

離散系の新展開 — 超離散化による数理モデル

龍谷大学理工学部 高橋大輔

1 はじめに

次の極限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon} + \dots) = \max(A, B, \dots) \quad (1)$$

によって方程式の従属変数を離散化してしまう手法を超離散化と呼び、上式の極限を超離散極限と呼ぶ。この極限自身は見慣れないにせよ、特に目新しいノウハウが詰まっているわけではない。統計物理において自由エネルギーは

$$F = -kT \log \sum e^{-E_n/kT} \quad (2)$$

で導かれるが、低温の極限 $T \rightarrow +0$ を考えると上式と本質的に同じ極限が現れる [1]。また、ペトリネット解析においては \max 関数と和 $+$ を基本演算とする \max -plus 代数と呼ばれる代数を構築する試みがなされており、その代数が提供する離散演算を上の極限によって連続化するとどうなるかといったことが議論されている [2]。

しかしながら我々が上の極限をわざわざ超離散と呼ぶには理由がある。ソリトン理論では連続の微分方程式である Korteweg–de Vries 方程式、一部の独立変数が離散的な Toda 方程式や Lotka–Volterra 方程式、あるいは独立変数がすべて離散的な差分 Toda 方程式や差分 Lotka–Volterra 方程式など、離散の度合いが異なるソリトン方程式がひしめいている。また連続極限をとることによって離散的なソリトン方程式から連続的なソリトン方程式が得られ、それら方程式を満たす解の代数構造に共通の仕掛けがあることがわかっている。

さらに、完全にソリトンのなふるまいを示すセルオートマトン (ソリトン・セルオートマトン、以下でセルオートマトンは CA と略す) が新しくソリトン方程式の仲間に加わった。CA は独立変数だけではなく従属変数も離散的であ

ることが特徴であり、連続極限をとってただちに差分方程式や微分方程式に帰着させるわけにはいかない。そこで登場するのが (1) 式の極限である。右辺の A, B, \dots は整数値をとる従属変数と考え、左辺でそれら変数を $u = e^{A/\varepsilon}$, $v = e^{B/\varepsilon}, \dots$ と変数変換していると考え。すると、右辺は A, B, \dots のうちで最大のものは何かという離散的な手続きを表しているのに対し、左辺は u, v, \dots の和をとって \log をとるという解析的な手続きを表しているともみなすことができる。(ただし、 ε は極限をとらず有限値にとどめておく。) 以上の手続きによって差分ソリトン方程式の従属変数が離散化されソリトン CA に解の構造を含めて直接関係づけることが可能になった。

つまり (1) 式の極限は、解の代数構造 (あるいはその他の何らかの構造) を保存したまま方程式を離散化していく過程において最後に残された従属変数の離散化の部分を受け持っており、これによって方程式の離散化のシナリオが完成する。このシナリオにおいて (1) 式の極限を離散化過程の究極のものという意味で超離散化と呼ぶのである。(ただし広田良吾氏は微分方程式の離散化の果てだからという理由で超差分という用語を代わりに使用されている。用語については別の次元の議論が必要なのでこれについてはコメントにとどめておく。) 超離散化によってソリトン方程式やパルペ方程式など可積分方程式でどのようなことが可能になったかについて参考文献を挙げておく [3–10]。

ところが、(1) 式はただの極限であり可積分性などソリトン方程式に備わった性質を何ら要求していない。つまり、もっと幅広い応用の可能性がある。そこで本稿では応用の一例として交通流モデルに関係の深い CA を得た例を紹介する [11]。

2 超離散 Burgers 方程式

偏微分方程式である Burgers 方程式

$$v_t = 2vv_x + v_{xx} \quad (3)$$

は、Cole–Hopf 変換

$$v = f_x/f \quad (4)$$

により線形の偏微分方程式である拡散方程式

$$f_t = f_{xx} \quad (5)$$

に帰着する。変数変換により線形方程式に帰着するという性質は方程式の解析にとって非常に好ましい。そこで、この関係を保存したまま Burgers 方程式を差分化する。まず (5) 式を差分化し

$$\frac{f_j^{t+1} - f_j^t}{\Delta t} = \frac{f_{j+1}^t - 2f_j^t + f_{j-1}^t}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

