻 t での玉の数を T_j^t ($= 0, 1$) とすると

$$T_j^{t+1} = \min\left(1 - T_j^t, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (T_i^t - T_i^{t+1})\right)$$

と表せる。この式は、差分ロトカ - ボルテラ方程式⁶⁾

$$\frac{u_j^{t+1} - u_j^t}{\delta} = u_j^t u_{j-1}^t - u_j^{t+1} u_{j+1}^{t+1}$$

を $u_j^t = e^{U_j^t/\varepsilon}$, $\delta = e^{-1/\varepsilon}$, $\varepsilon \rightarrow +0$ によって超離散化し、 $V_j^t = U_j^{j-t}$ という座標変換、 $V_j^t = \sum_{i=-\infty}^j (T_{i+1}^t - T_i^{t+1})$ という変数変換を経た後に得られる。実は差分ロトカ - ボルテラ方程式もソリトン方程式であり、多ソリトン解や無限個の保存量を有している。その性質が箱と玉の系にそのまま受け継がれているのである。このあたりの話は参考文献と本特集号の時弘氏の記事に詳しいのでそちらを参照されたい。

今度は図 5 を別の見方で見てみよう⁷⁾。まず、各時刻の状態を「空箱の並び、玉の並び、空箱の並び、玉の並び、...、玉の並び、空箱の並び」とみなし、時刻 t における左から n 番目の玉の並びの玉の個数を Q_n^t 、空箱の並びの箱の個数を E_n^t とし、 N を玉の並びの総数とする。たとえば図 5 の上から 4 番目の時刻の状態では $Q_1^t = 2$, $Q_2^t = 1$, $Q_3^t = 4$, $E_0^t = \infty$, $E_1^t = 1$, $E_2^t = 3$, $E_3^t = \infty$ となる。この見方をしたときの状態の時間発展は

$$\begin{aligned} Q_n^{t+1} &= \min(E_n^t, \sum_{k=1}^n Q_k^t - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^{t+1}) \\ E_n^{t+1} &= E_n^t + Q_{n+1}^t - Q_n^{t+1} \\ E_0^t &= E_N^t = \infty \end{aligned} \quad (5)$$

で与えられる。この方程式は、離散時間型の戸田分子方程式と呼ばれるソリトン方程式の超離散化によって得られる。

ところで図 5 では最初 4, 2, 1 個の玉の並び

が後に 1, 2, 4 個となっている．これはソリトン系であるからそうなるのであるが，この数字の入れ替え操作を ソーティング とみなすこともできる．初期時刻 $t = 0$ において並び替えたい数の列を Q_n^0 としよう．これに対応して E_n^0 をうまく設定すると，任意の数の列 Q_n^0 を小さい順に並び替えるソーティングのアルゴリズムが (5) から得られる．ちなみにバブルソートのアルゴリズムは

$$Q_n^{t+1} = \min(Q_{n+1}^t, \sum_{k=1}^n Q_k^t - \sum_{k=1}^{n-1} Q_k^{t+1})$$

と表すことができ，(5) の第 1 式の E_n^t を Q_{n+1}^t で置き換えたものになっている．バブルソートのアルゴリズムは時間に関して非可逆のアルゴリズムであるが，(5) はソリトン方程式ゆえ時間に関して可逆のアルゴリズムとなっている．

今度は箱と玉の系に 運搬車 を導入しよう⁸⁾．まず，玉を箱の列に適当に入れる．次に，最大積載量が玉 M 個分である運搬車が各時刻で箱の列を左から右へ通過するとする．運搬車は各箱を通過する際に (a) 玉が入った箱を通過する場合：もし運搬車に玉を載せる余地があるときにはその玉を載せ，余地がないときはそのまま通り過ぎる，(b) 空箱を通過する場合：もし運搬車に玉が載っているならば玉をひとつその箱におろす，という動作を行う．そして運搬車がこのようにして箱の列を左から右へ 1 回通過したときに得られる状態を次の時刻の状態とする．図 7 に $M = 3$ のときの玉の動きの例を示す．

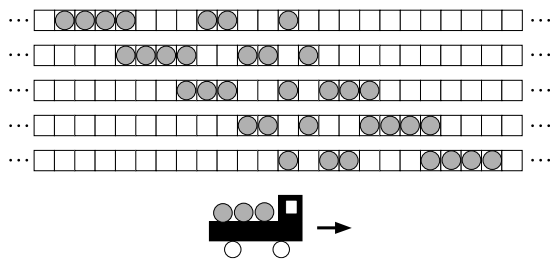


図 7 運搬車付きの系

この系の時間発展則も，差分修正 KdV 方程

式と呼ばれるソリトン方程式

$$\frac{u_j^{t+1}(1 + \delta u_{j+1}^{t+1})}{1 + a u_j^{t+1}} = \frac{u_j^t(1 + \delta u_{j-1}^t)}{1 + a u_j^t}$$

から「超離散化 + 変数変換 + 座標変換」によって得られ，多ソリトン解があることを示せる．

4. 楕円関数の超離散化

楕円関数 はさまざまな物理現象に登場する重要な関数である．ここでは楕円関数を超離散化し，さらに楕円関数解を有する方程式を解とセットで超離散化しよう⁹⁾．まずヤコビの楕円関数 $\text{cn}(u; k)$ を考える． $\text{cn}(u; k)$ は複素平面 u 上で 2 つの基本周期 $2\omega_1, 2\omega_3$ をもつ二重周期関数である．なお，以降では $\text{cn}(u; k)$ の母数 k を省略して $\text{cn } u$ と表記する．

