

単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて

高橋 大輔 薩摩 順吉*

龍谷大学理工学部数理情報学科 *東京大学工学部物理工学科

On Cellular Automata as a Simple Soliton System

Daisuke Takahashi Junkichi Satsuma*

Ryukoku University

*Tokyo University

Abstract. A new type of cellular automaton (CA) is discussed. This CA is 1+1 dimensional and 2-valued, and any state produces only solitary waves. When the solitary waves interact one another, they preserve their identities and the only effect left after the interaction is a shift of their orbit. Any initial state can be decomposed into the solitary waves. Moreover, an infinite number of conserved quantities exist. Therefore, the CA may be considered to be a simple soliton system. A class of multi-valued CA's are also proposed. They are an extension of the above 2-valued CA and have many properties of soliton systems.

1. はじめに

セル・オートマトン (cellular automaton, CA) は離散系における発展方程式の一種であり, その単純な例の 1 つとして,

$$u_j^{t+1} = f(u_{j-1}^t, u_j^t, u_{j+1}^t)$$

が挙げられる. ここで, j はサイトと呼ばれる離散空間変数, t は離散時刻であり, サイト値 u は, 有限個の離散値の組のどれか 1 つをとるとする. 方程式はこの例のように単純であるにもかかわらず, 物理, 化学, 生物等に見られるさまざまな現象に対して, 本質をついたモデルとなり得ることが, 多くの研究者によって示されてきた [8]. また, ある条件を満たす一群の CA をクラス分けして, 各クラスの CA に共通の挙動を力学系と結び付ける試みなど [2,4], 非常に幅の広い分野からのさまざまなアプローチが行われている.

一方ソリトン (soliton) 理論は, 浅水波の運動を記述する微分方程式に端を発して, ある特殊なクラスの非線形発展方程式を取り扱う理論である [1]. このクラスに属する方程式の主な特徴としては, (1) ソリトンと呼ばれる基本波動 (後述) が存在すること, (2) 無限個の保存量が存在すること, (3) 初期値問題が逆散乱法と呼ばれる手法を用いて原理的に解けること, 等が挙げられる. 代表的なソリトン方程式に, Korteweg-de Vries (KdV) 方程式,

$$4 \frac{\partial u}{\partial t} + 12u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

がある。ここで、 x, t はそれぞれ空間、時間の連続な独立変数である。この方程式の孤立波解を 2 つ（非線形の意味で）重ね合わせた厳密解：

$$u(x, t) = \frac{d}{dx^2} \log(1 + \exp(2\eta_1) + \exp(2\eta_2) + A_{12} \exp(2(\eta_1 + \eta_2)))$$

の時間発展の様子を、Fig. 1 に示す。ただし、 $\eta_1 = k_1x - k_1^3t$, $\eta_2 = k_2(x - x_0) - k_2^3t$, $A_{12} = (k_1 - k_2)^2 / (k_1 + k_2)^2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 1.5$, $x_0 = 1$ とする。

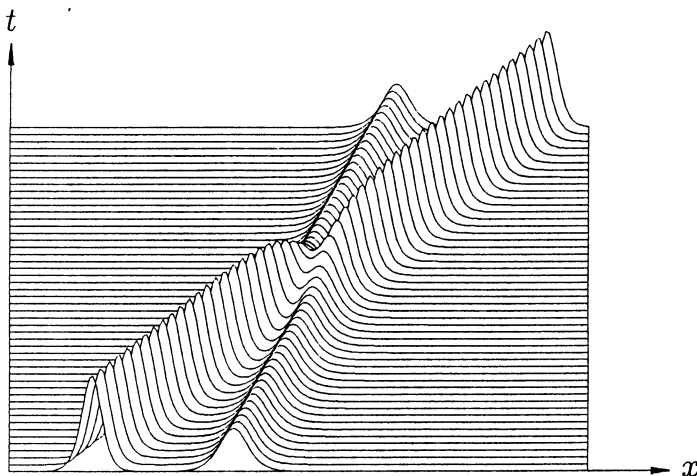


Fig. 1 : 2-soliton solution of KdV equation.

この図では、初期に振幅の大きな孤立波が振幅の小さな孤立波の左に存在している。(それぞれの孤立波は、もし単独に存在するなら、進行波として一定の速さで右方向に伝播していく。) KdV 方程式では振幅の大きい孤立波の方が右方向に速く伝播するので、時間が経過するとやがて大きい方が小さい方に追いついて相互作用する。その後、再び相互作用前と同じ 2 つの孤立波に分離し、大きな方が小さな方を抜き去る。相互作用の効果として、両孤立波の軌道がずれる。 n 個の孤立波が初期に同時に存在して相互作用する場合も、この 2 つの孤立波の相互作用が基本となっており、各孤立波は「伝播 → 相互作用 → 分離・再現 → 伝播」を繰り返し、最終的にはお互いが離れていきながら伝播する。これらの孤立波はソリトンと呼ばれている。

上述の CA 理論とソリトン理論を結び付ける試みとして、1986 年に Park, Steiglitz と Thurston 達が提出した、フィルター・オートマトン (filter automaton) と呼ばれるある特別なタイプの CA がある [6]。その CA では、さまざまな初期状態に対して時間発展を

追っていくと、ソリトン方程式の孤立波の相互作用のアナロジーと考えられる離散波動現象が一般に観察された。この CA に対する研究が最近も精力的に行われており、ソリトン理論の立場から注目すべきさまざまな代数的性質が調べられている。[3]

最近、筆者は新しいタイプの CA を提出した [7]。その CA は、単純な時間発展規則で定義される可逆な 2 値の CA であり、後の節で詳述される孤立波をその基本波動として有する。これら孤立波を重ね合わせた初期状態の時間発展を追うと、孤立波同士の非線形な相互作用が観察され、ソリトン方程式で観察されるのと同様に、各孤立波が相互作用の前後で自己を保存する。さらに、その CA の大きな特徴として、任意の初期状態が孤立波だけで構成されており、初期状態の時間発展が、孤立波の相互作用を考えるだけでよく、非常に容易に把握できることが挙げられる。また、CA は無限個の保存量を持っている。以上のように、その CA は、連続系のソリトン方程式の性質のかなりのものを有していると考えられ、筆者はソリトン・セル・オートマトン (soliton cellular automaton, SCA) と名付けた。

本論文ではまず 2 節で、2 値の SCA についてその時間発展規則の定義を与え、観察される波動現象について説明する。次に、3 節で、その 2 値 SCA の性質を、孤立波の相互作用、初期値問題、保存量等の側面から詳しく議論する。さらに、4 節で、2 値の SCA の拡張となっており、やはりソリトンの性質を有する多値の SCA を提出し、その性質について述べる。最後に 5 節では、それまでの節で議論された事柄を結論としてまとめ、今後の課題を考える。

2. 2 値 SCA

まず、Fig. 2 のように無限個の「箱」が 1 列に並んでいる状況を考える。各箱を区別するために、箱に整数番号を付けておく。

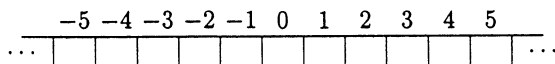


Fig. 2 : Array of boxes.