を得る。次に差分 Cole–Hopf 変換

$$u_j^t = c \frac{f_{j+1}^t}{f_j^t} \quad (7)$$

を考える。ここで c は定数である。すると、(6) 式と (7) 式より u について閉じた方程式

$$u_j^{t+1} = u_{j-1}^t \frac{1 + \frac{1-2\delta}{c\delta} u_j^t + \frac{1}{c^2} u_{j+1}^t u_j^t}{1 + \frac{1-2\delta}{c\delta} u_{j-1}^t + \frac{1}{c^2} u_j^t u_{j-1}^t} \quad (8)$$

が得られる。ここで $\delta = \Delta t/(\Delta x)^2$ である。 $v(j\Delta x, t\Delta t) = \frac{1}{\Delta x} \log \frac{u_j^t}{c}$ とおき、 $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ の極限を考えると (8) 式から (3) 式が得られる。このことから (8) 式は Cole–Hopf 変換によって線形の方程式に帰着するという性質を保ったまま Burgers 方程式を差分化した差分 Burgers 方程式であると考えることができる。なお、上の結果は既に広田良吾氏が 1979 年に提出されている [12]。

次にこの方程式の超離散化を考える。まず、

$$u_j^t = e^{U_j^t/\varepsilon} \quad (9)$$

$$\frac{1-2\delta}{c\delta} = e^{-M/\varepsilon} \quad (10)$$

$$c^2 = e^{L/\varepsilon} \quad (11)$$

という変数変換およびパラメータの変換を考え、(8) 式に代入する。そして $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとり、超離散極限 (1) を用いると

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_{j-1}^t + \max(0, U_j^t - M, U_j^t + U_{j+1}^t - L) \\ &\quad - \max(0, U_{j-1}^t - M, U_{j-1}^t + U_j^t - L) \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。さらに、 \max, \min 関数に関する公式

$$\begin{aligned} \max(A, B, \dots) &= -\min(-A, -B, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \min(A, B, \dots) + X &= \min(A + X, B + X, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

などを利用すると上式は

$$\begin{aligned} U_j^{t+1} &= U_j^t + \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) \\ &\quad - \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t) \end{aligned} \quad (15)$$

と書き換えることができる。この方程式を超離散 Burgers 方程式と呼ぶ。もし、 M, L と初期値 U_j^0 (初期時刻には任意性があるので以降 $t = 0$ を初期時刻とする) が整数であれば任意の正の時刻の U_j^t の値はすべて整数値となる。すなわち従属変数も離散化される。

さらに、 $M > 0, L > 0$ とし U_j^0 の値を $0 \leq U_j^0 \leq L$ とすると

$$\begin{aligned} \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) &\geq 0 \\ \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t) &\geq 0 \\ \min(M, U_{j-1}^t, L - U_j^t) + U_j^t &= \min(M + U_j^t, U_{j-1}^t + U_j^t, L) \leq L \\ \min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t) - U_j^t &= \min(M - U_j^t, 0, L - U_{j+1}^t - U_j^t) \leq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

の関係より (15) 式の解は常に $0 \leq U_j^t \leq L$ を満たすことが示される。すなわち上のような条件をつけることにより、超離散 Burgers 方程式は $L+1$ 値の CA になる。この CA を Burgers CA と呼ぶ。

Burgers CA においても「Cole–Hopf 変換により線形の拡散方程式に帰着する」という性質は保たれている。まず、差分拡散方程式の変数を

$$f_j^t = \exp(F_j^t/\varepsilon) \quad (17)$$

と変換すると、(7), (9) 式より超離散 Cole–Hopf 変換

$$U_j^t = F_{j+1}^t - F_j^t + \frac{L}{2} \quad (18)$$

が得られる。これを (15) 式に代入すると超離散拡散方程式

$$F_j^{t+1} = \max(F_{j-1}^t, F_j^t + \frac{L}{2} - M, F_{j+1}^t) \quad (19)$$

が導かれる。もちろん (6) 式に直接 (17) 式を代入して超離散極限をとっても同じ式が導かれる。

3 ルール番号 184 の CA、交通流モデルと Burgers CA

まず Burgers CA のパラメータ M を $M \geq L$ とする。すると $0 \leq U_j^t \leq L$ なので (15) 式はより簡単な CA

