

津田塾大学 数学・計算機科学研究所報

42

Reports of Institute for Mathematics and Computer Science

42

オンライン研究集会
「非線形波動から可積分系へ」
(2020)

Online Conference

From Nonlinear Waves to Integrable Systems
(2020)

2021

津田塾大学 数学・計算機科学研究所

Institute for Mathematics and Computer Science
Tsuda University

目次

Discretising and ultradiscretising the “Human and Nature Dynamics Model” -new challenges and the limits of modelling-	Ralph Willox	1
整数行列の単因子を計算する超離散可積分系	小林 克樹 辻本 諭	17
箱玉系の 30 年	高橋 大輔	29
相関付きランダムウォークから導かれる連続・離散・超離散方程式	福田 亜希子 渡邊 扇之介 瀬川 悦生	45
結び目に付随する代数系「カンドル」と対称性	井上 歩	57
二乗分散 Bogoliubov-de Gennes 演算子に付随する 可積分系と楕円関数ポテンシャルについて	高橋 大介	67
Pfaffian 解を持つ Hungry Lotka-Volterra 型方程式	志波 直明 田中 悠太 丸野 健一	83
一般的な境界条件での自己適合移動格子スキーム	丸野 健一 太田 泰広	93
超離散方程式におけるホップ分岐	大森 祥輔 山崎 義弘	103
完全 1 次保存する 3 値 3 近傍ファジー CA の収束性	西田 優樹 山崎 功貴 渡邊 扇之介 福田 亜希子 渡邊 芳英	109
番号付き箱玉系のソーティング条件	菅 雅文 福田 亜希子	121
畳み込みニューラルネットワークを用いた ECA のクラス分け	山田 弘樹 福田 亜希子	129

可積分な場合のHénon-Heiles系の離散化	飯野 寛大 ウィロックス ラルフ	135
血管内皮細胞の動態モデルの3次元への拡張について	酒井 一馬 林 達也 時弘 哲治 礪波 一夫 栗原 裕基	141
量子 XXZ 鎖に対する厳密な Bethe 量子数と Bethe 根	井元 隆史	149

- [8] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, *From soliton equations to integrable cellular automata through a limiting procedure*, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3247-3250.

箱玉系の30年

早稲田大学基幹理工学部応用数理学科 高橋大輔

箱玉系が最初に報告されたのは1990年の文献[1]で、2020年はちょうど30年ということになり、自らの周辺的话题を中心に経緯を振り返る。

1 箱玉系

当時の研究室のゼミで、ソリトンの相互作用を起こすセルオートマトン(CA)の文献[2]を薩摩順吉先生が紹介された。広田の双線形化法が行き着く先の一つとして佐藤の τ 函数の理論が広く知られ、さまざまな偏微分あるいは差分のソリトン系について、その構造がいろいろ研究されていた頃である。そこに、純粋なソリトン系ではないとは言え、状態値が0, 1で表され、空間も時間も離散のオールデジタルのCAはととても斬新であった。その時間発展則は以下の方程式で定義される。

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 1 & (S_j^n \text{ が } 0 \text{ でない偶数}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}, \quad (1)$$

$$S_j^n = u_{j-r}^{n+1} + \dots + u_{j-1}^{n+1} + u_j^n + u_{j+1}^n + \dots + u_{j+r}^n$$

u_j^n は時刻 n , サイト j での状態値であり、0か1の値を取る。この方程式で定義されるCAは、半径 r 内の次の時刻と現在の時刻の状態から時間発展が定まるので、無限インパルス応答型のフィルタ回路になぞらえて、フィルタ・オートマトン(FA)と呼ばれる。図1はその時間発展の一例である。この系の解の仕組みについては、文献[3, 4]などで報告があり、ソリトン系になりきらないがための独特の魅力がある。

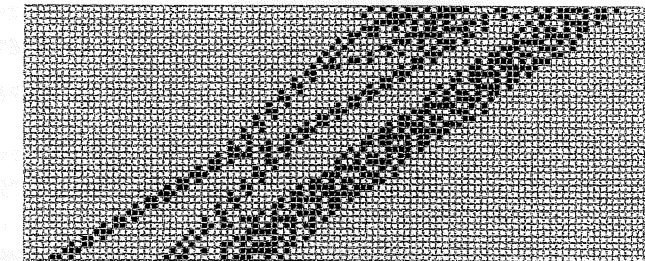


図1: $r=3$ の場合の(1)の時間発展の例。■が1, □が0を表し、右, 下がそれぞれ j, n の正方向

ソリトンCAは興味を惹くテーマであり、たとえば離散スペクトル問題の差分方程式に直接 modulo を施した次式の系なども報告された[5] (図2)。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + u_{j-2}^{n+1} u_{j+1}^n + u_{j-1}^{n+1} u_{j+2}^n \pmod{2} \quad (2)$$