次に、これらの箱のうちから有限個を選んで「球」を入れる。ただし、どの箱も 1 つの球を入れるスペースしか無いとする。いま仮に Fig. 3 のように、箱 $-4, -3, -2, 1$ に球を入れたとする。

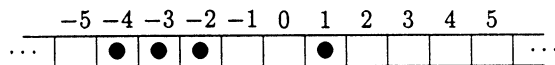


Fig. 3 : Some boxes occupied by balls.

この状態を仮に時刻 0 での状態とする。時刻は整数値をとるとし、球は時間とともに移動

していくとする．任意の時刻 t から次の時刻 $t+1$ へ時間が進む際の球の移動の規則を以下のように定義する．

1. 各球は必ず 1 回だけ移動する．
2. 左の方の球から順に，自分のいる箱より右にある最も近くの空いている箱に移動する．

この規則に従うと，Fig. 3 の球の配置は次の時刻 $t=1$ で，Fig. 4 のようになる．

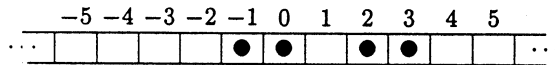


Fig. 4 : Subsequent state of Fig. 3.

つまり，箱 $-4, -3, -2, 1$ の球がそれぞれ箱 $-1, 0, 2, 3$ に移動したわけである．上で定義した球の移動規則は可逆であり，任意の時刻 t から前の時刻 $t-1$ へ時間が戻る際の球の移動の規則は，

1. 各球は必ず一回だけ移動する．
2. 右の方の球から順に，自分のいる箱より左にある最も近くの空いている箱に移動する．

となる．この規則に従うと， $t=1$ での Fig. 4 の球の配置が $t=0$ では Fig. 3 の球の配置になることは容易に確認できる．以下このまま箱と球を用いて議論を進めることも可能であるが，議論が煩雑になるのを避けるため，今までの話を抽象化して CA の系に翻訳して議論を進めることにする．

まず，サイトの番号が $-\infty$ から $+\infty$ までの値をとる 1 次元の CA を考える．各サイトの値は 0 もしくは 1 のどちらかであるとする．この 2 値 CA のサイト番号を上で述べた箱の番号と対応させ，サイト値は箱の中の球の数であるとする．すると，例えば Fig. 3 および Fig. 4 の状態は，Fig. 5 の CA に翻訳される．

$$\begin{array}{rcccccccccccc}
 t=0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots
 \end{array}$$

Fig. 5 : States of CA corresponding to those of Figs. 3 and 4.

また，球の移動の規則を CA の時間発展の規則に翻訳すると，

$$u_j^{t+1} = \begin{cases} 1 & u_j^t = 0 \text{ かつ } \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^t > \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^{t+1} \text{ の場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1)$$

となる。ただし、サイト j 、時刻 t でのサイト値を u_j^t と表す。球の数は有限個であるという制限より、 $u_j^t|_{j \rightarrow \pm\infty} = 0$ となる。(1) 式では、一見 u_j^{t+1} の値が $\{u_i^t\}$ ($i = j, j-1, j-2, \dots$) と $\{u_i^{t+1}\}$ ($i = j-1, j-2, \dots$) とに依存しているかのように見える。しかしながら、(1) 式は、

$$u_j^{t+1} = \begin{cases} u_j^t & n = j-1, j-2, \dots \text{のいずれに対しても} \\ \sum_{i=n}^{j-1} u_i^t - \bar{u}_j^t \text{ が } 0 \text{ もしくは } u_j^t - \bar{u}_j^t \text{ と同符号の場合} \\ \bar{u}_j^t & \text{それ以外} \end{cases}$$

とも書き換えることができる [5]。ここで、 $u = 0$ のとき $\bar{u} = 1$ 、 $u = 1$ のとき $\bar{u} = 0$ とする。このことより、 u_j^t は $\{u_i^t\}$ ($i = j, j-1, j-2, \dots$) にのみ依存するといってもよいことがわかる。さらに、 $S_j^t = \sum_{i=-\infty}^j u_i^t$ と S_j^t を定義すると、 $u_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t$ となり、(1) 式は、

$$S_j^{t+1} - S_{j-1}^{t+1} = \frac{1}{2\delta} (1 - S_j^t + S_{j-1}^t) (S_{j-1}^t - S_{j-1}^{t+1} + \delta - |S_{j-1}^t - S_{j-1}^{t+1} - \delta|) \quad (2)$$

とも書き換えられる。ここで、 δ は $0 < \delta \leq 1$ を満たす定数である。(2) 式は整数の従属変数 S_j^t に関する非線形差分方程式になっている。(ただし、 $u_j^t = S_j^t - S_{j-1}^t = 0$ もしくは 1 から、初期値に制限が加わり、 u_j^t ($j \rightarrow \pm\infty$) = 0 より、 $S_j^t = 0$ ($j \rightarrow -\infty$) および $S_j^t =$ 時間によらない定数 ($j \rightarrow +\infty$) という境界条件が課される。) さらに、(1) 式を時間を遡る形の発展方程式に書き換えると、

$$u_j^{t-1} = \begin{cases} 1 & u_j^t = 0 \text{ かつ } \sum_{i=j+1}^{\infty} u_i^t > \sum_{i=j+1}^{\infty} u_i^{t-1} \text{ の場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

となる。

さて、ここで Fig. 5 の $t = 0$ の状態を初期状態として、時刻 $t = -4 \sim +6$ の範囲での状態を並べた図を Fig. 6 に示す。

t	
-4	... 000000111000000000010000000000000000000000000000 ...
-3	... 00000000111000000001000000000000000000000000000 ...
-2	... 00000000000011100000010000000000000000000000000 ...
-1	... 00000000000000111000010000000000000000000000000 ...
0	... 00000000000000001110010000000000000000000000000 ...
1	... 00000000000000000001101100000000000000000000000 ...
2	... 00000000000000000000010011100000000000000000000 ...
3	... 00000000000000000000000100001110000000000000000 ...
4	... 00000000000000000000000001000000111000000000000 ...
5	... 00000000000000000000000000100000000111000000000 ...
6	... 0000000000000000000000000001000000000111000000 ...