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, L - U_j^t) - \min(U_j^t, L - U_{j+1}^t) \quad (20)$$

になる。さらに $L = 1$ とすると状態値が 0 か 1 だけの 2 値 CA になり、上式の真理値表は

$$\frac{U_{j-1}^t U_j^t U_{j+1}^t}{U_j^{t+1}} = \begin{matrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (21)$$

となる。これは Wolfram の番号付けによるとルール番号 184 の CA (以降 CA184) であり、Bool 表現では

$$U_j^{t+1} = (U_{j-1}^t \wedge \overline{U_j^t}) \vee (U_j^t \wedge U_{j+1}^t) \quad (22)$$

に等しい [13]。ここで $\wedge, \vee, \overline{}$ はそれぞれ Bool 演算の AND, OR and NOT を意味する。以上のことから CA184 は Burgers 方程式の超離散化によって得られた方程式の特別な場合にすぎないことがわかる。ということはこの CA の解析には Cole-Hopf 変換によって超離散拡散方程式を利用することが可能となる。

ところで CA184 は以前より交通流モデルのプロトタイプとしてしばしば用いられてきた [14, 15]。また、Burgers 方程式自身も交通流における渋滞領域の伝播を説明するために用いられている [16]。ただし前者は交通流を離散系とみなす CA モデルで用いられており、後者は交通流を流体的なふるまいをする連続系とみなして導かれている。超離散を介した両者の直接的関係は、ちょうど量子力学における波動性と粒子性の関係に似ていると言えるのではないだろうか。

では CA184 を含んでいる Burgers CA も非常に単純な交通流モデルになることを示そう。

まず、 L 車線の一方通行の道路を考える。この道路を進行方向に等分割し、各分割領域に進行方向に増えるサイト番号 j を割り当てる。そして時間も離散的であるとし、整数時刻 t を考える。車は任意の時刻でどこかのサイトに存在しなければならない。そして L 車線であるので各サイトには最大 L 台の車が存在可能である。Burgers CA (15) の U_j^t を時刻 t におけるサイト j の車の台数であるとすると、(15) 式は以下の車の移動ルールを表している。

時刻 t から $t+1$ へ変わる際、サイト j にいる車は同じサイトにとどまるか、次のサイト $j+1$ に移る。サイト $j+1$ に移る車の台数は最大 M 台である。この制限条件のもとで、サイト j の車のうちからサイト $j+1$ に現在空いているスペースに移れるだけ移る。

これより、時刻 t から $t+1$ でサイト j から $j+1$ に移る車の台数が $\min(M, U_j^t, L - U_{j+1}^t)$ であることになる。したがって上のルールを発展方程式の形に書き表すと (15) 式が得られる。

4 Burgers CA の解の挙動と基本図

前節で得られた Burgers CA による交通流モデルを解析するには、まず任意の初期状態からの解の挙動を知る必要がある。なお、CA184 については同じような解析がすでになされている。ただし、従来そのような解析では解が作る 0-1 パターンのパターン解析が行われていた [17, 18, 19]。一方、我々は Burgers 方程式 Cole-Hopf 変換 拡散方程式というシナリオを超離散のレベルでも保持している。連続系で Burgers 方程式の解の挙動は拡散方程式の解の挙動に翻訳することが可能である。(常にその方法が選択されるわけではないが。) そこで Burgers CA の解析に連続系の手法をそのまま持ち込んでみよう。