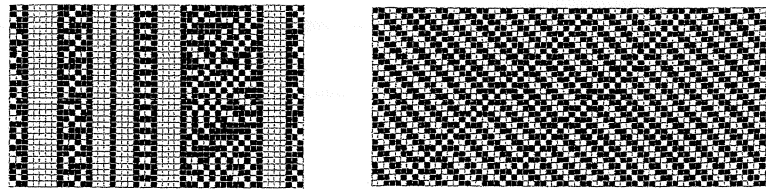


図 2: (2) の時間発展の例

ソリトン系の基本的な性質として、可算無限個の保存量の存在がある。たいへん特徴的な性質であるので、CA でソリトン系を実現するなら、なにがしかの保存量に着目してルールを考えた方がよい。状態値が 0 と 1 だけなら、0 のバックグラウンドに 1 が動いていると考えると 1 の個数が保存する。左右に伸びた 1 次元サイト中で 1 を動かすとし、とりあえず右方向に 1 の融合・分裂・消滅などがないように順に動かすなら、最も近い 0 の場所に動かすと考えのが自然であろう。問題は、左のサイトから順にそれを行うと、単独の 1 でも一挙に右方の無限の彼方に消えることである。そこで、左の 1 からスweepするのはずとして、1 回動いたらスweepが終わるまで動かないというルールを付加する。以上のことから時間発展則を方程式で表すと

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} 1 & (u_j^n = 0 \text{ かつ } \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^n > \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^{n+1}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (3)$$

となる [1]。n が時刻、j がサイト番号、u が状態値で $u \in \{0, 1\}$ である。

1 が動くイメージから、u を箱の 1 次元無限列の中の玉の数と見做して箱玉系という名前が付いた。実は、文献 [6] の頃は玉ではなく球という漢字を当てていたが、後に時弘哲治氏が玉という字を用いているのを見て、尋ねてみると球は堅苦しいと言うので、それ以来は玉である。等価な時間発展則として、運搬人が左の方から箱をスweepし、玉があればそれを右に運んでいき、空箱で手持ちの玉があればひとつ置く、としても構わない。運搬人という存在をさらに仮定するが、玉が動いたか否かの区別を付けず、(3) の $u_j^n = 0$ かつ $\sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^n > \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^{n+1}$ という条件と「空箱で手持ちの玉があれば」という文言が直結している。

これでオリジナルの箱玉系は完成し、時間発展は図 3 のように、連なる玉のグループがソリトンとしてふるまい、相互作用に関わらず自己を保存する。

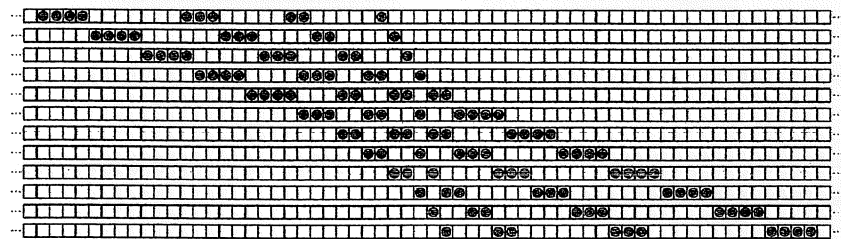


図 3: 箱玉系の時間発展の例

ソリトン理論では、新しい系が発見されると、それがランドデザインの中にどのように嵌まるかということが直ちに問題となる。箱玉系で直ちに説明すべき問題は、

- 任意の状態、特に相互作用の最中にソリトンはどのようにになっているか。
- 可算無限個の保存量はあるか。
- 既知のソリトン系とどのようなつながりがあるか。

などである。最初の間は散乱問題に相当する。図 4 がその最も単純な場合の間である。左の場合なら 3 個、1 個のソリトンが常に居るように見えるが、少し位相をずらすと右の場合となる。右の場合の真ん中の時刻で 3 個、1 個のソリトンはどこに居るかに答える手続きが必要である。これにつ

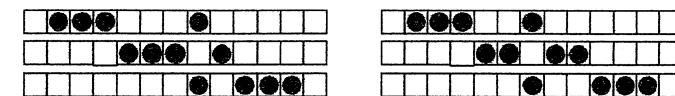


図 4: 3 個と 1 個のソリトンの相互作用で位相が異なる場合

いては文献 [1] で、任意の時刻でソリトンを 'Basic Strings' として同定する手続きを報告している (図 5)。Basic Strings という言葉は文献 [3, 4] から流用した。このような考えは後に少し形を変

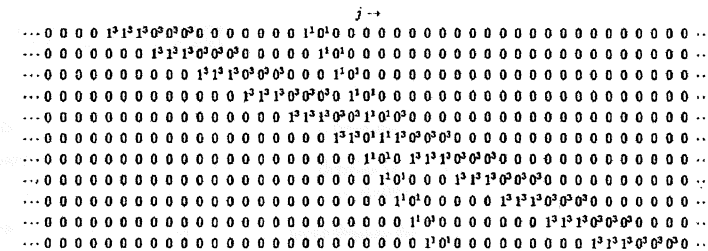


図 5: Basic Strings [1]

え、1 と 0 (つまり玉と空箱) のペアの入れ子として表現され、可算無限個の保存量が深さの異なるペアの個数という形で体现され、さらには Dyck 言語や Young 図形でも解釈が与えられる [7, 8]。

以上でソリトン系としての資格認定はパスする。次に問題となるのは、上記の最後の間「既知のソリトン系とどのようなつながりがあるか」である。この間の答はしばらくわからず、それまでの「しのぎ」として、箱の容量を玉 2 個以上にした大箱の系 [9] (後に可変容量の箱の系) や番号付き玉の系 [10, 11] などが報告された。故広田良吾先生と物理学会などでお会いする度に、新しい事実は何かありますかと先生より問われることが、このような拡張系を思いつく原動力であったことを申し添えておく。