Fig. 6 : Time evolution for the same data as Fig. 4.

この図では、 $t = -4 \sim 0$ の範囲で3つの1の並び「111」が1つの1の並び「1」の左方にあり、「111」と「1」はそれぞれ時刻が1増えるごとに右へ3サイト、1サイトずつ移動していくことがわかる。「111」は「1」より移動速度が大きいので、 $t = 1$ で「111」が「1」に追いついて両者が相互作用する。さらに、 $t = 2 \sim 6$ の範囲では、「111」が「1」を追い越して分離し、両者の速度差のために時間とともに離れていく。軌道を見てみると、相互作用することによって「111」が右方に、「1」が左方にずれることが図より明らかにわかる。もちろん「111」もしくは「1」が単独に存在し、それ以外のサイトでの値がすべて0であるような場合は、それら1の並びが直線の軌道上を伝播することは明らかである。つまり、「111」と「1」は何らかの非線形相互作用を $t = 1$ 付近で行ったことになる。もっと複雑な初期値を与えた場合の時間発展の例を Fig. 7 に示す。

t	
0	00011110000000000000011000110000001000000000000000000000000000
1	00000001111000000000001100011000001000000000000000000000000000
2	00000000000111100000000011000110000100000000000000000000000000
3	00000000000000000001111000000011000110001000000000000000000000
4	00000000000000000000011110000011000110010000000000000000000000
5	00000000000000000000000111100011000110100000000000000000000000
6	00000000000000000000000000111001110010110000000000000000000000
7	00011000110100111100000000000000
8	000110001011000011110000000000
9	000110010011000000111100000000
10	0001101000110000000011110000
11	00010110001100000000001111
12	00010011000110000000000000
13	000100011000110000000000
14	000100001100011000000000

Fig. 7 : Example of time evolution.

この図では、「1111」と2つの「11」と「1」が、十分離れているときはそれぞれ一定速度で右方に伝播し、お互いが近付いてくると非線形な相互作用を行った後に分離・再現し、再び一定速度で伝播していく様子が示されている。また、Fig. 6 と同様に、相互作用によりそれぞれの軌道がずれていることもわかる。他のいろいろな初期状態に対して時間発展を追ってみても、このような「伝播 → 相互作用 → 分離・再現 → 伝播」の現象が同様に得られる。これは前節で説明したソリトン方程式の孤立波の相互作用に見られる現象ときわめて類似したものである。

$t = 0$ までは長さ l_1 の孤立波が長さ l_2 の孤立波に左方から近付いてき、 $t = 2$ 以降では長さ l_1 の孤立波が長さ l_2 の孤立波を追い抜き去って離れていく。相互作用することによって生じる各孤立波の「軌道のずれ」を、軌道が相互作用前から後でサイト値にしてどれだけシフトしたかで定義すると、 l_1 の方は $+2l_2$ であり、 l_2 の方は $-2l_2$ となることが Fig. 8 よりわかる。

以上、2つの孤立波が(追い抜き)相互作用をするときは、相互作用後必ず相互作用前と同じ孤立波が再現されて分離すること、および、各孤立波は相互作用により軌道のずれを生じることが結論された。それでは、3つ以上の孤立波の相互作用や、任意の初期状態からの時間発展はどうなるであろうか。実は、結論を先に述べると、任意の時刻の任意の状態に対して、どういう長さの孤立波がどういう状態で存在しているかを計算する手続きが存在し、その手続きによると各孤立波は他の孤立波と相互作用しても必ず自己を保存しながら伝播することがわかる。以下でその手続きについて述べる。まず、ある時刻の適当な状態を与えられているとする。ただし、少なくとも1つ以上のサイトの値が1であるとする。この状態に対し以下の手続きを行う。

- (i) サイトが連続している0もしくは1の列を考え、左の方の列から順に番号 $1, 2 \dots N$ を付ける。少なくとも1つ以上のサイトの値が1なので、 $N \geq 3$ である。そして、番号 i の列に含まれるサイトの個数を k_i とする。ただし、左端と右端の0の列に含まれるサイトの個数は無限個なので、 $k_1 = k_N = \infty$ となる。
- (ii) k_i と k_{i+1} を $i = 1, 2 \dots$ の順に比較していき、もし $k_i \leq k_{i+1}$ ならば、 $m = i$ とおき、ただちにステップ (iii) に進む。($k_N = \infty$ なので、必ずステップ (iii) に進むことができる。)
- (iii) 番号 m の列に含まれるすべてのサイトの値に、添字 k_m を付ける。さらに、番号 $m+1$ の列に含まれるサイトのうち左の方から k_m 個を選び、それらサイトの値に同じく添字 k_m を付ける。
- (iv) もし、状態に含まれるすべてのサイト値1に添字が付けられたならば、すべての手続きを終える。そうでなければ、値に添字が付いていないサイトだけを対象にして、ステップ (i) に戻る。このとき、既に値に添字が付けられたサイトの存在は無視し、値に添字が付いていないサイトだけが左の方から連続していると考える。

この手続きを具体的なある状態に対して行った例を Fig. 9 に模式的に示す。

state	...	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	...														
step (i)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	4	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	1	8	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	...	
step (ii), (iii)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	4	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	1	8	0	9	0	9	0	9	0	9	0	9	...	
step (iv), (i)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (ii), (iii)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (iv), (i)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (ii), (iii)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (iv), (i)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (ii), (iii)	...	0	1	0	1	1	2	2	2	0	2	2	2	1	2	2	2	0	3	0	3	1	4	0	5	0	5	0	5	1	6	0	7	0	7	0	7	0	7	0	7	...
step (iv), end	...	0	0	0	0	1	4	1	4	1	4	0	2	1	2	1	2	1	4	0	4	0	4	1	1	0	4	0	1	0	1	2	1	2	0	2	0	2	0	0	0	...