まず、議論を簡単にするためにサイト j に周期境界条件を課し、その周期を K であるとす

る。この K は、 K が奇数である場合には周期を $2K$ であるとみなすことにより、一般性を失うことなく偶数であるとすることができる。すると (15) 方程式が保存系であることより、

$$\rho = \frac{1}{KL} \sum_{i=1}^K U_i^t \quad (23)$$

が時間によらない定数であることがわかる。なお、この ρ は交通流モデルでは 1 サイト 1 車線あたりの車の平均密度に相当する。

次に、初期時刻を $t = 0$ とし任意の初期条件 U_j^0 に対する U_j^t の時間発展を考える。このとき (15) 式を直接解く代わりに (19) 式を利用する。 U_j^0 が与えられると (18) 式の関係から F_j^0 が

$$F_j^0 = \begin{cases} \sum_{i=0}^{j-1} (U_i^0 - \frac{L}{2}) & \text{if } j \geq 1 \\ U_0^0 - \frac{L}{2} - \sum_{i=0}^j (U_i^0 - \frac{L}{2}) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (24)$$

と定まり、任意の j に対して

$$F_{j+K}^0 - F_j^0 = \sum_{i=j}^{j+K-1} (U_i^0 - \frac{L}{2}) = KL(\rho - \frac{1}{2}) \quad (25)$$

が成り立つ。ただし、 F は定数の自由度があるので $F_0^0 = 0$ としている。この初期条件 F_j^0 から F_j^t が (19) 式より定まる。さらに (18) 式を用いると U_j^t が定まる。すなわち (15) 式を解く代わりに (19) 式を解けば時間発展が求められる。

十分大きな t に対して U_j^t は必ず定常になり、 U_j^t が作るその定常パターンを L, M , および ρ が満たすある条件によって分類することができる。たとえば $\frac{L}{2} \leq M, \rho < \frac{1}{2}$ の場合を考えてみよう。 $\alpha = \frac{L}{2} - M$ とすると $\alpha < 0$ であり、(19) 式から

$$F_j^t = \begin{cases} \max(\max(F_{j-t}^0, F_{j-t+2}^0, \dots, F_{j+t}^0), \\ \max(F_{j-t+1}^0, F_{j-t+3}^0, \dots, F_{j+t-1}^0) + \alpha) \end{cases} \quad (26)$$

を得る。(25) 式から今の場合は $F_{j+K}^0 < F_j^0$ であり、このことを上式にあてはめると $t \geq \frac{K}{2}$

を満たす t に対して

$$F_j^t = \begin{cases} \max(\max(F_{j-t}^0, F_{j-t+2}^0, \dots), \\ \max(F_{j-t+1}^0, F_{j-t+3}^0, \dots) + \alpha) \end{cases} \quad (27)$$

が成り立つことがわかる。ということは同じ t に対して

$$F_j^{t+1} = F_{j-1}^t \quad \text{かつ} \quad U_j^{t+1} = U_{j-1}^t \quad (28)$$

が成立する。すなわち $t \geq \frac{K}{2}$ のとき U_j^t は定常解であり、 U_j^t の作る数字のパターンは時刻が 1 増えるごとに右へ 1 シフトする。

M, L, ρ の他の条件についても同様の議論を行うと、

- $\frac{L}{2} \leq M$ の場合、遅くとも $t \geq \frac{K}{2}$ で定常解に到達する。このとき

$$U_j^{t+1} = \begin{cases} U_{j-1}^t & (\rho < 1/2) \\ U_j^t & (\rho = 1/2) \\ U_{j+1}^t & (\rho > 1/2) \end{cases} \quad (29)$$

- $\frac{L}{2} \leq M$ の場合、遅くとも $t \geq K$ で定常解に到達する。このとき

$$U_j^{t+1} = \begin{cases} U_{j-1}^t & (\rho < M/L) \\ U_j^t & (M/L \leq \rho \leq 1 - M/L) \\ U_{j+1}^t & (\rho > 1 - M/L) \end{cases} \quad (30)$$

という結果が得られる。図 1 に (a) $L = 3, M = 2, \rho = 0.4$, (b) $L = 3, M = 1, \rho = 0.4$, (c) $L = 3, M = 1, \rho = 0.7$ の各場合の時間発展の例を示す。

