研究集会報告 9ME-S2

ソリトン理論の新展開

九州大学応用力学研究所
1998年5月

研究集会「ソリトン理論の新展開」報告集

１９９７（平成９）年１１月２６日〜２８日

研究代表者　　薩摩順吉（東京大学数理科学研究科）

目　次

Multiplicative dP_{II}の解とその超離散極限について

龍谷大理工学研究科　中尾　真一郎　(Nakao Shinichirou)
同志社大工学部　梶原　健司　(Kajiwara Kenji)
龍谷大理工学部　高橋　大輔　(Takahashi Daisuke)

1　はじめに

連続系の非線形可積分な方程式の「解の構造を保存した離散化」は、すでに1970年代より行なわれてきた [1,2]。その一方で、最近のアルゴリズムなどの研究 [3,4] から離散系、すなわち差分方程式そのものの解や背後の構造の解析が重要な研究対象になりつつある。

しかし、離散系の可積分性を判定し解を構成するということは一般に難しい。これを克服するための方法となりうるのが Grammaticos らによって提出された Singularity Confinement(SC) である [5]。この SC はいわゆる Painlevé テストの離散版とみなすことができ、その有効性も報告 [6] されているが、その数学的根拠は今なお不明である。

さて、この SC を満たす差分方程式として離散 Painlevé 方程式とよばれる常差分方程式が知られている [7]。その後、このようなクラスの離散 Painlevé 方程式は多数発見されている。連続系の Painlevé 方程式は非線形可積分な方程式の最も根底にある方程式とされ、その解は特殊函数の非線形版と考えることができる。従って、離散 Painlevé 方程式にも連続系と同様のことが期待される。しかし、SC の数学的根拠が明らかでない以上、その妥当性を検証する必要がある。以上の観点からいくつかの離散 Painlevé 方程式に対して、その解の構造が議論されてきた [8,9]。

さらに、最近になって Takahashi らによって超離散化の理論が発見された。超離散化とは差分方程式などにおいて、従属変数を離散化する手法である。手続きとしては方程式を適当に変数変換した後、

$$\lim_{\epsilon \to +0} \epsilon \log(e^{\frac{A}{\epsilon}} + e^{\frac{B}{\epsilon}} + \cdots) = \max(A, B, \cdots), \tag{1.1}$$

という極限をとることにより、従属変数が離散化される。これにより、広い意味での計算機科学、例えばセルオートマトン (CA) などへの応用が期待できる [10]。これと並行して上で述べた離散 Painlevé 方程式の超離散化も行なわれ、超離散 Painlevé 方程式と呼ばれる方程式も提出された [11]。しかし、いままで連続系と解の対応が議論されてきた離散 Painlevé 方程式は超離散極限 (1.1) のとり方が現在不明である。

そこで本稿では超離散極限がとれる離散 Painlevé 方程式として multiplicative dP_{II}(mdP_{II})

$$x_{n+1}x_{n-1} = \alpha \frac{x_n + q^n}{x_n(x_n q^n + 1)}, \tag{1.2}$$

を取り上げ、この解とその超離散極限について議論することにする。連続系の P_{II}には特殊函数解と有理解と呼ばれる2つのクラスの解が存在することが知られている。よって本稿でもそれらに分けて議論することにする。

2 $\mathbf{mdP_{II}}$の特殊函数解

2.1 特殊函数解

まず特殊函数解について考える。始めに、行列式で示されるτ 函数を定義する。このτ 函数とは大きさが $(N\times N)$, 左上の要素の添字を n としたときの行列式

$$\tau_N^n=\begin{vmatrix} f_n & f_{n+2} & \cdots & f_{n+2N-2} \\ f_{n-1} & f_{n+1} & \cdots & f_{n+2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-N+1} & f_{n-N+3} & \cdots & f_{n+N-1} \end{vmatrix}, \tag{2.1}$$

で表され、この要素 f_nが特殊函数に対応する。ここで、Nは 0 以上の整数値、n は任意の整数値をとるものとする。また、$\tau_0^n=1$ と定義する。なお、f_nは

$$f_{n+2}-f_{n+1}=-q^{2(n+1)}f_n, \tag{2.2}$$

を満たすものとする。このτ 函数 (2.1) を用いて、式 (1.2) の解は

$$x_n=-\frac{1}{q^{2N+n}}\frac{\tau_{N+1}^n\,\tau_N^{n-1}}{\tau_N^n\,\tau_{N+1}^{n-1}}, \tag{2.3}$$

で表され、このときのαの値は

$$\alpha=\frac{1}{q^{4N+2}}, \tag{2.4}$$

で与えられる。

2.2 結果の導出

本稿では、証明の概略だけを述べることにする。まず、τ 函数 (2.1) が満たす以下の 3 本の双線形差分方程式

$$q^{2N}\tau_{N+1}^n\tau_N^{n+1}-\tau_{N+1}^{n+1}\tau_N^n-q^{2n}\tau_N^{n+2}\tau_{N+1}^{n-1}=0, \tag{2.5a}$$

$$\tau_{N+1}^{n+2}\tau_{N-1}^{n+1}-q^{2(n+2N+1)}\tau_N^{n+2}\tau_N^{n+1}+q^{2(n+1)}\tau_N^n\tau_N^{n+3}=0, \tag{2.5b}$$

$$\tau_N^{n+1}\tau_N^n-\tau_N^{n-1}\tau_N^{n+2}-\tau_{N+1}^n\tau_{N-1}^{n+1}=0, \tag{2.5c}$$

を準備する。これは行列式の恒等式として知られる Plücker の関係式と Jacobi の恒等式を満たしている。この 3 本の双線形差分方程式から

$$v_N^n=\frac{\tau_{N+1}^n}{\tau_N^n},\quad u_N^n=\frac{\tau_N^n\tau_N^{n+3}}{\tau_N^{n+1}\tau_N^{n+2}},$$

とおき、u_n, v_{n-1}を消去することにより、変数変換（2.3）をすることによって式（1.2）が得られ、そのときαが式（2.4）となるので、式（2.3）が解となっていることが証明される。

3 $\mathbf{mdP_{II}}$の超離散極限

3.1 $\mathbf{mdP_{II}}$の超離散極限

次に、$\mathrm{mdP_{II}}$の方程式のレベルでの超離散極限について考える。式 (1.2) において $q\geq 0,\alpha\geq 0, x_n\geq 0$ を仮定し、

$$q=e^{\frac{1}{\epsilon}},\ x_n=e^{\frac{X_n}{\epsilon}},\ \alpha=e^{\frac{a}{\epsilon}}, \tag{3.1}$$

とおくと

$$e^{\frac{X_{n+1}}{\epsilon}}e^{\frac{X_{n-1}}{\epsilon}}=e^{\frac{a}{\epsilon}}\frac{e^{\frac{X_n}{\epsilon}}+e^{\frac{n}{\epsilon}}}{e^{\frac{X_n}{\epsilon}}(e^{\frac{X_n+n}{\epsilon}}+1)},$$

となる。両辺の対数をとり、$\epsilon\to+0$ の超離散極限 (1.1) をとると、

$$X_{n+1}=a+n-X_{n-1}-X_n+\max(X_n-n,0)-\max(X_n+n,0), \tag{3.2}$$

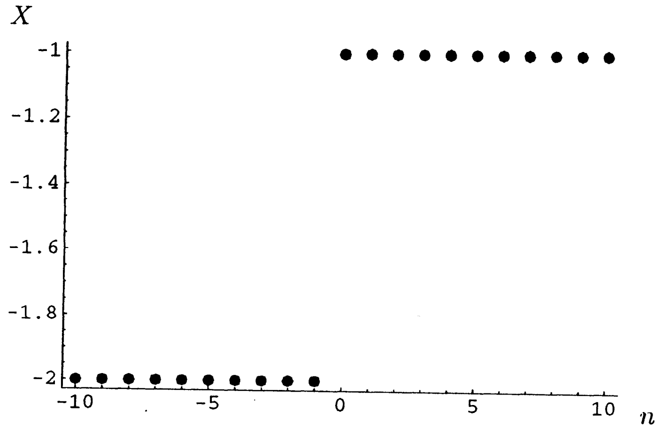
が得られる [12]。以後、方程式 (3.2) を ultra-discrete $\mathrm{P_{II}}$ ($\mathrm{u}-\mathrm{P_{II}}$) と呼ぶことにする。

3.2 ultra − discrete $\mathbf{P_{II}}$の解

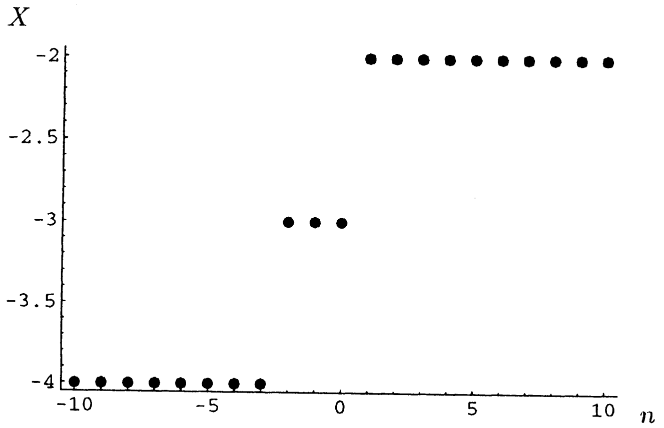
式 (3.2) の解として、Nを負でない整数として $a=-4N$ $(N=1,2,\cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}X_n^N=-2N+\sum_{k=1}^{N}[&\max\{n+1+2(N-1)-3(k-1),0\}\\&-\max\{n+2(N-1)-3(k-1),0\}],\end{aligned} \tag{3.3}$$

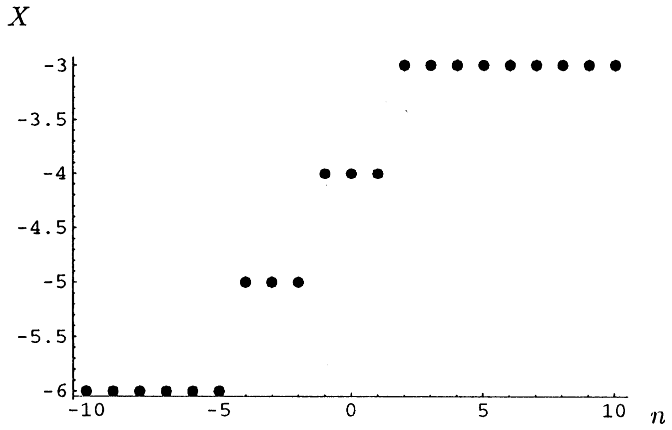
が存在する [12]。ただし、$N=0$ のとき $X_n^0=0$ である。例として、$N=1\sim3$ のときの解とそのグラフを以下に示す。



$$X_n^1=-2+\max(n+1,0)$$
$$-\max(n,0).$$



$$X_n^2=-4$$
$$+\max(n+3,0)-\max(n+2,0)$$
$$+\max(n,0)-\max(n-1,0).$$



$$X_n^3 = -6 + \max(n+5,0) - \max(n+4,0) + \max(n+2,0) - \max(n+1,0) + \max(n-1,0) - \max(n-2,0).$$

Fig.3.1 u-P_{II}における解 X_n

4 mdP$_{II}$の有理解と超離散極限

4.1 mdP$_{II}$の有理解

次に mdP$_{II}$(1.2) の有理解について考察する。P$_{II}$の有理解については前に述べたようにその行列式表現が知られている。しかし、今回それに対応する mdP$_{II}$の有理解の行列式表現を得ることはできなかった。しかし、ここで注目に値する現象を見い出すことができたので以下でそれについて述べる。

mdP$_{II}$(1.2) には BT

$$y_n = \frac{x_n x_{n-1} + b(1 + \frac{x_n}{q^n})}{x_n(x_n x_{n-1} + \frac{qx}{q^n} + q)}, \tag{4.1}$$

があるので、これを用いて有理解を構成していくことができる。すると、最低次の有理解はτ関数を

$$\tau_1(n) = (1+q)z + q, \ z = q^n, \tag{4.2}$$

としたとき、

$$x_n = \frac{1}{q^2}\frac{\tau_1(n+1)}{\tau_1(n)}. \tag{4.3}$$

となっている。その次の有理解は

$$\begin{aligned}\tau_2(n) = z^3(q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 1) \\ +z^2(q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \\ +zq(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + q^4,\end{aligned} \tag{4.4}$$

としたとき、

$$x_n = \frac{1}{q^4}\frac{\tau_1(n)\tau_2(n+1)}{\tau_1(n+1)\tau_2(n)}, \tag{4.5}$$

となっている。これ以降も同様に構成できるが、τ_3以降は繁雑であるので省略する。

4.2 有理解の超離散極限

次に前節で述べた有理解、すなわち解のレベルでの超離散極限を考える。式 (4.3) において u-P_{II} を作ったときに使った変数変換 (3.1)

$$q = e^{\frac{1}{\epsilon}},\ x_n = e^{\frac{X_n}{\epsilon}},\ \alpha = e^{\frac{a}{\epsilon}},$$

を用いて、両辺対数をとり、極限$\epsilon \to +0$ をとる。以下でϵを 0 に近付けた様子を示す。

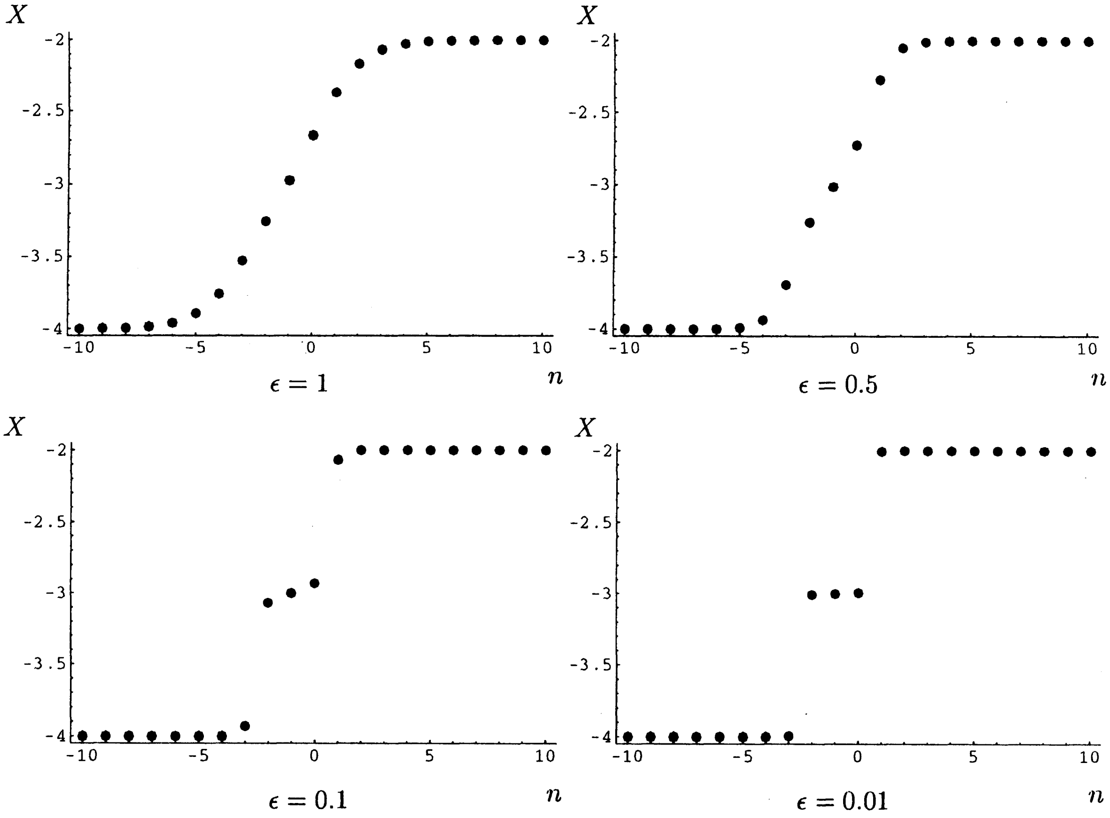


Fig.4.2 有理解 (4.5) の超離散極限

Fig.4.2 から、超離散極限 (1.1) により mdP$_{II}$(1.2) の有理解 (4.5) は u$-$P$_{II}$(3.2) の解に一致するようである。以下ではこれを解析的に示す。示す。ここでは有理解 (4.3) について示す。有理解 (4.3) は変数変換 (3.1) によって

$$X_n = \epsilon \log \frac{e^{\frac{n+1}{\epsilon}} + e^{\frac{n+2}{\epsilon}} + e^{\frac{1}{\epsilon}}}{e^{\frac{2}{\epsilon}}(e^{\frac{n}{\epsilon}} + e^{\frac{n+1}{\epsilon}} + e^{\frac{1}{\epsilon}})},$$

となり、超離散極限 (1.1) をとると

$$\begin{aligned} X_n &= -2 + \max(n+1, n+2, 1) - \max(n, n+1, 1) \\ &= -2 + \max(n+2, 1) - \max(n+1, 1) \\ &= -2 + \max(n+1, 0) - \max(n, 0), \end{aligned}$$

となり解 X_n^1に一致する。これ以降も同様の議論によって有理解 (4.5) が超離散極限を行なうことにより解 X_n^2に一致することなどが示せる。

5 おわりに

本論文で $\mathrm{mdP_{II}}$ の解に関する議論を行なった。その結果、$\mathrm{mdP_{II}}$には連続系の $\mathrm{P_{II}}$ に存在する特殊函数解、有理解に対応する解が存在し、特殊函数解の方はその行列表現を得ることができた。また有理解の方は、行列式表現は今回得ることはできなかったが、この解が超離散極限によっても意味のある解を構成し、超離散の方程式においては階段形の解になるであろうという予想をすることができた。

今後の課題としては、まず、有理解の行列表現を得ることであろう。これによって超離散極限による解の一般形を示せるであろう。この解が何か Painlevé 方程式にとって本質的な数理構造のみを抽出していることががあわせて期待される。また、今回得た特殊函数解の方は正値性の問題から、超離散化の議論はできなかった。果たして、この解に間しては本当に超離散化できないのか、今後の検討課題である。

最後に、連続方程式の Painlevé 性、離散方程式の SC、と示してきたが、超離散極限の Painlevé 性に当たるものは存在しないのか。これも今後の研究課題である。

参考文献

[1] R.Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **43** (1977) 1424.

[2] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto and T.Imai, J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 1872.

[3] V.G.Papageorgiou, B.Grammaticos and A.Ramani,Phys. Lett. A **179** (1993) 111.

[4] 中村佳正, 京大数理解析研究所講究録, **868** (1994) 223.

[5] B.Grammaticos, A.Ramani and V.G.Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825.

[6] K.Maruno, K.Kajiwara, S.Nakao and M.Oikawa, Phys. Lett. A **229** (1997)173.

[7] A.Ramani, B.Grammaticos and J.Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829.

[8] K.Kajiwara, Y.Ohta, J.Satsuma, B.Grammaticos and A.Ramani, J. Phys. A: Math. Gen **27** (1994) 915.

[9] F.Nijhoff, J.Satsuma, K.Kajiwara, B.Grammaticos and A.Ramani, Inverse Problems **12** (1996) 697.

[10] J.Matsukidaira, J.Satsuma, D.Takahashi, T.Tokihiro, M.Torii, Phys. Lett. A. **287** (1997) 225.

[11] B.Grammaticos, Y.Ohta, A.Ramani, D.Takahashi, K.M.Tamizhmani, Phys. Lett. A **226** (1997) 53.

[12] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta and A.Ramani, J. Phys. A: Math. Gen **30** (1997) 7953.