Fig. 9 : Procedure to calculate the solitary waves from a state.

ここで下付き添字はステップ (i) で定義されるサイトの列の番号を, 上付き添字はステップ (iii) で定義されるサイト値の添字を表す. また, ステップ (iii) で定義される, 添字 k_m の付いたサイト値 0 および 1 を, それぞれ, 添字 k_m であり, 値 1 および 0 である「ビット」と定義する. さらに, 1 回のステップ (iii) で定義されるビットの集合を添字 k_m の基本列 (Basic String) と呼ぶことにする. Fig. 9 の状態には添字 1, 4 の基本列がそれぞれ 1 個ずつと, 添字 2 の基本列が 2 個存在している.

単独の孤立波と基本列との関係が Fig. 10 に示されており, 添字 n の基本列に含まれる値 1 のビットの集合が長さ n の孤立波となっている.

$$\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \overbrace{1^n \ 1^n \ \dots \ 1^n}^{n\text{個}} \ \overbrace{0^n \ 0^n \ \dots \ 0^n}^{n\text{個}} \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

Fig. 10 : A single solitary wave and a basic string.

また, 基本列中の各ビットはその添字の値に等しい速さで右へ伝播していく. Fig. 11 に, 長さ 3 の孤立波の伝播と基本列の伝播との関係を示す.

$$\begin{array}{r} t = 0 \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1^3 \ 1^3 \ 1^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ 1 \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1^3 \ 1^3 \ 1^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ 2 \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1^3 \ 1^3 \ 1^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\ 3 \quad \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1^3 \ 1^3 \ 1^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0^3 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \end{array}$$

Fig. 11 : Evolution of a basic string

それでは, 2 つの異なる長さの孤立波が相互作用する場合はどうか. 長さ 3 の孤立波が長さ 1 の孤立波を追い抜く場合について, 各時刻で基本列を計算した例を Fig. 12 に示す.

```

t = 0 ...0 0 13130303030 0 0 0 0 11010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  1 ...0 0 0 0 0 0 13130303030 0 0 11010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  2 ...0 0 0 0 0 0 0 0 13130303030 11010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  3 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 131303031101030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  4 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 131301110303030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  5 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 13130303030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  6 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 0 0 13130303030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  7 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 0 0 0 0 13130303030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  8 ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 0 0 0 0 0 13130303030 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...

```

Fig. 12 : Interaction of two basic strings.

時刻が2以前では、添字3および1の基本列が長さ3および1の孤立波をそれぞれ含み、両基本列はあたかも単独で存在しているかのように伝播していく。時刻3では孤立波同士はまだ分離しているかのように見えるが、基本列同士は相互作用しており、添字3の基本列に含まれる右端の値0のビットが添字1の基本列全体を「飛び越して」いる。さらに、時刻4では添字1の基本列は前の時刻と同じ場所にとどまり、その各ビットは前の状態の「ビット反転(値0が1に、1が0に)」の状態をとる。このとき添字3の基本列のビットのうち、値0のビットすべてと値1のビットうちの1つが添字1の基本列を飛び越している。そして、時刻5では添字1の基本列はまだ前の時刻と同じ場所にとどまり、その各ビットはもう一度ビット反転を行って時刻3の状態に戻る。このとき添字3の基本列は完全に添字1の基本列を飛び越し終え、基本列同士は添字がない値0のサイトを間に1つはさんで完全に分離する。そして時刻6以降では両基本列(ひいては両孤立波)は完全に分離したまま、それぞれが単独で存在しているかのように伝播していく。この図の例で典型的に示されるように、長さの異なる2つの孤立波が相互作用する場合一般について、以下のことが示せる。

1. 任意の時刻で2つの添字の異なる基本列が必ず存在し、それら基本列の添字は任意の時刻で変わらない。つまり、各基本列は自己を保存する。
2. 添字の大きい基本列が添字の小さい基本列を「飛び越して」追い抜き、追い抜く際に添字の小さい基本列はその場に2回とどまってビット反転を2回行う。このことより、相互作用による両基本列の軌道のずれは、添字の小さい基本列の添字を n とすると、添字の小さい基本列の方は $-2n$ となり、添字の大きい基本列の方は $+2n$ となる。

次に、もっと一般の任意の初期状態の時間正負の方向への時間発展について考える。このとき任意の時刻の状態に対して、先に説明した基本列を算出する手続きを適用すると、以下のことがわかる。

1. 任意の同じ添字の基本列の個数 (0 個も含む) は時間によらず一定である . つまり , 各基本列は自己を保存する .
2. ある時刻において , 添字 n の基本列の右側に , n より値の小さい添字の基本列がいくつかが存在するとき , 十分時間がたつと添字 n の基本列が小さい添字の基本列すべてを追い抜く .
3. ある時刻の状態から出発して十分時間が経過すると , それ以降ですべての基本列が分離し , 添字が大きい基本列ほど右側に存在するような時刻 t_1 が存在する . 逆に十分時間を遡っていくと , それ以前ですべての基本列が分離し , 添字が大きい基本列ほど左側に存在するような時刻 t_2 が存在する .
4. 状態に含まれる基本列の数を N とし , それら基本列に適当に番号を 1 から順につけ , j 番目の基本列の添字を n_j とする . すると , j 番目の基本列の $t \leq t_1$ での軌道と $t \geq t_2$ での軌道のずれ s_j は ,

$$s_j = 2 \left(\sum_{n_i < n_j} n_i - \sum_{n_i > n_j} n_j \right)$$

となる .

Fig. 13 に , ある初期状態からの時間発展に対し , 各時刻で基本列を計算した例を示す .

```

t = 0  ...0 1313130303030 0 121202020 11010 11010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  1  ...0 0 0 0 0 1313130303030 1212020211010 11010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  2  ...0 0 0 0 0 0 0 0 13131303030312120211020211010 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 ...
  3  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 13131302021101121201110303030 0 0 0 0 0 0 0 ...
  4  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 12120111020211011313130303030 0 0 0 ...
  5  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11011212011102020 1313130303030 ...
  6  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 1101121202020 0 13131303...
  7  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 11010 121202020 0 0 13...
  8  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 11010 0 121202020 0 ...
  9  ...0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 11010 11010 0 0 12120202...
    
```

Fig. 13 : Example of time evolution of basic strings.