ここまでの系ではすべてのソリトンの動く方向が単一である。既知の 1+1 次元ソリトン系では、分散関係によりたとえば時間 1 階の Korteweg-de Vries 方程式は単一の方向、2 階の戸田格子方程式は双方向にソリトンが動く。そして、戸田格子方程式

$$\frac{d^2 u_n}{dt^2} = e^{u_{n+1}} - 2e^{u_n} + e^{u_{n-1}} \quad (4)$$

の1階版はLotka-Volterra方程式

$$\frac{du_n}{dt} = e^{u_{n+1}} - e^{u_{n-1}} \quad (5)$$

である。片や箱玉系の時間発展則

$$u_j^{n+1} = \min\left(1 - u_j^n, \sum_{i=-\infty}^{j-1} (u_i^n - u_i^{n+1})\right) \quad (6)$$

の u_j^n を

$$S_j^n = \sum_{i=-\infty}^j u_i^n, \quad v_j^n = S_{j+1}^n - S_j^{n+1} \quad (7)$$

と変数変換すると、

$$v_{j+1}^{n+1} - v_j^n = \max(1, v_j^{n+1}) - \max(1, v_{j+1}^n) \quad (8)$$

となる。(5)と(8)を見比べて、 e^x に対応するのが $\max(1, x)$ だから、それを2階にしてみれば、という発想で見つけたのが超離散戸田格子方程式

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = F(u_{j+1}^n) - 2F(u_j^n) + F(u_{j-1}^n) \quad (9)$$

である。ただし、まだ超離散化がわからない頃であったので \max や \min という関数で表せばよいという確信はなく、整数値のソリトンが観察できるだけでいいとして、 $F(x)$ は $\max(1, x)$ とせず、0以上の整数 k に対して

$$F(k) = \begin{cases} 1 & (k=0) \\ k & (k>0) \end{cases} \quad (10)$$

と定義し、戸田格子という名前も付けずに報告している[12]。

ソリトン系として時間1階の(8)、2階の(9)は格好の比較材料となり、ほどなくして時弘氏、松木平淳太氏によって

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \quad (11)$$

という極限を用いた超離散化手法が確立され、差分Lotka-Volterra方程式[13]の超離散化から(8)が、差分戸田格子方程式[14]から(9)が導かれることが解明された[15]。また、極限の基本公式から、得られる超離散方程式はmax-plus代数(半環)上の方程式として捉えるとよいこともわかる。

2 他の系譜

箱玉系の発見と前後して、いくつかの分野で箱玉系やmax-plus代数と同等の数理を基盤としてそれぞれの視点からの研究が行われている。たとえば1980年代頃から離散事象システムやペトリネットなどの工学的応用にmax-plus代数が重要な数学として用いられている[16](図6)。

また幾何分野では、区分的に線形な図形と有理式をtropicalizationという操作で結びつけるトロピカル幾何学があり、超離散化やmax-plus代数と同じ概念が重要な役割を果たしている[17](図7)。

量子可積分系では、量子群のパラメータ q について $q \rightarrow 0$ の極限を取る、すなわち、絶対零度の極限を取るにより、可解格子模型の結晶化(crystallization)という操作が考えられた[18](図8)。このときに得られる量子群の基底は結晶基底と呼ばれ、表現論的な研究が盛んに行われ、その一環としてさまざまなバリエーションの箱玉系が報告されている。

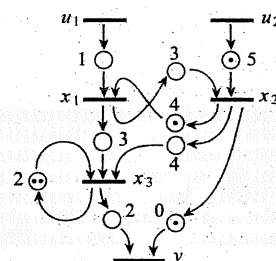
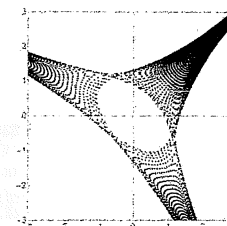
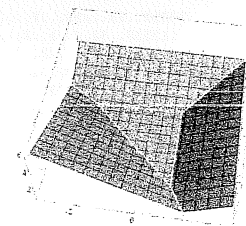


図6: ペトリネットの例[16]



アメーバ $x + y + \frac{1}{xy} + 3 = 0$ の
零点の絶対値のlogプロット



対応するトロピカル曲線
 $\max(x, y, -x - y, 1)$

図7: アメーバとトロピカル曲線

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 \text{---} 11 & 12 \text{---} 11 & 22 \text{---} 12 & 12 \text{---} 12 & 22 \text{---} 22 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 - q^3 z & 1 - q^2 & 1 - q^4 & q - q^2 z & q^2 - qz \end{array}$$

図8: R matrix の成分と Boltzmann weight

3 種々の箱玉系と可積分性

箱玉系はソリトン性を保ったままいろいろな拡張が報告されている。先述した大箱の拡張や番号付き玉の拡張のように、粒子系の移動ルールが現実の作業のような意味をなすバリエーションが多いことも興味深い。たとえば、運搬車付き箱玉系と呼ばれるものがある[19](図9)。これは、オリジナル箱玉系のところで述べた運搬車を、玉の積載量に限界のある運搬車に替えたものであり、運搬車は各箱から積載容量の範囲で玉を積めるだけ積み、箱の空きの範囲で下ろせるだけ下ろすというものである。この系の時間発展則は差分mKdV方程式の超離散化から得られる。

$$u_j^{n+1} = \min\left(L - u_j^n, \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^n - \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^{n+1}\right) + \max\left(0, \sum_{i=-\infty}^j u_i^n - \sum_{i=-\infty}^{j-1} u_i^{n+1} - M\right) \quad (12)$$

