# 箱と球でもソリトン系！

髙橋大輔 〈龍谷大学理工学部　520-21 滋賀県大津市瀬田大江町横谷 1-5〉

## §1. はじめに

「ソリトン」を人に説明しなければならないハメに陥った時，Korteweg-de Vries (KdV) 方程式を最初の例に挙げて語り始める方が少なくないであろう.[1] かくいう筆者もその一人である．そして便利なことに，ソリトンが関わっている非線形偏微分方程式（ソリトン方程式）はゴマンとあるのだが，ほとんどのソリトン方程式は共通の数学的バックグラウンドを持っており，KdV 方程式ひとつを例に挙げておけば，結構事が足りてしまう．ところが，KdV 方程式の簡単な部分を理解してもらうにも，数学的な約束事がいくつか必要であり，説明に言葉を費やさざるを得ない．そこで本稿では，筆者が最近発見した，KdV 方程式よりずっと構成が単純で，かつ，ソリトン系としての資格を有する，ある系を紹介させていただくことにする．とはいうものの，ソリトンのことを何も御存知ない読者のために，ソリトン系らしい系というものを，やはり KdV 方程式を例に挙げて，簡単に説明しておくことにする．

まず，KdV 方程式；

$$\frac{\partial u}{\partial t}+12u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0 \tag{1}$$

は非線形方程式であるにもかかわらず，非常に広いクラスの特解を有する．その特解の一例を挙げると，次のようなものである．

$$u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\{1+\exp(2x-8t)+\exp(3x-27t)+\frac{1}{25}\exp(5x-35t)\}. \tag{2}$$

この $u$ を $x$(空間)-$t$(時間) 平面にプロットしたのが図 1 である．これは 2 ソリトン解と呼ばれる解であり，$t$ が $A$ もしくは $B$ あたりの範囲で空間に存在する二つの山のそれぞれがソリトンに相当する．山が二つあるので 2 ソリトンと呼ぶ．もっと簡単な，山が一つの 1 ソリトン解の一般形は，次のようになる．

$$u=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log\{1+\exp(kx-k^3t)\},\quad k: \text{任意の実数}. \tag{3}$$

これは実は (1) 式の単なる進行波（一定の速度で伝播していく波）解になっている．上の 2 ソリトン解では，$t\to\pm\infty$ で二つの山がその伝播速度の差のせいでお互い無限の距離だけ離れ，一つ一つの山が 1 ソリトンに収束する．さらに，$t\to-\infty$ での二つのソリトンと同じものが，$t\to+\infty$ で順序を逆にして現れる．また，途中の時刻の非線形相互作用の結果として，各山の軌跡がそれぞれ $t\to-\infty$ と $t\to+\infty$ でずれている．図 1 中の点線，実線は，山の頂点の軌跡をそれぞれ $t\to-\infty$, $t\to+\infty$ から延ばしてきたものである．実は，KdV 方程式は $N$ ソリトン解（$N$: 任意の自然数）を持っており，$t\to-\infty$ での $N$ 個のソリトンそれぞれが，相互作用にかかわらず個性を保ち，$t\to+\infty$ で軌跡をずらして再現するのである．

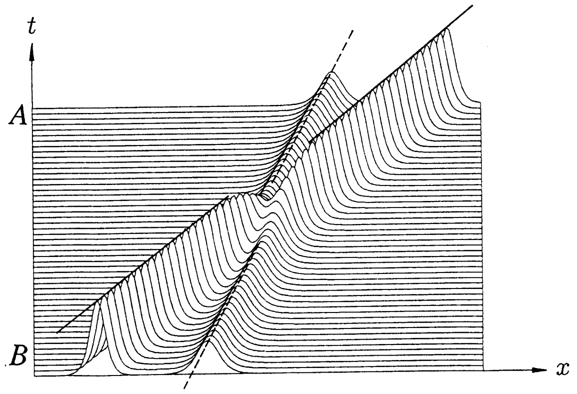


図 1　KdV 方程式の特解の例.

さらにもうひとつの特徴として，KdV 方程式は可算無限個の独立な保存量（時間によって変わらない量）を有している．例えば，保存量を次数の低いものから三つ挙げると，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}u\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}u^2\,dx,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{u^3-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\}dx \tag{4}$$

となる．(1) 式から，これらの量の時間微分が 0 であることが容易に示せる．（ただし，$x\to\pm\infty$ で $u$ が急激に減衰するという制限条件が必要．）さて，ここで「ソリトン系の資格」というものを，上に挙げた 2 点，すなわちソリトンの存在と可算無限個の保存量の存在であるとすると，従来知られているソリトン方程式の殆どはこの資格を有してい

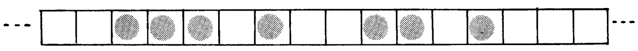

図2　状態の例，□が一つの箱を，●が一つの球を表す．

る．したがって，それがソリトン系とその他の非線形系とを区別する目安にもなっている．

さて，この辺でソリトン系の概説を切り上げ，次節では筆者が「箱と球の系」と呼んでいる，従属・独立変数共に離散的な系を紹介し，その系がソリトン系の資格を持っていることを，例を交えながら示すことにする．[2,3]

## §2.　箱と球の系

まず有限個の球と可算無限個の箱を用意する．球の個数は適当に定めるとし，各箱は球を1個だけ収納できるとする．次に全ての箱を横1列に並べ，適当な箱を0番とし，その箱の右側に存在する箱を，近いものから順に1，2，3，…，左側に存在する箱を$-1$，$-2$，$-3$,…と番号を付ける．そして，球を適当な箱に入れる．これである一つの「状態」が定義される．図2に状態の一例を示す．つまり，任意の状態は球の個数と箱への配置を定めれば決まる．さて，状態は後述の規則に従って時間発展し，別の状態に遷移していく．ただし，時刻は整数値をとるものとし，初期の球の配置を定めた時刻を$t=0$とする．任意の時刻$t$の状態から次の時刻$t+1$の状態への時間発展の規則は，次の通りとする：

(1) すべての球は時刻が$t$から$t+1$に変る際に必ず1回だけ移動する．

(2) 時刻$t$で左の方に位置する球から順に移動する．移動する先は自分が入っている箱より右側の，最も近くに存在する空箱である．

(3) すべての球が移動し終ったら，時刻を1だけ増やす．

図3に簡単な例を示す．この時間発展の規則は可逆であることが容易に示せる．任意の時刻からひとつ前の時刻への状態の時間発展則は，前述の時間発展則の時間の向きと空間の向きを逆向きにすれば得られる．

では，このようにして定義された系で，任意の初期状態に対する時間発展には，どのようなダイナミクスが介在するであろうか？　図4にそのようなダイナミクスを示している典型的な例を挙げる．なお，表示を簡単にするために，空箱を0，球の入っている箱を1と表示している．この図から，以下の（大雑把な）観察ができる．『(i) $t=0$で左の方から，隣合う球の個数が四つ，二つ，一つの球のグループが存在する．(ii) $t<0$で時間を逆にたどっていくと，それら球のグループは相互作用せずに，またグループの位置に関する順序関係も変らずに，互いに離れていく．(iii) $t=5$以降は (i) と逆に左の方から一つ，二つ，四つの球の

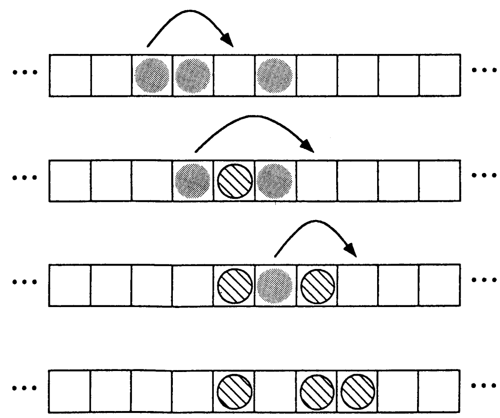


図3　状態が時刻$t$から時刻$t+1$へ時間発展する例，既に動いた球を◍で表す．

グループが存在し，時間が経つにつれてグループ同士が相互作用することなく互いに離れていく．(iv) $t=1\sim4$ではグループ間の相互作用が見られる．(v) $t\leq0$もしくは$t\geq5$で各グループは孤立しており，それぞれのグループに属する球の個数分だけ次の時刻で右へ移動する．そして図から明らかなように，$t\leq0$で各グループが移動により描く軌跡と$t\geq5$で描く軌跡がずれている．』ここではほんの一例を示しただけであるが，任意の初期状態からの時間発展に関して，いつでも以下のことを示すことができる．