この図には複数個の基本列の追い抜き相互作用の典型的な仕組みが示されている . まず , $t = 0$ では添字 3, 2 の基本列が 1 つずつと添字 1 の基本列が 2 つ , お互い分離して左から順に存在している . $t = 1$ で , 添字 2 の基本列が左の添字 1 の基本列を追い抜き始める . そして $t = 2$ で添字 2 の基本列の一部のビットが左の添字 1 の基本列を飛び越し , 左の添字 1 の基本列はその場でビット反転を行う . 同時に添字 2 の基本列は右の添字 1 の基本列

をも追い抜き始める．ところが，そこに添字 3 の基本列が追いつき，そして，添字 2 の基本列と 2 つの添字 1 の基本列を一度に追い抜こうとし始める． $t=3$ では，添字 3 の基本列の一部のビットが添字 2, 1 の基本列すべてを飛び越し，添字 2, 1 の基本列は単に前の時刻のビット反転を行うだけである． $t=4$ では，添字 3 の基本列が添字 2, 1 の基本列を完全に追い抜き，添字 2, 1 の基本列はもう一度前の時刻のビット反転を行って， $t=2$ の状態に戻る． $t=5$ では添字 2 の基本列が $t=2$ のときに行っていた左の添字 1 の基本列の追い抜きを完了させ，さらに一部のビットが右の添字 1 の基本列を飛び越し始める．添字 3 の基本列はさらに右の方に分離していく．そして $t=6$ では，添字 2 の基本列が右の方の添字 1 の追い抜きも完了し，添字 1, 2, 3 の基本列はすべて分離する． $t=8$ 以降では各基本列が，それぞれ単独で存在している場合の速度で右に伝播していき，お互いますます離れていく．以上のように，この 2 値 SCA では，小さな基本列同士が相互作用している最中に，より大きな基本列が追いつくと，小さな基本列はその相互作用を「中断」して，より大きな基本列が追い抜きを完了するまでその場で 2 回ビット反転を行う．そして，追い抜きが完了したら小さな基本列は再び中断していた相互作用を開始するという構図が成立する．このことが，各基本列が自己を保存する理由となっている．

以上見てきたように，この 2 値 SCA の基本列は，連続系のソリトン方程式の基本波動であるソリトンと同様の役割を果たす．さらに，ある時刻のある状態から基本列を算出し，どの位置にどの基本列がどういう状態で存在するかがわかれば，それ以降（もしくは以前）の状態をその情報をもとに計算することも容易である．ソリトン方程式では，任意の初期値に対するその後の時間発展を計算する方法が逆散乱法として与えられており，その方法を用いれば初期値問題は線形の微分方程式を解くことに帰着するので原理的に解くことが可能である．しかしながら，ソリトン方程式の一般的な初期値にはソリトンの他に「小波」と呼ばれる部分が含まれており，このような初期値に対して時間発展を計算するのはそう簡単ではない．一方，この 2 値 SCA では任意の初期状態が，ソリトンの役割を果たす基本列しか含んでおらず，そのことが一般の初期値問題を解くことを可能にしている．

次に，この 2 値 SCA のもう 1 つの特徴である保存量について考える．ただし，各時刻の状態から計算でき，しかも，時間によらず一定の量を保存量であると定義する．さらに，記法 # を

$$\#i_1 i_2 \cdots i_n = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (u_j \oplus i_1)(u_{j+1} \oplus i_2) \cdots (u_{j+n-1} \oplus i_n)$$

と定義する．ただし， j はサイト番号， u_j はサイト j での値， n は自然数， $i_j = 0$ もしくは 1 ， \oplus は $1 \oplus 1 = 0 \oplus 0 = 1$ ， $1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 0$ なる 2 項演算子とする．つまり， $\#i_1 i_2 \cdots i_n$ は状態 u に含まれる $i_1 i_2 \cdots i_n$ のパターンの個数を与える．さて，まず前節の球と箱を使った CA の定義から，各状態で値が 1 であるサイトの個数が保存することは容易にわかる．つまり， $\#1$ は保存量である．さらに，連続した 1 の列の個数が保存する．つまり， $\#10 = \#01$ は保存する．ちなみに $\#1$ と $\#10$ が保存することより， $\#11$ も保存す

る。それ以外に、

$$\begin{aligned} c_1^n &= \#11(01)^n + \#00(10)^n, \\ c_2^n &= \#11(01)1((01)00(10)11)^n + \#00(10)0((10)11(01)00)^n, \\ c_3^n &= \#11(01)1(0(01)1)1((0(01)1)00(10)0(1(10)0)11(01)1)^n \\ &\quad + \#00(10)0(1(10)0)0((1(10)0)11(01)1(0(01)1)00(10)0)^n, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

で定義される無限個の保存量の系列 $\{c_i^n\}$ が存在する。ここで、 n は任意の自然数であり、 $(pattern)$ は $pattern$ の 0 回以上の繰り返しを、 $(pattern)^n$ は $pattern$ のちょうど n 回の繰り返しを意味する。例えば、

$$\dots 0 \ 0 \ 0 \ 1^3 1^3 1^3 0^2 0^2 1^2 1^2 0^2 0^2 1^1 0^1 1^1 0^1 1^2 1^2 0^3 0^3 1^2 1^2 0^2 0^2 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

なる状態に対しては、 $\#1 = 11$, $\#10 = 6$, $c_1^1 = 1$, $c_1^2 = 1$, $c_2^1 = 2$, $c_2^2 = 1$, $c_3^1 = 1$, それ以外の $c_j^n = 0$ となる。この保存量の意味を以下に説明する。いま、ある時刻である状態が与えられているとする。この状態には、いくつかの基本列が含まれているが、時間が十分経過すると添字の異なる基本列はお互い十分に分離する。その分離した状態の一部には、以下のように、添字 $j (> 0)$ の基本列が $m (> 0)$ 個くっついたものも存在し得る。

$$\dots 0 \ 0 \ 0 \ \overbrace{1^j 1^j \dots 1^j 0^j 0^j \dots 0^j}^{1\text{個目}} \ \overbrace{1^j 1^j \dots 1^j 0^j 0^j \dots 0^j}^{2\text{個目}} \ \dots \ \overbrace{1^j 1^j \dots 1^j 0^j 0^j \dots 0^j}^{m\text{個目}} 0 \ 0 \ 0 \ \dots$$

さらに、このようなくっついた基本列の群が複数個存在する場合もある。保存量 c_j^n は、このような添字 j の基本列の群に含まれ、左から n 番目に位置するような基本列を、任意の時刻の状態から数え上げる役割を果たす。この個数が保存することは、各基本列が自己を保存することと、添字の大きい基本列が添字の小さい基本列に対し、上で示したような「飛び越し」相互作用を行うことから導かれる。さらに、 $\sum_{n=1}^{\infty} c_j^n$ は状態に含まれる添字 j の基本列の総数に等しいことも注意しておく。このようにして、連続系のソリトン方程式と同様に、この 2 値 SCA にも無限個の保存量が存在することがわかる。

4. 多値 SCA

この節では、前節まで述べてきた 2 値 SCA の拡張となっている多値の SCA について説明する。まず、この CA の定義を述べるが、サイト値は $N + 1$ 値 (N は自然数) であるとし、2 節のように箱と球を用いた定義から始める。2 節と同様、整数番号の付いた無限個の箱が 1 列に並んでいる状況を考える。各箱は N 個まで球を収容するスペースがあるとす。そして、ある時刻で有限個の球がいくつかの箱に入っているとす。もちろん箱の収容スペース一杯まで複数個の球が重複して同じ箱に入っていても構わない。球は時

間とともに移動していくとし、任意の時刻 t から次の時刻 $t+1$ へ時間が進む際の球の移動の規則を以下のように定義する。

1. 各球は必ず 1 回だけ移動する。
2. 左の方の球から順に、自分のいる箱より右にある最も近くの収容スペースの空いている箱に移動する。ただし、同じ箱に入っている球の移動順序は問わないとする。

例として、 $N = 3$ の場合に $t = 0$ である初期状態を与えたときの $t = 0$ と 1 の状態を Fig. 14 に示す。

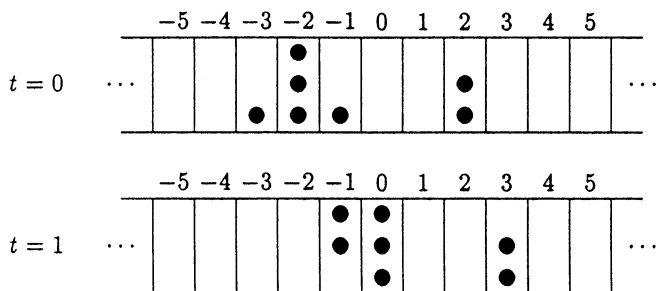


Fig. 14 : Moving balls and the array of boxes which can hold 3 balls.

もちろん、この球の移動規則も可逆であり、任意の時刻 t から前の時刻 $t-1$ へ時間が戻る際の球の移動の規則は、上の時間正方向の移動規則中に現れる「右」を「左」に、「左」を「右」に変えればよい。さらに、もし、箱の収容スペースが球 1 個分しかなければ ($N = 1$)、この箱と球の系は 2 節の箱と球の系に帰着する。

次に、この箱と球の系を CA の言葉に翻訳する。箱の番号をサイト番号に対応させ、各箱の中の球の数をサイト値とすると、上の系は容易に $N+1$ 値 CA に変換できる。例えば上の例 ($N = 3$) の場合は、

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 t = 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \dots
 \end{array}$$

と変換される。 $N+1$ 値 CA の時間発展の規則は例えば、

$$u_j^{t+1} = \begin{cases} \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^t - u_i^{t+1} & u_j^t + \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^t - u_i^{t+1} < N \text{ の場合} \\ N - u_j^t & \text{それ以外} \end{cases}$$

という風に表現できる。

次に、任意のサイト j 、任意の時刻 t に対してサイト値 u_j^t が

$$u_j^t = u_{j+k}^{t+p}$$

を満たすような適当な自然数 k, p が存在するとき, そのような u_j^t を進行波解と呼ぶことにする. これは, 2 値の場合よりは緩い条件である. この条件を満たす進行波解はいくつかのタイプに分類される. まず, 単独の孤立波を形成する場合で, 任意の時刻で状態が

$$\dots 000\overbrace{\ell NN\dots N}^{n\text{個}}r000\dots \quad (\text{タイプ 1})$$

もしくは,

$$\dots 000s000\dots \quad (\text{タイプ 2})$$

を満たすものである. ただし, タイプ 1 では ℓ, r, n の値が $0 \leq \ell, r \leq N-1, 0 \leq n$, かつ, $N < \ell + r + nN$ を満たしながら時間とともに変わり得るとし, タイプ 2 では s の値は一定で $1 \leq s \leq N$ を満たすとする. また, 両タイプの 0 でない値のサイトの集合を孤立波と呼ぶことにする. さらに, 両タイプの孤立波の結合形としての進行波解も存在する. すなわち, タイプ 1 の k 個の結合形

$$\dots 000\overbrace{\ell_1 NN\dots N}^{n_1}r_1\overbrace{00\dots 0}^{m_1}\overbrace{\ell_2 NN\dots N}^{n_2}r_2\overbrace{00\dots 0}^{m_2}\dots\overbrace{00\dots 0}^{m_{k-1}}\overbrace{\ell_k NN\dots N}^{n_k}r_k000\dots \quad (\text{タイプ 1'})$$

および, タイプ 2 の k の結合形

$$\dots 000s_1\overbrace{00\dots 0}^{m_1}s_2\overbrace{00\dots 0}^{m_2}\dots s_k\overbrace{00\dots 0}^{m_k}000\dots \quad (\text{タイプ 2'})$$

がある. ただし, タイプ 1' に対しては, m_j も時間とともに変わり得るとし, $\ell_j + n_jN + r_j = C$ (定数) かつ, $(m_j + 2)N - r_j - \ell_{j+1} \geq C$ を満たすことが必要である. また, タイプ 2' に対しては, $(m_j + 1)N \geq s_j + s_{j+1}$ を満たすことが必要である. 以上の 4 タイプが $N+1$ 値 CA の進行波解の一般形である. 例えば $N = 3$ の場合, タイプ 1, 1', 2, 2' の解の例として, それぞれ,

$$\begin{aligned} t = 0 & \dots 00013100000000\dots \\ & \begin{array}{l} 1 \dots 00000230000000\dots \\ 2 \dots 00000003200000\dots \\ 3 \dots 00000000131000\dots \end{array} \quad (\text{タイプ 1}), \\ \\ t = 0 & \dots 0001310002300320000000\dots \\ & \begin{array}{l} 1 \dots 0000023000032013100000\dots \\ 2 \dots 0000000320001310230000\dots \\ 3 \dots 00000000131000230032000\dots \end{array} \quad (\text{タイプ 1'}), \\ \\ t = 0 & \dots 000020000000\dots \\ & \begin{array}{l} 1 \dots 000002000000\dots \\ 2 \dots 000000200000\dots \\ 3 \dots 000000020000\dots \end{array} \quad (\text{タイプ 2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t = 0 & \dots 000020001000110000000 \dots \\
 1 & \dots 000002000100011000000 \dots \\
 2 & \dots 000000200010001100000 \dots \\
 3 & \dots 000000020001000110000 \dots
 \end{aligned}
 \quad (\text{タイプ } 2'),$$

などがある。上の例のタイプ 1, 1' のように $N+1$ 値 CA の進行波解には、数字のパターンがある時間周期をもちながら変化するものがある。このような解の挙動は、 $N+1$ 値 SCA を、ある 2 値 CA に変換して考えると自然に理解できる。その 2 値 CA の時間発展の規則は前節までで議論してきた 2 値 SCA の時間発展の規則を拡張したものとなっている。まず、変換について進行波解にのみ限定して述べる。タイプ 1', 2' のような孤立波の結合形の場合は、タイプ 1, 2 の場合から容易に推し量ることができるので、タイプ 1, 2 についてのみ述べる。まず、 u_i^t を $N+1$ 値 SCA のサイト i 、時刻 t でのサイト値であるとし、 v_i^t を、その $N+1$ 値 CA を変換して得られる 2 値 CA のサイト i 、時刻 t でのサイト値であるとする。そして、 $N+1$ 値 SCA の各サイト j に対し、2 値 CA のサイト $jN, jN+1, \dots, jN+N-1$ が対応するとし、 $u_j^t = v_{jN}^t + v_{jN+1}^t + \dots + v_{jN+N-1}^t$ を満たすとする。これだけでは $\{u_i^t\}$ が与えられたときに、 $u_j^t = 0$ もしくは N の場合には、それぞれ $v_{jN}^t = v_{jN+1}^t = \dots = v_{jN+N-1}^t = 0$ もしくは 1 と定まるが、 $0 < u_j^t < N$ に対しては対応する v は一意に定まらない。(もちろん、 v が与えられれば u は一意に定まる。) そこで、上のタイプ 1 の進行波解が与えられた場合は、 $u_j^t = \ell$ に対しては $v_{jN}^t = v_{jN+1}^t = \dots = v_{jN+N-\ell-1}^t = 0, v_{jN+N-\ell}^t = v_{jN+N-\ell+1}^t = \dots = v_{jN+N-1}^t = 1$ が対応し、 $u_j^t = r$ に対しては $v_{jN}^t = v_{jN+1}^t = \dots = v_{jN+\ell-1}^t = 1, v_{jN+\ell}^t = v_{jN+\ell+1}^t = \dots = v_{jN+N-1}^t = 0$ が対応するとする。すると、任意の時刻の状態 u を変換して状態 v を計算すると、 v の時間発展は 2 節の 2 値 SCA の時間発展規則に従うことが示せる。例として、上で示したタイプ 1 の進行波解 ($N=3$) の変換を Fig. 15 に示す。

$$\begin{aligned}
 t=0 \quad u: & \dots 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 & v: \dots |000|001|111|100|000|000|000|000|000|000|000|000| \dots \\
 1 \quad u: & \dots 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 & v: \dots |000|000|000|011|111|000|000|000|000|000|000|000| \dots \\
 2 \quad u: & \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 & v: \dots |000|000|000|000|000|111|110|000|000|000|000|000| \dots \\
 3 \quad u: & \dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 3 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \\
 & v: \dots |000|000|000|000|000|000|001|111|100|000|000|000| \dots
 \end{aligned}$$

Fig. 15 : Transformation of the travelling wave solution of type 1.

ただし、この図では v の状態を、 u の各サイトに対応する 3 つの v のサイトごとに | で区切ってある。次にタイプ 2 の進行波解の方は、 $u_j^t = s$ に対応して、 $v_{jN}^t = v_{jN+1}^t = \dots = v_{jN+N-s-1}^t = 0, v_{jN+N-s}^t = v_{jN+N-s+1}^t = \dots = v_{jN+N-1}^t = 1$ が対応すると定める。 u の時間発展に対応する v の時間発展を考えると、その規則は $v_j^t = v_{j+1}^{t+1}$ と表せる。上の例のタイプ 2 の進行波解の変換を Fig. 16 に示す。

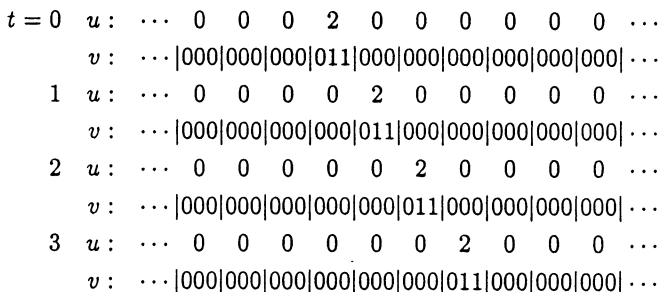


Fig. 16 : Transformation of the travelling wave solution of type 2.

この図からも明らかなように、 v の方の時間発展の規則は明らかに2筋で与えた2値SCAの規則とは異なる。そこで、もっと一般の初期値問題を u の方で考えるとき、特に、タイプ1, 2の孤立波が混在していて相互作用するような場合を考えるときは、 v の方では両タイプの時間発展の規則を矛盾無く受け入れるように、時間発展の規則を拡張する必要がある。そこで、2値SCAの基本列を v の方に導入して、 v の方の時間発展の一般規則を以下のように定める。まず、各時刻の v の状態に対し前節と同じ手続きで基本列を算出する。そして、他の基本列と相互作用していない基本列のうち、上のタイプ2の孤立波に対応する基本列があれば、その基本列を次の時刻でサイトにして N だけ右にずらす。それ以外の基本列に対しては、前の2値SCAの基本列の時間発展と同じ規則を適用して、次の時刻の配置を定める。Fig. 17に、 $N = 3$ の場合にタイプ1の孤立波とタイプ2の孤立波が初期に基本列の意味で離れて存在する場合の u の時間発展と、対応する v の時間発展を示す。

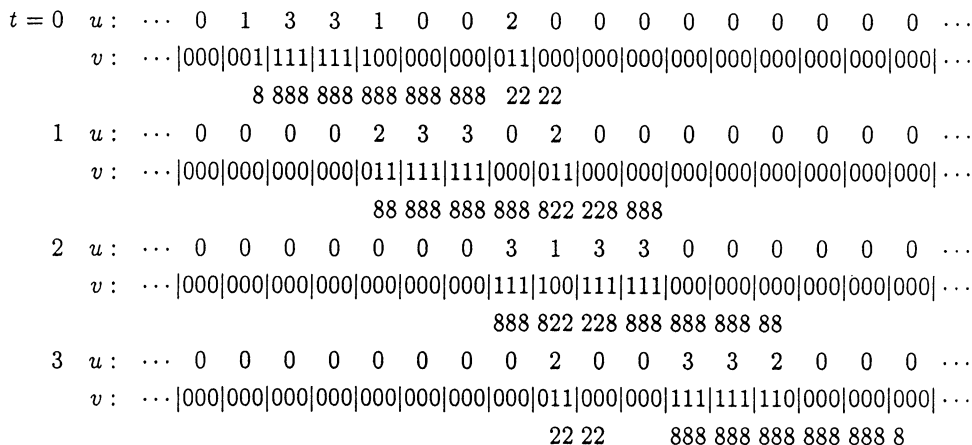


Fig. 17 : Interaction of solitary waves of type 1 and 2.

ここで、各時刻の状態 v の下に書かれている数字は基本列の添字である。この図では v の

時間発展が上で説明した規則に従うことがわかる。もし、初期状態として複数個の孤立波がお互い分離して存在するというより一般的な場合を考えても、 v の方に上で述べた時間発展の規則を適用すれば、任意の時刻で u と v の状態の対応が矛盾無く付くことが示せる。しかしながら、一般の初期状態としては、各孤立波が相互作用せずに存在している場合だけでなく、最初から相互作用しているような場合も考えられる。このような初期状態およびその時間発展に対しては、先に述べた u の状態から v の状態への変換手続きを拡張する必要がある。さらに、そうして得られた v の時間発展は上で述べた時間発展の規則に従わなければならない。この一般化された変換手続きについては、煩雑になるのでここでは触れないが、そのような変換手続きが存在することは示すことができる。さらに、任意の u の時間発展を v に変換し、 v の時間発展を解析することにより、この節で考えた $N+1$ 値 CA に対し、以下の結果が得られる。

1. 任意の初期状態 u の時間発展を考えると、十分時間が経過すると、必ずタイプ 1(1') もしくはタイプ 2(2') の孤立波に分裂する。さらに、十分時間を遡ると、必ずタイプ 1(1') もしくはタイプ 2(2') の孤立波に分裂する。
2. 任意の初期状態 u は v に変換して考えると、基本列だけで構成されている。また、その時間発展において、各基本列ひいては各孤立波は自己を保存する。この場合の「保存する」とは、状態 u を状態 v に変換したときに、各基本列が時間によって変わらないことをいう。
3. 無限個の保存量が存在する。

以上の結果より、この $N+1$ 値 SCA は、連続系のソリトン方程式がもつ特徴のうちのかなりを備えていると考えられる。

5. 終わりに

これまでの節で、2 値 および 多値の SCA の性質を波動現象の観点から詳しく論じてきた。得られた結果としては、

1. 任意の初期状態から、孤立波だけが発生すること。そして、孤立波同士が相互作用しても再び同じ孤立波が分離して再現し、相互作用の結果として軌道のずれを生じること。
2. 任意の初期状態は、基本列に分解でき、各基本列が 1 つの孤立波に対応すること。そして、基本列は任意の時刻で自己を保存し、初期状態の時間発展は基本列の伝播と相互作用で考えると容易に把握できること。
3. 無限個の保存量が存在すること。

等が挙げられる。このことより、SCA は連続系におけるソリトン方程式の非常に単純化されたものと考えることができる。さらに、今後の課題として以下のようなことが挙げられる。

1. 上に挙げたような性質を有する CA が他にも存在するか、特に、多次元の CA でそのようなものが存在するか。
2. SCA がモデルとなる現実の現象が存在するか。
3. SCA の性質を利用した、工学への応用は考えられるか。

また、ソリトン方程式については、既知のソリトン方程式のほとんどがある統一的な方程式系に含まれており、その解も美しい代数的構造を持っていることが、よく知られている。本稿で議論した SCA にも、より広い統一的なクラスの CA の系が存在し、ソリトン方程式のもつ構造と何らかの対応がつけられるのではないだろうか。さらに、もしそれが実現すれば、得られた結果は CA をも包括する離散数学に対する新しい知見になり得るのではないかというのが、筆者の期待である。

参考文献

- [1] Ablowitz, M. J., and Segur, H., *Solitons and the Inverse Scattering Transform*, SIAM, Philadelphia, 1981.
- [2] 相沢洋二, セル・オートマトンの周辺, 数理科学 No. 267 (1985), 64-70.
- [3] Fokas, A. S., Papadopolou, E. P., and Saridakis, Y. G., Soliton Cellular Automata, *Physica* 41D (1990), 297-321.
- [4] Kaneko, K., Attractors, Basin Structures and Information Processing in Cellular Automata, in refs. 1, 367-399.
- [5] 小淵洋一氏 (龍谷大学) の示唆による。
- [6] Park, K., Steiglitz, K., and Thurston, W. P., Soliton-like Behavior in Automata, *Physica* 19D (1986), 423-432.
- [7] Takahashi, D., and Satsuma, J., A Soliton Cellular Automaton, *J. Phys. Soc. Jpn.*, 59 (1990), 3514-3519.
- [8] Wolfram, S. (ed.), *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific, Singapore, 1986.

高橋大輔（正会員） 〒 520-21 滋賀県大津市瀬田 龍谷大学理工学部

1985年東京大学大学院工学系研究科修士課程終了。工学博士。現在、龍谷大学理工学部講師。ソリトン理論および流体力学の研究に従事。日本物理学会，日本流体力学会会員。

薩摩順吉（正会員） 〒 113 東京都文京区本郷 東京大学工学部

1973年京都大学大学院博士課程単位修得退学。工学博士。現在、東京大学工学部助教授。非線形波動論の研究に従事。日本物理学会，日本流体力学会会員。

(1990年12月11日受付)