運搬車がひとつの箱を通過する際、通過前後の箱および運搬車の玉の数の変化を考えると、それは組み合わせRの作用と見なすことができる。先述の結晶基底によるさまざまな箱玉系はこの形式で構成される[20](図10)。ただし、玉を動かす手順を式でなく言葉で述べると、人が実際に行う作業の意味では一般に複雑になる。しかし、Box-Basket-Ball系のような楽しいソリトン系も存在する[21](図11)。

ミーリ・マシンによる系の定義も、超離散化やmax-plus代数に収まらない一般性があり興味深い[22]。さらに、ランダムな初期状態からの時間発展をランダムウォークのパスとして捉え、Pitman変換を利用した確率論の立場からの研究がなされている[23]。

ソリトン系なら解は τ 関数やPlücker関係式のような構造があるはずである。箱玉系については、広田形式の解の超離散化は容易にできる。しかしながら、WronskianやPfaffian, Plücker関係式は負の問題のため直接的な超離散化が難しく、さらに、max-plus代数を閉じた体系として考えたときの解の構造などもよくわからない。これらについては、超離散Permanentを用いた研究が成果を蓄積しつつある[24, 25]。

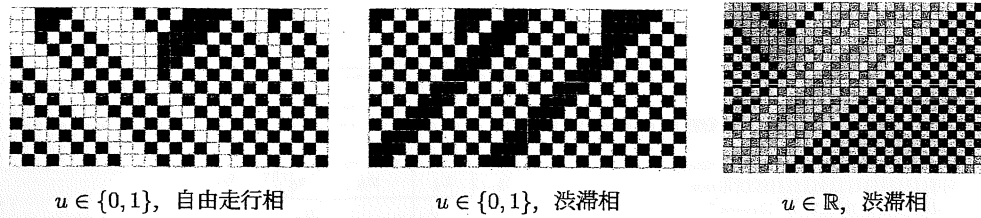


図 14: 超離散 Burgers 方程式の解

は Cole-Hopf 変換 $f_j^n - f_{j-1}^n + 1/2$ により

$$f_j^{n+1} = \max\left(\min\left(f_{j-2}^n, f_{j+1}^n + \frac{1}{2}\right), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\right) \quad (21)$$

に帰着する。そして、この方程式の初期値問題は

$$f_j^n = \max_{0 \leq k \leq n} \left(\min\left(f_{j-2n+3k}^0 - \frac{k}{2}, \min_{k+1 \leq i \leq n} f_{j-2n+3i}^0 + \frac{i}{2}\right) \right) \quad (22)$$

と解ける [30] (図 15)。

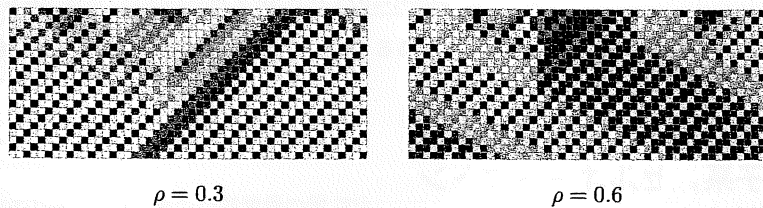


図 15: (20) の解の例 ($u \in \mathbb{R}$)

5 負の問題との戦い

超離散化では (11) の極限が最重要の役割を果たす。一方、

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon \log(e^{A/\epsilon} - e^{B/\epsilon}) \quad (23)$$

の極限が実数の範囲では well-defined でないことに起因して、元の差分方程式に引き算や負の値があると超離散化がうまくできないという「負の問題」が存在する。これをどのように解決するかというのが、超離散化における技量の見せ所であり、多くの研究者がこの問題に立ち向かった。真向勝負を挑んだ例として文献 [31] がある (図 16)。基本的アイデアは、以下のように差分変数 (x) と超離散変数 (X) を対応させる際に、符号部分 (s) を別に扱うというものである。

$$x = (s(\xi) - s(-\xi))e^{X/\epsilon}, \quad s(\xi) = \begin{cases} 1 & (\xi = +1) \\ 0 & (\xi = -1) \end{cases} \quad (24)$$

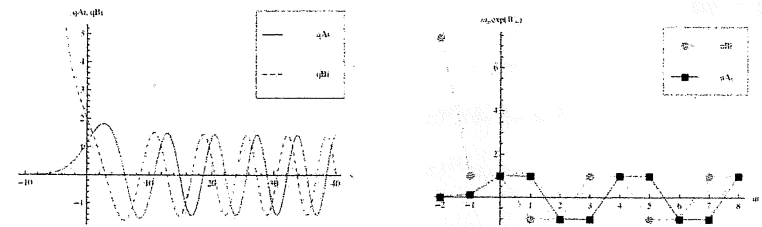


図 16: Airy 関数とその超離散化 [31]

負の問題を捌め手から攻める方法もある。微分・差分・超離散という連関において、差分・超離散の間に負の問題があるのなら、微分・差分の間で負の問題が発生しないように差分化を工夫するという回避策である。たとえば、SIR モデル

$$\dot{S} = -rSI, \quad \dot{I} = rSI - sI, \quad \dot{R} = sI \quad (25)$$

の差分化で、従属変数を取り直すと

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1 + cy_n}{1 + y_n}, \quad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a + x_n}{1 + bx_n} \quad (26)$$

が得られる。この方程式は直ちに超離散化可能で、

$$\begin{cases} X_n = X_{n-1} + \max(0, Y_n - \gamma) - \max(0, Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \max(-\alpha, X_n) - \max(0, X_n - \beta) \end{cases} \quad (27)$$

が導かれる [32]。交通流の最適速度モデル

$$\ddot{x}_k = A\{V(x_{k+1} - x_k) - \dot{x}_k\} \quad (28)$$

の差分化も

$$x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} = A\{\log(1 + \delta^2 V(x_{k+1}^n - x_k^n)) - \log(1 + \delta(e^{x_k^n - x_k^{n-1}} - 1))\} \quad (29)$$

とすれば負の問題を避けられる [33]。

差分で負の項を含めずに、連続極限で負の項が出るようにするには、たとえば

$$\frac{1}{1 + \delta x} = 1 - \delta x + O(\delta^2) \quad (30)$$

というような Taylor 展開を利用すればよい。トロピカル離散化は、この考え方の下でシステマティックに超離散化を行う方法として提唱されている [34, 35]。

微分方程式、差分方程式、超離散 (max-plus) 方程式、CA の順に離散化の度合いを進める研究が多いが、逆の発想で CA の解のパターンに微分方程式の解を似せてしまおうという異色の試みもある。CA の時空間パターンを矩形波の伝播と捉え、そのような矩形波が時空間を滑らかに安定に伝播するための連続化手法が報告された [36]。たとえば ECA の場合は、まず次式のように時間発展則を矩形波で表現する。

$$u_j^{n+1} = E_\epsilon(v_{j-1}^n, v_{j+1}^n), \quad v_j^n = F_{\epsilon, \Delta}(u_j^n), \quad (31)$$

$$E_\epsilon(v, w) = \epsilon \log \cosh(v - w)/\epsilon, \quad F_{\epsilon, \Delta}(x) = (1 + e^{-(x-\Delta)/\epsilon})^{-1}$$

次に時間と空間を順に連続化すると以下の偏微分方程式が得られる (図 17) .

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -(u(x,t) - E_\varepsilon(v^{(1)}(x,t), v^{(2)}(x,t))), \\ \frac{\partial v^{(1)}(x,t)}{\partial t} = -\gamma(v^{(1)}(x,t) + \lambda \frac{\partial v^{(1)}(x,t)}{\partial x} - F_{\varepsilon,\Delta}(u(x,t))), \\ \frac{\partial v^{(2)}(x,t)}{\partial t} = -\gamma(v^{(2)}(x,t) - \lambda \frac{\partial v^{(2)}(x,t)}{\partial x} - F_{\varepsilon,\Delta}(u(x,t))) \end{cases} \quad (32)$$

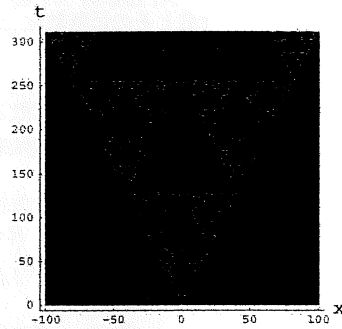


図 17: 偏微分方程式で実現された ECA90 [36]

6 max-plus 方程式と力学系

常微分方程式では、相空間内の軌道の安定性や分岐を論じ、特異点・保存量・Lyapunov 関数などの特性量を調べ、特殊関数や級数展開で解を表現することで、多様な観点から方程式を議論し、豊かな数理が展開する。このような力学系の観点から max-plus 方程式を論じる研究も多彩に行われており、たとえば文献 [37] では、超離散 QRT 系の写像をトポカル楕円曲線上の点の遷移として捉えている (図 18) .

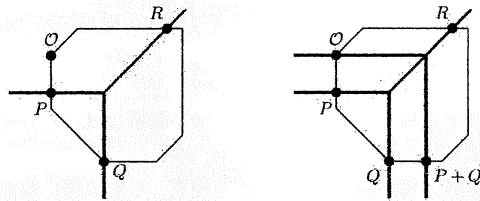


図 18: トポカル楕円曲線上の点の遷移 [37]

文献 [38] では、同じく QRT 系の写像と楕円関数解

$$x_{n+1}x_n^2x_{n-1} = \alpha + \beta x_n, \quad x_n = a + b \operatorname{cn}^2(\xi n; k) \quad (33)$$

に対して超離散化を施し、写像と解のセット

$$X_{n+1} + 2X_n + X_{n-1} = \min(2p, X_n + 2q), \quad X_n = p \min\left(\frac{q}{p}, 2\left\{\frac{qn}{2p}\right\}, 2 - 2\left\{\frac{qn}{2p}\right\}\right) \quad (34)$$

を得ている. $\{x\}$ は x の小数部分を返す演算であり, $M\{x/M\}$ は剰余の連続化とも見なせるので興味深い (図 19) .