$\text{cn } u$ は $\cos u$ のように正負の値をとることができ，このままでは超離散化しづらいので $\text{cn}^2 u$ を超離散化する．この際， $\varepsilon \log(\text{cn}^2 u)$ が意味のある関数になるように，超離散化パラメータ ε を u と k にうまく導入することがポイントとなる．そこで楕円テータ関数 $\theta_0(v; \tau), \theta_2(v; \tau), \theta_3(v; \tau)$ と $\text{cn } u$ との関係を利用する．なお，以降のテータ関数の表示は $\tau (= \omega_3/\omega_1)$ を省略して $\theta_0(v)$ 等とする．

$$\text{cn } u = \theta_0(0)\theta_2(v)/\theta_2(0)\theta_0(v)$$

ここで $u = \pi(\theta_3(0))^2 v, k = (\theta_2(0)/\theta_3(0))^2$ である．テータ関数はヤコビの虚数変換を用いて

$$\theta_0(v) = \sqrt{\frac{i}{\tau}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(v-(j+1/2))^2/\tau}$$

などと級数で表すことができる．さらに，新たなパラメータ $p (> 0)$ と超離散化パラメータ ε を用いて $\tau = i\varepsilon\pi/p$ とすれば

$$\theta_0(v) = \sqrt{\frac{p}{\pi\varepsilon}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{-p(v-(j+1/2))^2/\varepsilon}$$

となる．すると $\varepsilon \sim +0$ で

$$\begin{aligned} & (\theta_0(v))^2 \\ & \sim \frac{p}{\pi\varepsilon} \left(e^{-p(\{v\}-1/2)^2/\varepsilon} + e^{-p(\{v\}+1/2)^2/\varepsilon} \right)^2 \end{aligned}$$

と評価できる． $\{v\}$ はガウスの記号 $[v]$ によって $\{v\} = v - [v]$ と定義され， v の小数部分を与える．

他のテータ関数も同様の手続きによって評価でき，また $u \sim pv/\varepsilon$ となって結局

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log \text{cn}^2(pv/\varepsilon) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{-2p\{v\}/\varepsilon} + e^{-2p(1-\{v\})/\varepsilon}) \\ &= -p \min(2\{v\}, 2-2\{v\}) \end{aligned}$$

が導かれる．

以上で $\text{cn}^2 u$ の超離散化ができたことになるが，単に関数の極限をうまくとっただけである．これを利用して楕円関数解が存在する方程式を解とセットで超離散化できれば面白い．そこで差分方程式

$$x_{n+1}x_n^2x_{n-1} = \alpha + \beta x_n \quad (6)$$

を考える．この方程式には

$$x_n = a + b \text{cn}^2(\xi n; k)$$

という形の解が存在する．ここで a, b, ξ, k は (6) の初期値やパラメータ α, β と関連づけられる定数である． $x_n = e^{-X_n/\varepsilon}$ ， $\alpha = e^{-2p/\varepsilon}$ ， $\beta = e^{-2q/\varepsilon}$ とおき (6) の超離散化を行うと

$$X_{n+1} + 2X_n + X_{n-1} = \min(2p, X_n + 2q)$$

が得られる．これにあわせて解 x_n の方も超離散化し，上記 $\text{cn}^2 u$ の結果を利用すると，上式の解として

$$X_n = p \min\left(\frac{q}{p}, 2\left\{\frac{q}{2p}n\right\}, 2-2\left\{\frac{q}{2p}n\right\}\right)$$

が得られる．ただし p, q は $2/3 < q/p < 1$ を満たす正の定数である．

上の解 X_n は p, q を自然数にとると任意の n で 0 以上の整数値をとる．またその周期はせいぜい $2p$ である．図 8 に $p=8, q=7$ のときの解を示しておく．この図のような離散的な解の背後に楕円関数という連続関数が潜んでいるのである．

5. 終わりに

超離散化は種を明かせば何ということのない

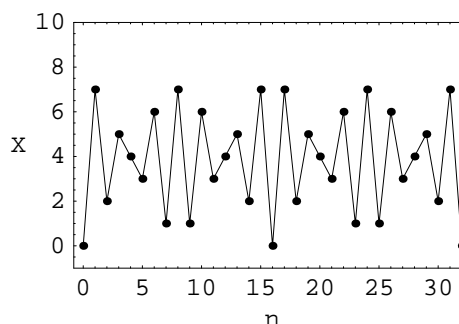


図 8 超離散楕円関数を含む解

単純な仕掛けである．しかしこれをうまく使えばあっと驚くからくりを作ることができるのではと筆者は期待している．子供時代に初めて万華鏡を覗いたときのように...

最後に，本記事で解説した成果は多くの方々との楽しい共同作業によって得られたものであることをお断りして筆をおく．

参考文献

- 1) 木村欣司，“差分方程式によるシルピンスキーのギャスケットの生成”，日本物理学会第 54 回年会 (1999 年 3 月)．
- 2) S. Wolfram, “Cellular Automata and Complexity”, Addison-Wesley (1994)．
- 3) T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247．
- 4) D. Takahashi and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514．
- 5) 広田良吾, 「直接法によるソリトンの数理」, 岩波書店 (1992)．
- 6) R. Hirota and S. Tsujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **64** (1995) 3125．
- 7) A. Nagai, D. Takahashi, and T. Tokihiro, “Soliton cellular automaton, Toda molecule equation and sorting algorithm”, Phys. Lett. A に投稿中．
- 8) D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A **30** (1997) L733．
- 9) D. Takahashi, T. Tokihiro, B. Grammaticos, Y. Ohta and A. Ramani, J. Phys. A **30** (1997) 7953．

(たかはし・だいすけ, 早稲田大学)