(1) $t\gg0$ ($t\ll0$) で，必ずそれ以降（以前）で相互作用しない複数のグループに分離する．また，$t\gg0$と$t\ll0$での，そのようなグループの数は同じである．今，グループの数を$N$とする．

(2) $t\ll0$で分離した各グループに所属する球の個数を左から数え上げる．それを$n_1$, $n_2$, …, $n_N$とすると，$n_1\geq n_2\geq\cdots\geq n_N$を満たす．$t\gg0$では，左の方から個数が$n_N$, $n_{N-1}$,…, $n_1$のグループに分離している．

(3) $t\ll0$で左から$j$番目のグループの軌跡は，相互作用により$t\gg0$で右へ$2\{\sum_{n_i<n_j} n_i-\sum_{n_i>n_j} n_j\}$だけずれる．

上に挙げたこの系のダイナミクスは，§1で述べたKdV方程式に代表される連続変数のソリトン系のダイナミクスの離散化版であり，球のグループがソリトンの役割を果たしている．[4~7]

| | |
|---|---|
| $t=-2$ | …0001111000000000011000001000… |
| $-1$ | …000111100000000110000010000… |
| $0$ | …000111100000011000100000… |
| $1$ | …0001111000110010000000… |
| $2$ | …0001110011011000000… |
| $3$ | …000110010011110000… |
| $4$ | …0001101000001111000… |
| $5$ | …00010110000000001111000… |
| $6$ | …00010011000000000001111000… |

図4　状態の時間発展の例．空箱を0，球の入っている箱を1で表す．

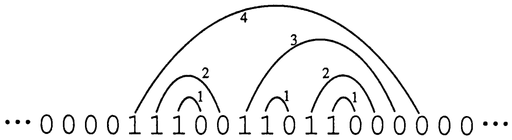


図5　図4の時刻2の状態における球と箱のペア．ペアの数字はペアの深さを表す．

| $t$ | |
|---|---|
| $t=0$ | …0002457000001300060 0… |
| 1 | …00002457000130060 00… |
| 2 | …0000245701306000 0… |
| 3 | …000024517360000… |
| 4 | …000020471356000 0… |
| 5 | …0002004700135600 00… |
| 6 | …0020000470000135600 0… |

図6　拡張系の時間発展の例．ただし，空箱を0，番号 $n$ の球が入っている箱を $n$ で表す．

さらに，この系にも可算無限個の保存量が存在する．保存量は，球一つと空箱一つのペアの個数という形で表現することができる．先に示した図4の時刻2の状態を用いて例を示すと，図5のようになる．ペアは1と0を結ぶ線で示してあり，その線に付いている数字をペアの「深さ」と呼ぶことにする．つまり，この図では，深さ1, 2, 3, 4のペアがそれぞれ3, 2, 1, 1個ずつ存在し，それより深いペアは存在しない．そして実は，任意の深さのペアの個数がそれぞれ保存量となる，つまり，任意の時刻の状態に対して常に変らない量となっている．そしてペアは，

(1) 球は，自分より右に位置する，ある空箱とペアになる．
(2) 深さ $n(n>1)$ のペアは，内側に深さ $n-1$ のペアを一つ以上囲み，かつ，深さ $n-1$ 以下のペアしか囲わない．深さ1のペアは内側に何も囲まない，

という規則に従って与えられた状態から，一意に作ることができる．実は，このペアを通じて，この系のダイナミクスがもっとよく見えてくる．例えば，ある時刻の状態から任意の時刻の状態がどうなるか（一般のソリトン系の初期値問題に相当する）等も容易に予測できるのであるが，紙数の都合上詳細は省略する．以上見てきたように，この箱と球の系は，§1で定義したソリトン系の資格を十分持っている．

次に，この系の拡張系について話を進める．この拡張系が前の系と大きく異なる点は，あらかじめ球に1から順に番号が付けられているという点である．そして，任意の状態は，そのような適当な個数の球を，前の系と同じ横1列の無限個の箱の中に適当に配置することによって作られる．そして，状態の時間発展則を以下のように定義する．

(1) 番号の小さい球から順に，自分のいる箱より右側の，最も近い空箱に移動する．
(2) すべての球が1度ずつ動いた時点で時刻を1増やす．

ある状態の時間発展の例を図6に示す．ただし空箱を0，番号 $n$ の球の入っている箱を $n$ で表す．この系と前の系との最も大きな違いは，ある番号の球が移動することによって空となった箱に，それより番号の大きい球が入り得るということである．$t\ll0$ および $t\gg0$ で球はやはりグループとなって分離する．そのとき隣り合っている球を球の番号を考慮せずに一つのグループとみなすと，各グループが前と同じ意味でソリトンになっている．例えば上の例では $t=1$ 以前で 2457, 13, 6 という 4, 2, 1 個のグループが分離して存在していたのが，$t=2\sim4$ で相互作用し，$t=5$ 以降では 2, 47, 1356 という 1, 2, 4 個の球のグループとなって再び分離している．$t\ll0$ および $t\gg0$ でのグループは，所属する球の個数に関して1対1に対応している．また詳細は省略するが，この系のダイナミクスでも，前の系と同様，球と箱（空箱とは限らない）とのペアが重要な役割を果たす．なお，初期状態に対して，球の番号が左から単調増加であるという制限条件を課すと，任意の時刻で常に球の番号は左から単調増加であることが示される．したがって，この拡張系は前の系を含んでいることがわかる．さらに，今のこの拡張系の箱の容量を球 $M(>1)$ 個分とした，さらに自由度の大きい拡張系もやはりソリトン系になっていることが，計算機実験により広い範囲の初期状態に対して確かめられている．

## §3.　おわりに

ここまで駆け足で箱と球の系の構成とダイナミクスを述べてきた．系の構成はいたって単純であり，ダイナミクスも紙と鉛筆でいくつかの場合について実験すれば，直観的に理解できる（であろうと思う）．しかしながら，§1でも述べたように，従来の殆どのソリトン方程式は共通の数学的バックグラウンドを持っている．この箱と球の系に対する現在の最大の課題は，そことの関連が一体どうなっているかを明らかにすることである．今のところは，離散変数の極限操作による連続化というつながりではなく，連続系とこの系との代数構造に共通のものがあるらしいということがわかっているだけである．さらに，今の系は空間1次元，時間1次元の系であるが，例えば空間2次元，時間1次元の同様の系がまだ見つかっていない．そして，これらの問題点の解決の他に筆者が是非実現したいと願っているのは，この系をモデルとしている自然現象の発掘，もしくは，工学への応用である．この系は机上で偶然生まれたものであり，それに対応する現象という背景を持っていない．しかしながら，これだけ単純な構成を有する系は，必ず何かの現象と結び付いているのではなかろうか．いつか，そのような現象が実際に見出されることを期待している．

## 参考文献


1) M. J. Ablowitz and H. Segur: ソリトンと逆散乱変換 (日本評論社, 1991).
2) D. Takahashi and J. Satsuma: J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514.
3) 高橋大輔, 薩摩順吉: 日本応用数理学会論文誌 **1** (1991) 41.
4) S. Wolfram, ed.: *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986).
5) K. Park, K. Steiglitz and W. P. Thurston: Physica **19D** (1986) 423.
6) A. S. Fokas, E. P. Papadopoulou and Y. G. Saridakis: Physica **41D** (1990) 297.
7) Y. Aizawa, I. Nishikawa and K. Kaneko: Physica **45D** (1990) 307.