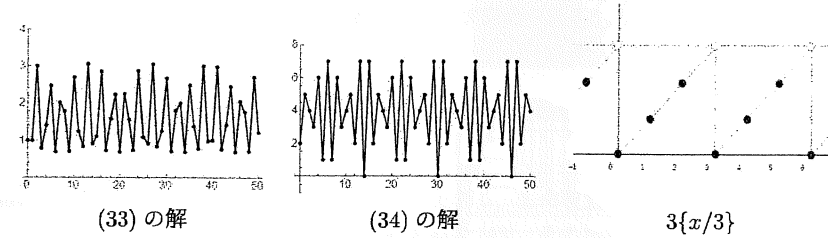


図 19: QRT 系の楕円関数解の超離散化

さらに、QRT 系をベースにして厳密な Lyapunov 関数を持つ系を作った例も報告されている [39]. 保存量をもとに QRT 系に項を付け加えた差分方程式

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n) - x_{n-1}f_2(x_n) - \alpha_n x_{n-1}(h_n - h_\infty)}{f_2(x_n) - x_{n-1}f_3(x_n) - \alpha_n(h_n - h_\infty)} \quad (35)$$

では、QRT 系の保存量 h_n が Lyapunov 関数の役割に変わる. その特別な場合の連続極限から 2 階常微分方程式

$$y'' = \frac{1}{c_{02}}(-c_{00}e^{2y} - c_{01}e^y + c_{12}e^{-y} + c_{22}e^{-2y}) - 2c_{02}\tilde{\beta}e^{2y}y'(\tilde{h}(y, y') - \tilde{h}_\infty) \quad (36)$$

が、超離散化から max-plus 方程式

$$X_{n+1} = G_1(X_n) - X_{n-1} - G_3(X_n) + \max(H_\infty + G_1(X_n), H_n + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n) - \max(H_n + G_1(X_n), H_\infty + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n) \quad (37)$$

が導かれる (図 20) .

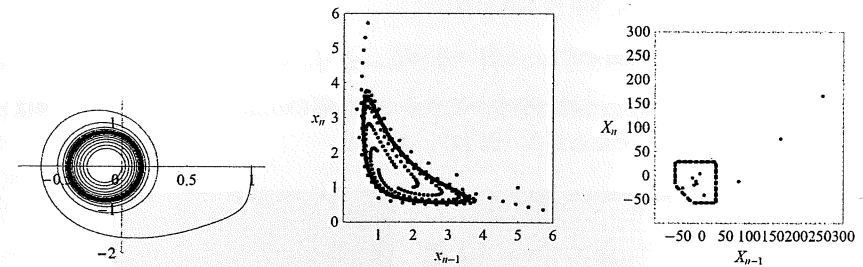


図 20: Lyapunov 関数を持つ系の微分・差分・超離散対応 [39]

さらに、可解カオスにも超離散化可能となる例が報告されている [40]. ロジスティック写像を特別な場合として含む Schröder 写像とその解

$$z_{n+1} = \frac{4z_n(1-z_n)(1-k^2z_n)}{(1-k^2z_n^2)^2}, \quad z_n = \operatorname{sn}^2(2^n u_0, k) \quad (38)$$

に対して、負の問題を起こさない変換 $z_n/(1-z_n) = e^{X_n/\epsilon}$, $\sqrt{1-k^2} = e^{-1/2\epsilon}$ を用いて極限 $\epsilon \rightarrow +0$ を取ると、テント写像とその解

$$X_{n+1} = 1 - 2 \left| X_n - \frac{1}{2} \right|, \quad X_n = 1 - 2 \left| \{2^n u_0\} - \frac{1}{2} \right| \quad (39)$$

が得られる (図 21). 普通なら負の問題が起こるようなカオス系から、問題を起こさないケースのみを限定して選ぶという優れた工夫の産物であり、超離散化は系の翻訳ではなく、メカニズムの翻訳であるという精神が生きている。

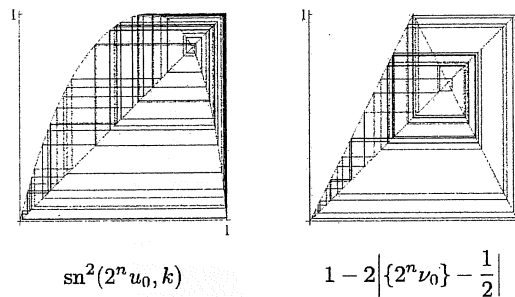


図 21: カオス系の超離散化

7 CA を包含する max 方程式

CA は値域が有限集合、あるいは、せいぜい整数程度であるが、max-plus 方程式は値域が実数であり、特別な場合として CA を埋め込むことが可能である。すなわち、max-plus 方程式を解析することは、CA よりも階層が上の対象を相手にしていることになる。そのような立場から行われた研究として、max, min, - (符号反転) を基本演算とする全順序束上の方程式の初期値問題の解析がある [41]。たとえば

$$u_j^{n+1} = \min(-u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) \quad (40)$$

の初期値問題を解くと、max, min の公式から

$$u_j^n = \min(-u_{j-1}^0, -u_j^0, \dots, -u_{j+n-2}^0, u_j^0, u_{j+1}^0, \dots, u_{j+n}^0) \quad (41)$$

となる。これを $u \in \{-1, 1\}$ の 2 値に限定するとルール番号 8 の ECA と等価になり、解は $n \geq 2$ で $u_j^n \equiv -1$ となることがすぐにわかる (図 22)。さらに

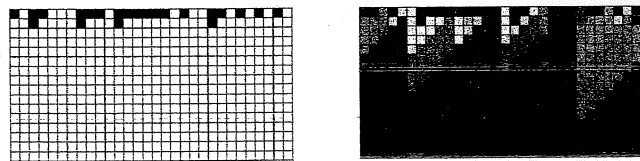


図 22: (40) の 2 値解と実数解

$$u_j^{n+1} = \min(\max(u_{j-1}^n, u_j^n), u_{j+1}^n) \quad (42)$$

では、2 値解では Wolfram クラス 1 と判定されるものが、実数解ではあたかもクラス 2 のようにふるまっている (図 23)。

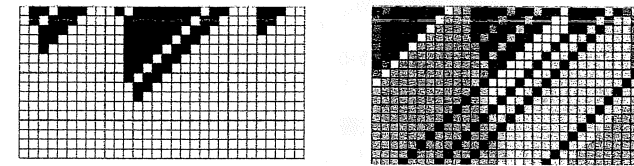


図 23: (42) の 2 値解と実数解

Conway のライフゲーム [42] は 2+1 次元 CA であり、生命現象の簡易なモデルとして著名であるが、それを包含する max-plus 方程式が考案された [43]。その簡単な場合は

$$u_{ij}^{n+1} = \max(0, u_{ij}^n + s_{ij}^n - 2) - \max(0, u_{ij}^n + s_{ij}^n - 3) - \max(0, s_{ij}^n - 3) + \max(0, s_{ij}^n - 4) \quad (43)$$

で与えられる (s_{ij}^n はサイト (i, j) の Moore 近傍の u の和)。この方程式は SmoothLife と呼ばれるライフゲームの連続化モデルを max-plus 化したものであり、かつ、 $u \in \{0, 1\}$ の場合にライフゲームと等価になる。面白いのは、実数のパラメータによってライフゲームの複数の 2 値解を統合する解が存在することである。たとえば、□, ■, ◻, ◼ がそれぞれ $u = 0, 1, a, 1-a$ ($a \in [0, 1]$) を表すとき、ライフゲームの位相の異なる 2 つのグライダー (Glider) を統合したものが図 24 (a) であり、左上方向に周期的にパターンを変えながら安定に進む。この解は、 $a = 1, a = 0$ の場合にそれぞれライフゲームのグライダー (b), (c) となる。

この解は同じグライダーを位相を変えて統合したものであるが、図 25 は異なる種類の周期解を統合した例であり、(a) の解は $a = 1$ でライフゲームの時計 (clock), (b), $a = 0$ でヒキガエル (toad), (c) となり、いずれも周期 2 でふたつの模様を交互にスイッチする周期解である。

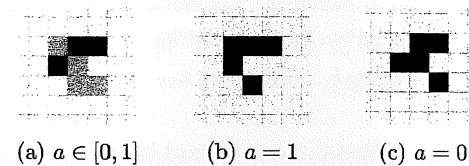


図 24: 位相の異なるグライダーを統合した解

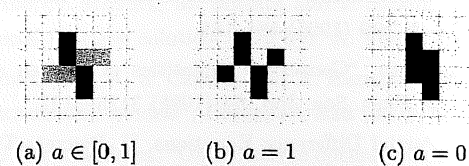


図 25: 時計とヒキガエルを統合した解

8 おわりに

箱玉系が発見されてから 30 年が経ち、箱玉系の数理はいろいろな領域と関連しながら深化している。それと同時に、超離散化や max-plus 代数というジェネラルな枠組みを使って応用研究も盛んに行われている。まだまだ面白いことはあるであろうし、成果を踏み台とした新しいパラダイムの到来も待ち望まれる。