交通流の解析においては車の密度と流量との関係が重要であり、車の密度を横軸に車の流量を縦軸にとってプロットした基本図と呼ばれる図がしばしば用いられる。そこで車の流量を (15) および車の移動ルールより

$$q^t = \frac{1}{KL} \sum_{i=1}^K \min(M, U_i^t, U_{i+1}^t) \quad (31)$$

と定義する。すると q^t は十分大きな t で一定値になることがわかる。たとえば $\frac{L}{2} \leq M, \rho < \frac{1}{2}$

の場合、 $t \geq \frac{K}{2}$ で $F_j^{t+1} = F_{j-1}$ であるのでそれを (19) 式に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \min(0, F_j^t - F_{j-1}^t + \frac{L}{2} - M, \\ &\quad F_{j+1}^t - F_{j-1}^t) \quad (32) \\ &= \min(0, U_{j-1}^t - M, U_{j-1}^t + U_j^t - L) \end{aligned}$$

となる。すると任意の j に対して $U_j^t \leq M$, $U_j^t \leq L - U_{j+1}^t$ となるので

$$q^t = \frac{1}{KL} \sum_{i=1}^K U_i^t = \rho \quad (t \geq \frac{K}{2}) \quad (33)$$

となる。他の場合にも同様の議論を行うと

- $\frac{L}{2} \leq M$ の場合、遅くとも $t \geq \frac{K}{2}$ で q^t は一定値になり、このとき

$$q^t = \begin{cases} \rho & (\rho < 1/2) \\ 1 - \rho & (\rho \geq 1/2) \end{cases} \quad (34)$$

- $\frac{L}{2} > M$ の場合、遅くとも $t \geq K$ で q^t は一定値になり、このとき

$$q^t = \begin{cases} \rho & (\rho < M/L) \\ \frac{M}{L} & (M/L \leq \rho \leq 1 - M/L) \\ 1 - \rho & (\rho > 1 - M/L) \end{cases} \quad (35)$$

という結果が得られる。

5 おわりに

本稿では Burgers CA についての結果を述べてきた。講演では Burgers CA による交通流モデルを拡張して、モデルとしての妥当性をより高めた CA についても述べたがここでは紙数の都合上省略する。

ところで以上の結果では Burgers CA の解析に超離散拡散方程式 (19) が大活躍している。しかも Burgers 方程式 Cole-Hopf 変換 拡散方程式の関係を利用した連続系での解析が超離散極限によってパラレルに CA に翻訳されている。すなわち連続系における解析学が CA という離散系に導入されたのであり、新しい離散解析の手法を提示している。今後、超離散化によるこのような応用が続々現れることを筆者は切に願ってやまない。

参考文献

- [1]
- [2]
- [3] D. Takahashi and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514.
- [4] D. Takahashi and J. Matsukidaira, Phys. Lett. A **209** (1995) 184.
- [5] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247.
- [6] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro and M. Torii, Phys. Lett. A **225** (1997) 287.
- [7] B. Grammaticos, Y. Ohta, A. Ramani, D. Takahashi and K. M. Tamizhmani, Phys. Lett. A **226** (1997) 53.
- [8] S. Moriwaki, A. Nagai, J. Satsuma, T. Tokihiro, M. Torii, D. Takahashi and J. Matsukidaira, submitting to London Math. Soc. Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press.
- [9] D. Takahashi and J. Matsukidaira, J. Phys. A **30** (1997) L733.
- [10] D. Takahashi, T. Tokihiro, B. Grammaticos, Y. Ohta and A. Ramani, J. Phys. A **30** (1997) 7953.
- [11] K. Nishinari and D. Takahashi, submitting to Phys. Rev. E.
- [12] R. Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **46** (1979) 312.
- [13] S. Wolfram, *Cellular Automata and Complexity* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1994).
- [14] S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki, J. Phys. Soc. Jpn. **63** (1994) 3609.

- [15] H. Fukś and N. Boccara, to appear in Int. J. Mod. Phys. C.
- [16] T. Musha and H. Higuti, Jpn. J. Appl. Phys., **17** (1978) 811.
- [17] N. Boccara, J. Nasser and M. Roger, Phys. Rev. A **44** (1991) 866.
- [18] M. Land and R. K. Belew, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 5148.
- [19] H. Fukś, Phys. Rev. E **55** (1997) R2081.

☒ 1: