

研究集会報告 9ME-S2

ソリトン理論の新展開



九州大学応用力学研究所

1998年5月

研究集会「ソリトン理論の新展開」報告集

1997 (平成9) 年11月26日~28日

研究代表者 薩摩順吉 (東京大学数理科学研究科)

目次

1. 勾配系の可積分差分と線形計画法	1
中村 佳正 (大阪大学基礎工学研究科)	
2. 箱と玉の系 — 離散 Lotka-Volterra 方程式の超極限 —	7
時弘 哲治 (東京大学数理科学研究科)	
3. Discretization of the potential modified KdV equation	11
広田 良吾 (早稲田大学理工学部)	
4. 超離散戸田分子と SCA (Soliton Cellular Automaton)	17
永井 敦 (東京大学数理科学研究科)	
5. 離散系の新展開 — 超離散化による数理モデル	23
高橋 大輔 (龍谷大学理工学部)	
6. 量子カロジェロ模型の代数構造	29
笥 三郎 (東京大学数理科学研究科)	
7. Benjamin-Ono 方程式の逆散乱法	35
松野 好雅 (山口大学工学部)	
8. 1次元体の非線形ダイナミクスと応用について	41
西成 活裕 (山形大学工学部)	
9. 渦糸の発展方程式に対する一考察	47
福本 康秀 (九州大学数理学研究科)	
10. 固体中のソリトン — 離散モデルと連続モデル	52
川原 琢治 (京都大学工学研究科)	

1 1. Nonlinear surface modes in solids - basic difference from linear surface modes (Rayleigh modes) and multistability	58
武野 正三 (大阪工業大学情報科学部)	
Yuri Kivshar (Australian National University)	
Fei Zhang (National University of Singapore)	
1 2. Reflection of active waves in reaction-diffusion media	66
松岡 千博 (愛媛大学理学部)	
1 3. 戸田格子と等価な非線形回路の 2, 3 の話題	72
渡辺 慎介 (横浜国立大学工学部)	
1 4. Davey-Stewartson 方程式の周期ソリトンの相互作用	79
渡辺 陽介 (大阪府立大学工学部)	
田尻 昌義 (大阪府立大学工学部)	
1 5. Bogoyavlenskii-Schiff 方程式の解析	85
齋 成周 (立命館大学理工学部)	
福山 武志 (立命館大学理工学部)	
戸田 晃一 (立命館大学理工学部)	
佐々 成正 (日本原子力研究所)	
1 6. DDT method for Lamé potentials and modular function	90
大宮 真弓 (同志社大学工学部)	
Rudi Weikard (アラバマ大学バーミングハム校)	
1 7. 離散ソリトン方程式と Singularity Confinement	96
丸野 健一 (九州大学総合理工学研究科)	
梶原 健司 (同志社大学工学部)	
及川 正行 (九州大学応用力学研究所)	
1 8. On the τ -functions of the A_2 system	103
岡本 和夫 (東京大学数理科学研究科)	
1 9. Painlevé IV 方程式の代数解と Schur 関数	117
梶原 健司 (同志社大学工学部)	
太田 泰広 (広島大学工学部)	

2 0 .	Multiplicative dP_n の解とその超離散極限について	125
	中尾真一郎 (龍谷大学理工学研究科)	
	梶原 健司 (同志社大学工学部)	
	高橋 大輔 (龍谷大学理工学部)	
2 1 .	The Fermion Approach to Darboux Transformation	131
	Ralph Willox (東京大学数理科学研究科)	
2 2 .	String Solitons in M Theory Fivebrane	137
	藤井 一幸 (横浜市立大学理学部)	
2 3 .	Yang-Mills 方程式から導かれる非線形可積分方程式	142
	佐々 成正 (日本原子力研究所)	
2 4 .	Self Dual Yang Mills and Bilinear Equations	147
	Claire Gilson (University of Glasgow)	
	Jonathan Nimmo (University of Glasgow)	
	太田 泰広 (広島大学工学部)	
2 5 .	Neugebauer-Kramer Solutions to Ernst Equation in Hirota s Direct Method	154
	増田 哲 (立命館大学理工学研究科)	
	佐々 成正 (日本原子力研究所)	
2 6 .	定常軸対称 Einstein 方程式における共形因子について	162
	橋本 隆司 (鳥取大学工学部)	
2 7 .	宇宙プラズマ中の非線形波動	168
	羽田 亨 (九州大学総合理工学研究科)	
2 8 .	水の波のソリトンに関するいくつかの話題	173
	及川 正行 (九州大学応用力学研究所)	

Multiplicative dP_{II} の解とその超離散極限について

龍谷大理工学研究科 中尾 真一郎 (Nakao Shinichirou)
同志社大工学部 梶原 健司 (Kajiwara Kenji)
龍谷大理工学部 高橋 大輔 (Takahashi Daisuke)

1 はじめに

連続系の非線形可積分な方程式の「解の構造を保存した離散化」は、すでに1970年代より行なわれてきた[1,2]。その一方で、最近のアルゴリズムなどの研究[3,4]から離散系、すなわち差分方程式そのものの解や背後の構造の解析が重要な研究対象になりつつある。

しかし、離散系の可積分性を判定し解を構成するということは一般に難しい。これを克服するための方法となりうるのがGrammaticosらによって提出されたSingularity Confinement(SC)である[5]。このSCはいわゆるPainlevéテストの離散版とみなすことができ、その有効性も報告[6]されているが、その数学的根拠は今なお不明である。

さて、このSCを満たす差分方程式として離散Painlevé方程式とよばれる常差分方程式が知られている[7]。その後、このようなクラスの離散Painlevé方程式は多数発見されている。連続系のPainlevé方程式は非線形可積分な方程式の最も根底にある方程式とされ、その解は特殊函数の非線形版と考えることができる。従って、離散Painlevé方程式にも連続系と同様のことが期待される。しかし、SCの数学的根拠が明らかでない以上、その妥当性を検証する必要がある。以上の観点からいくつかの離散Painlevé方程式に対して、その解の構造が議論されてきた[8,9]。

さらに、最近になってTakahashiらによって超離散化の理論が発見された。超離散化とは差分方程式などにおいて、従属変数を離散化する手法である。手続きとしては方程式を適当に変数変換した後、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{\frac{A}{\epsilon}} + e^{\frac{B}{\epsilon}} + \dots) = \max(A, B, \dots), \quad (1.1)$$

という極限をとることにより、従属変数が離散化される。これにより、広い意味での計算機科学、例えばセルオートマトン(CA)などへの応用が期待できる[10]。これと並行して上で述べた離散Painlevé方程式の超離散化も行なわれ、超離散Painlevé方程式と呼ばれる方程式も提出された[11]。しかし、いままで連続系と解の対応が議論されてきた離散Painlevé方程式は超離散極限(1.1)のとり方が現在不明である。

そこで本稿では超離散極限がとれる離散Painlevé方程式としてmultiplicative dP_{II} (mdP_{II})

$$x_{n+1}x_{n-1} = \alpha \frac{x_n + q^n}{x_n(x_n q^n + 1)}, \quad (1.2)$$

を取り上げ、この解とその超離散極限について議論することにする。連続系の P_{II} には特殊函数解と有理解と呼ばれる2つのクラスの解が存在することが知られている。よって本稿でもそれらに分けて議論することにする。

2 mdP_{II}の特殊函数解

2.1 特殊函数解

まず特殊函数解について考える。始めに、行列式で示される τ 函数を定義する。この τ 函数とは大きさが $(N \times N)$, 左上の要素の添字を n としたときの行列式

$$\tau_N^n = \begin{vmatrix} f_n & f_{n+2} & \cdots & f_{n+2N-2} \\ f_{n-1} & f_{n+1} & \cdots & f_{n+2N-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n-N+1} & f_{n-N+3} & \cdots & f_{n+N-1} \end{vmatrix}, \quad (2.1)$$

で表され、この要素 f_n が特殊函数に対応する。ここで、 N は0以上の整数値、 n は任意の整数値をとるものとする。また、 $\tau_0^n = 1$ と定義する。なお、 f_n は

$$f_{n+2} - f_{n+1} = -q^{2(n+1)} f_n, \quad (2.2)$$

を満たすものとする。この τ 函数(2.1)を用いて、式(1.2)の解は

$$x_n = -\frac{1}{q^{2N+n}} \frac{\tau_{N+1}^n \tau_N^{n-1}}{\tau_N^n \tau_{N+1}^{n-1}}, \quad (2.3)$$

で表され、このときの α の値は

$$\alpha = \frac{1}{q^{4N+2}}, \quad (2.4)$$

で与えられる。

2.2 結果の導出

本稿では、証明の概略だけを述べることにする。まず、 τ 函数(2.1)が満たす以下の3本の双線形差分方程式

$$q^{2N} \tau_{N+1}^n \tau_N^{n+1} - \tau_{N+1}^{n+1} \tau_N^n - q^{2n} \tau_N^{n+2} \tau_{N+1}^{n-1} = 0, \quad (2.5a)$$

$$\tau_{N+1}^{n+2} \tau_{N-1}^{n+1} - q^{2(n+2N+1)} \tau_N^{n+2} \tau_{N+1}^{n+1} + q^{2(n+1)} \tau_N^n \tau_N^{n+3} = 0, \quad (2.5b)$$

$$\tau_N^{n+1} \tau_N^n - \tau_N^{n-1} \tau_N^{n+2} - \tau_{N+1}^n \tau_{N-1}^{n+1} = 0, \quad (2.5c)$$

を準備する。これは行列式の恒等式として知られる Plücker の関係式と Jacobi の恒等式を満たしている。この3本の双線形差分方程式から

$$v_N^n = \frac{\tau_{N+1}^n}{\tau_N^n}, \quad u_N^n = \frac{\tau_N^n \tau_N^{n+3}}{\tau_{N+1}^{n+1} \tau_N^{n+2}},$$

とおき、 u_n, v_{n-1} を消去することにより、変数変換(2.3)をすることによって式(1.2)が得られ、そのとき α が式(2.4)となるので、式(2.3)が解となっていることが証明される。

3 mdP_{II}の超離散極限

3.1 mdP_{II}の超離散極限

次に、mdP_{II}の方程式のレベルでの超離散極限について考える。式(1.2)において $q \geq 0, \alpha \geq 0, x_n \geq 0$ を仮定し、

$$q = e^{\frac{1}{\epsilon}}, \quad x_n = e^{\frac{x_n}{\epsilon}}, \quad \alpha = e^{\frac{\alpha}{\epsilon}}, \quad (3.1)$$

とおくと

$$e^{\frac{X_{n+1}}{\epsilon}} e^{\frac{X_{n-1}}{\epsilon}} = e^{\frac{a}{\epsilon}} \frac{e^{\frac{X_n}{\epsilon}} + e^{\frac{n}{\epsilon}}}{e^{\frac{X_n}{\epsilon}} (e^{\frac{X_n+n}{\epsilon}} + 1)},$$

となる。両辺の対数を取り、 $\epsilon \rightarrow +0$ の超離散極限 (1.1) をとると、

$$X_{n+1} = a + n - X_{n-1} - X_n + \max(X_n - n, 0) - \max(X_n + n, 0), \quad (3.2)$$

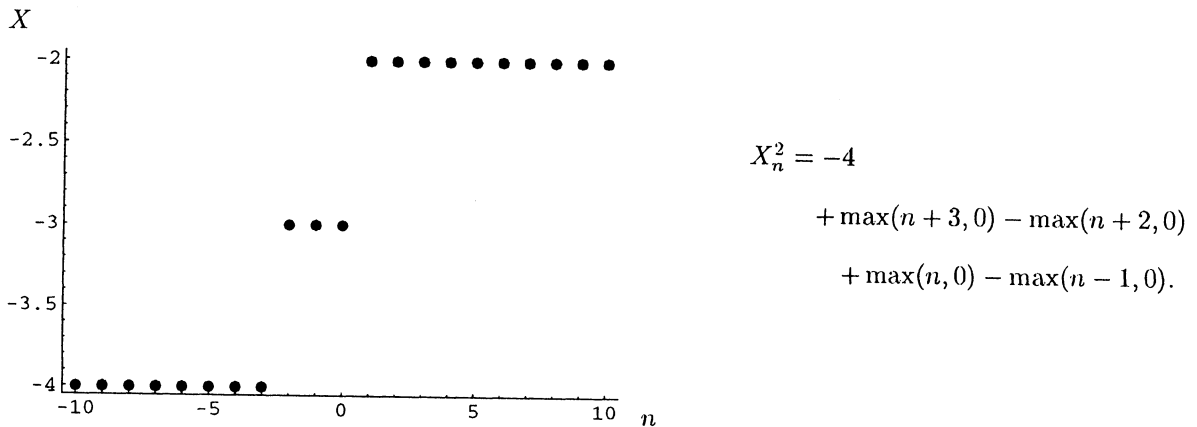
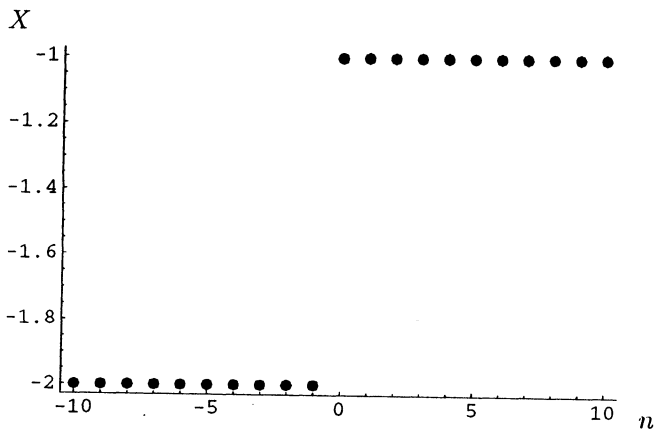
が得られる [12]。以後、方程式 (3.2) を ultra-discrete P_{II} ($u - P_{II}$) と呼ぶことにする。

3.2 ultra-discrete P_{II} の解

式 (3.2) の解として、 N を負でない整数として $a = -4N$ ($N = 1, 2, \dots$) のとき

$$X_n^N = -2N + \sum_{k=1}^N [\max\{n + 1 + 2(N - 1) - 3(k - 1), 0\} - \max\{n + 2(N - 1) - 3(k - 1), 0\}], \quad (3.3)$$

が存在する [12]。ただし、 $N = 0$ のとき $X_n^0 = 0$ である。例として、 $N = 1 \sim 3$ のときの解とそのグラフを以下に示す。



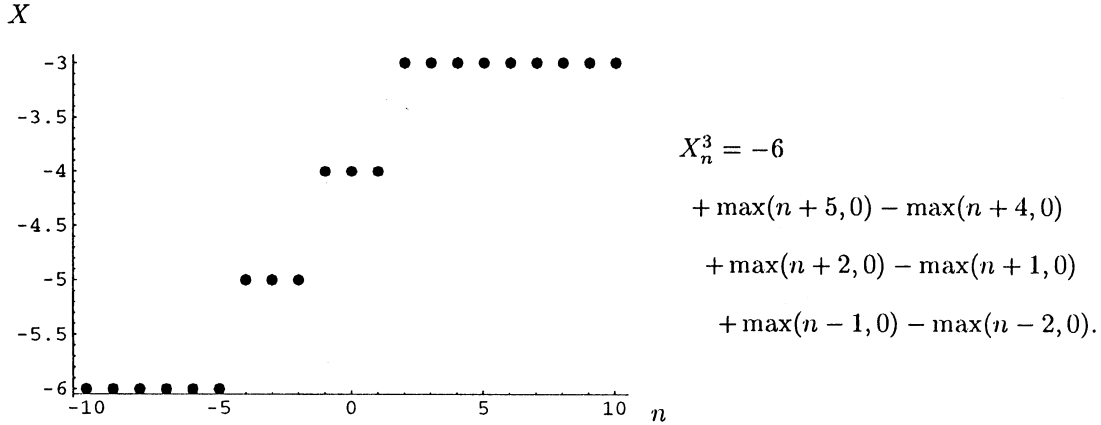


Fig.3.1 u-P_{II}における解 X_n

4 mdP_{II}の有理解と超離散極限

4.1 mdP_{II}の有理解

次に mdP_{II}(1.2) の有理解について考察する。P_{II}の有理解については前に述べたようにその行列式表現が知られている。しかし、今回それに対応する mdP_{II}の有理解の行列式表現を得ることはできなかった。しかし、ここで注目に値する現象を見出すことができたので以下でそれについて述べる。

mdP_{II}(1.2) には BT

$$y_n = \frac{x_n x_{n-1} + b(1 + \frac{x_n}{q^n})}{x_n(x_n x_{n-1} + \frac{qx}{q^n} + q)}, \quad (4.1)$$

があるので、これを用いて有理解を構成していくことができる。すると、最低次の有理解は τ 関数を

$$\tau_1(n) = (1+q)z + q, \quad z = q^n, \quad (4.2)$$

としたとき、

$$x_n = \frac{1}{q^2} \frac{\tau_1(n+1)}{\tau_1(n)}. \quad (4.3)$$

となっている。その次の有理解は

$$\begin{aligned} \tau_2(n) = & z^3(q^5 + 2q^4 + q^3 + q^2 + 2q + 1) \\ & + z^2(q^6 + 2q^5 + 2q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \\ & + zq(q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1) + q^4, \end{aligned} \quad (4.4)$$

としたとき、

$$x_n = \frac{1}{q^4} \frac{\tau_1(n)\tau_2(n+1)}{\tau_1(n+1)\tau_2(n)}, \quad (4.5)$$

となっている。これ以降も同様に構成できるが、 τ_3 以降は繁雑であるので省略する。

4.2 有理解の超離散極限

次に前節で述べた有理解、すなわち解のレベルでの超離散極限を考える。式 (4.3) において $u\text{-P}_{II}$ を作ったときに使った変数変換 (3.1)

$$q = e^{\frac{1}{\epsilon}}, \quad x_n = e^{\frac{X_n}{\epsilon}}, \quad \alpha = e^{\frac{a}{\epsilon}},$$

を用いて、両辺対数を取り、極限 $\epsilon \rightarrow +0$ をとる。以下で ϵ を 0 に近付けた様子を示す。

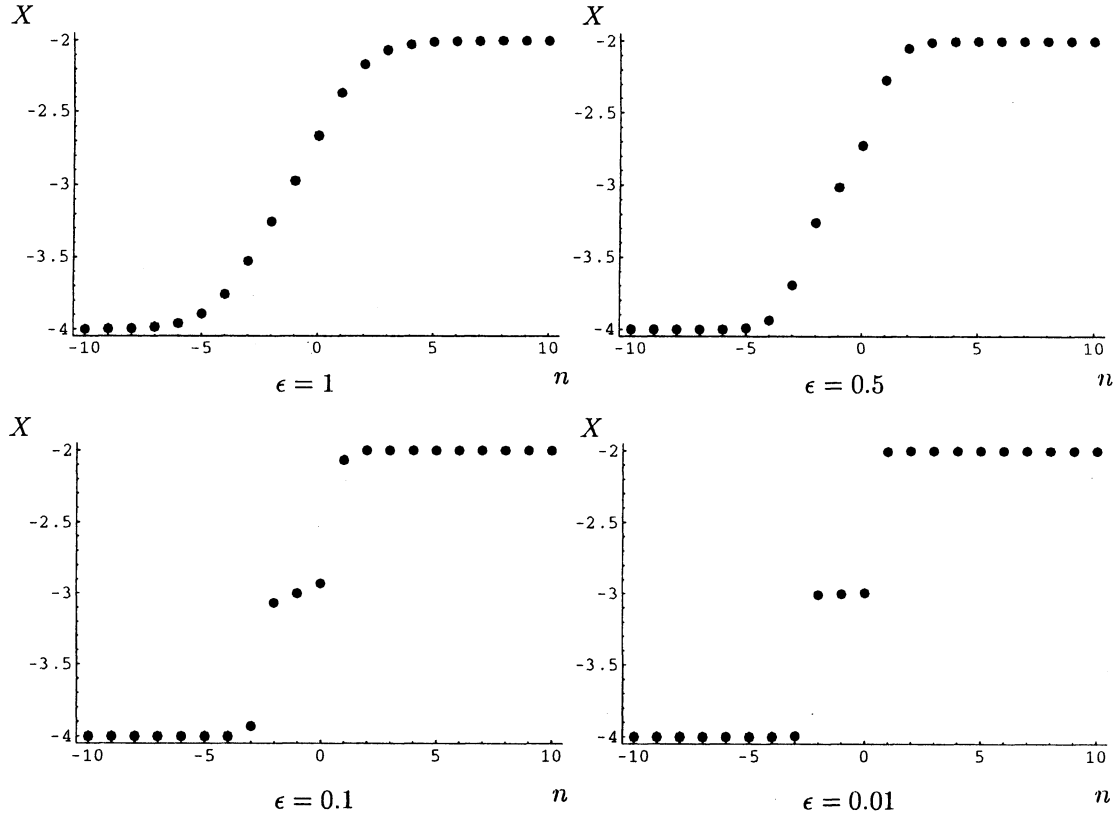


Fig.4.2 有理解 (4.5) の超離散極限

Fig.4.2 から、超離散極限 (1.1) により mdP_{II} (1.2) の有理解 (4.5) は $u\text{-P}_{II}$ (3.2) の解に一致するようである。以下ではこれを解析的に示す。示す。ここでは有理解 (4.3) について示す。有理解 (4.3) は変数変換 (3.1) によって

$$X_n = \epsilon \log \frac{e^{\frac{n+1}{\epsilon}} + e^{\frac{n+2}{\epsilon}} + e^{\frac{1}{\epsilon}}}{e^{\frac{2}{\epsilon}} (e^{\frac{n}{\epsilon}} + e^{\frac{n+1}{\epsilon}} + e^{\frac{1}{\epsilon}})},$$

となり、超離散極限 (1.1) をとると

$$\begin{aligned} X_n &= -2 + \max(n+1, n+2, 1) - \max(n, n+1, 1) \\ &= -2 + \max(n+2, 1) - \max(n+1, 1) \\ &= -2 + \max(n+1, 0) - \max(n, 0), \end{aligned}$$

となり解 X_n^1 に一致する。これ以降も同様の議論によって有理解 (4.5) が超離散極限を行なうことにより解 X_n^2 に一致することなどが示せる。

5 おわりに

本論文で mdP_{II} の解に関する議論を行なった。その結果、 mdP_{II} には連続系の P_{II} に存在する特殊函数解、有理解に対応する解が存在し、特殊函数解の方はその行列表現を得ることができた。また有理解の方は、行列式表現は今回得ることはできなかったが、この解が超離散極限によっても意味のある解を構成し、超離散の方程式においては階段形の解になるであろうという予想をすることができた。

今後の課題としては、まず、有理解の行列表現を得ることであろう。これによって超離散極限による解の一般形を示せるであろう。この解が何か Painlevé 方程式にとって本質的な数理解造のみを抽出していることがあわせて期待される。また、今回得た特殊函数解の方は正值性の問題から、超離散化の議論はできなかった。果たして、この解に関しては本当に超離散化できないのか、今後の検討課題である。

最後に、連続方程式の Painlevé 性、離散方程式の SC、と示してきたが、超離散極限の Painlevé 性に当たるものは存在しないのか。これも今後の研究課題である。

参考文献

- [1] R.Hirota, J. Phys. Soc. Jpn. **43** (1977) 1424.
- [2] Y.Ohta, R.Hirota, S.Tsujimoto and T.Imai, J. Phys. Soc. Jpn. **62** (1993) 1872.
- [3] V.G.Papageorgiou, B.Grammaticos and A.Ramani, Phys. Lett. A **179** (1993) 111.
- [4] 中村佳正, 京大数理解析研究所講究録, **868** (1994) 223.
- [5] B.Grammaticos, A.Ramani and V.G.Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1825.
- [6] K.Maruno, K.Kajiwara, S.Nakao and M.Oikawa, Phys. Lett. A **229** (1997) 173.
- [7] A.Ramani, B.Grammaticos and J.Hietarinta, Phys. Rev. Lett. **67** (1991) 1829.
- [8] K.Kajiwara, Y.Ohta, J.Satsuma, B.Grammaticos and A.Ramani, J. Phys. A: Math. Gen **27** (1994) 915.
- [9] F.Nijhoff, J.Satsuma, K.Kajiwara, B.Grammaticos and A.Ramani, Inverse Problems **12** (1996) 697.
- [10] J.Matsukidaira, J.Satsuma, D.Takahashi, T.Tokihiro, M.Torii, Phys. Lett. A. **287** (1997) 225.
- [11] B.Grammaticos, Y.Ohta, A.Ramani, D.Takahashi, K.M.Tamizhmani, Phys. Lett. A **226** (1997) 53.
- [12] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta and A.Ramani, J. Phys. A: Math. Gen **30** (1997) 7953.