最後に、箱玉系や max-plus 代数関連の成書 [45, 46, 47, 48] を参考書として挙げておく。

参考文献

- [1] D. Takahashi and J. Satsuma, "A Soliton Cellular Automaton", *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990) 3514–3519.
- [2] J. K. Park, K. Steiglitz and W. P. Thurston, "Soliton-like Behavior in Automata", *Physica D* **19** (1986) 423–432.
- [3] T. S. Papatheodorou, M. J. Ablowitz and Y. G. Saridakis, "A Rule for Fast Computation and Analysis of Soliton Automata", *Stud. Appl. Math.* **79** (1988) 173–184.
- [4] A. S. Fokas, E. P. Papadopoulou, Y. G. Saridakis and M. J. Ablowitz, "Interaction of Simple Particles in Soliton Cellular Automata", *Stud. Appl. Math.* **81** (1989) 153–180.
- [5] M. Bruschi, P. M. Santini and O. Ragnisco, "Integrable Cellular Automata", *Phys. Lett. A* **169** (1992) 151–160.
- [6] 高橋大輔, "箱と球でもソリトン系!", *日本物理学会誌* **48** (1993) 37–40.
- [7] D. Takahashi, "On a Fully Discrete Soliton System", *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems*, eds. M. Boiti, L. Martina and F. Pempinelli (World Scientific, Singapore, 1992) 245–249.
- [8] M. Torii, D. Takahashi and J. Satsuma, "Combinatorial Representation of Invariants of a Soliton Cellular Automaton", *Physica D.* **92** (1996) 209–220.
- [9] 高橋大輔, 薩摩順吉, "単純なソリトン系をなすセル・オートマトンについて", *日本応用数学会論文誌* **1** (1991) 41–60.
- [10] D. Takahashi, "On Some Soliton Systems Defined by Using Boxes and Balls", 1993 International Symposium on Nonlinear Theory and Its Applications, (Hawaii, 1993) 555–558.
- [11] T. Tokihiro, D. Takahashi and J. Matsukidaira, "Box and ball system as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation", *J. Phys. A* **33** (2000) 607–619.
- [12] D. Takahashi and J. Matsukidaira, "On Discrete Soliton Equations Related to Cellular Automata", *Phys. Lett. A* **209** (1995) 184–188.
- [13] R. Hirota and S. Tsujimoto, "Conserved Quantities of a Class of Nonlinear Difference-Difference Equations", *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** (1995) 3125–3127.
- [14] R. Hirota, "Nonlinear Partial Difference Equations. II. Discrete-Time Toda Equation", *J. Phys. Soc. Jpn.* **43** 2074–2078.
- [15] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, "From Soliton Equations to Integrable Cellular Automata through a Limiting Procedure", *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3247–3250.
- [16] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Older and J. P. Quadrat, "Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems" (1992, John Wiley & Sons, New York).
- [17] I. Simon, "Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring", *Lecture Notes in Computer Science* **324** (1988) 107–120.
- [18] M. Kashiwara, "Crystalizing the q-analogue of universal enveloping algebras", *Comm. Math. Phys.* **133** (1990) 249–260.
- [19] D. Takahashi and J. Matsukidaira, "Box and Ball System with a Carrier and Ultradiscrete Modified KdV Equation", *J. Phys. A* **30** (1997) L733–L739.
- [20] G. Hatayama, A. Kuniba and T. Takagi, "Soliton cellular automata associated with crystal bases", *Nucl. Phys. B* **577** (2000) 619–645.
- [21] R. Sakamoto, "Ultradiscrete Soliton Systems and Combinatorial Representation Theory", *数理解析研究所講究録* **1913** (2014) 141–158.
- [22] 辻本諭, "On Soliton Automata", *数理解析研究所講究録* **2071** (2018) 134–140.
- [23] D. A. Croydon, T. Kato, M. Sasada and S. Tsujimoto, "Dynamics of the box-ball system with random initial conditions via Pitman's transformation", *arXiv:math.PR/1806.02147* (2018), accepted in *Memoirs AMS* (2019).
- [24] D. Takahashi and R. Hirota, "Ultradiscrete Soliton Solution of Permanent Type", *J. Phys. Soc. Jpn.* **76** (2007) 104007.
- [25] H. Nagai, "Ultradiscrete permanent solution to the ultradiscrete Kadomtsev-Petviashvili equation", *Japan J. Indust. Appl. Math.* **35** (2018) 355–372.
- [26] D. Takahashi and K. Kajiwara, "On integrability test for ultradiscrete equations", *数理解析研究所講究録* **1098** (1999) 1–13.
- [27] N. Joshi and S. Lafortune, "Integrable ultra-discrete equations and singularity analysis", *Nonlinearity* **19** (2006) 1295–1312.
- [28] B. Grammaticos, A. Ramani, K. M. Tamizhmani, T. Tamizhmani and A. S. Carstea, "Do integrable cellular automata have the confinement property?", *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007) F725–F735.
- [29] K. Nishinari and D. Takahashi, "Analytical Properties of Ultradiscrete Burgers Equation and Rule-184 Cellular Automaton", *J. Phys. A* **31** (1998) 5439–5450.
- [30] D. Takahashi, J. Matsukidaira, H. Hara and B. Feng, "Max-plus analysis on some binary particle systems", *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 135102.
- [31] S. Isojima, T. Konno, N. Mimura, M. Murata and J. Satsuma, "Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution", *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** (2011) 175201.
- [32] R. Willox, B. Grammaticos, A. S. Carstea and A. Ramani, "Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models", *Physica A* **328** (2003) 13–22.
- [33] D. Takahashi and J. Matsukidaira, "On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives", *JSIAM Letters* **1** (2009) 1–4.
- [34] M. Murata, "Tropical discretization: ultradiscrete Fisher-KPP equation and ultradiscrete Allen-Cahn equation", *J. Differ. Equ. Appl.* **19** 1–14.

- [35] K. Matsuya and M. Murata, "Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model", *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **20** (2015) 173–187.
- [36] W. Kunishima, A. Nishiyama, H. Tanaka and T. Tokihiro, "Differential Equations for Creating Complex Cellular Automaton Patterns", *J. Phys. Soc. Jpn.* **73** (2004) 2033–2036.
- [37] A. Nobe, "Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves", *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 125205.
- [38] D. Takahashi, T. Tokihiro, B. Grammaticos, Y. Ohta and A. Ramani, "Constructing Solutions to the Ultra-Discrete Painlevé Equations", *J. Phys. A* **30** (1997) 7953–7966.
- [39] H. Inoue, D. Takahashi and J. Matsukidaira, "Discrete mappings with an explicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings", *Physica D* **217** (2006) 22–30.
- [40] K. Kajiwara, A. Nobe and T. Tsuda, "Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps", *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** (2008) 395202.
- [41] T. Ikegami, D. Takahashi and J. Matsukidaira, "On solutions to evolution equations defined by lattice operators", *Japan J. Indust. Appl. Math.* **31** (2014) 211–230.
- [42] M. Gardner, "Mathematical Games: The fantastic combinations of John Conway's new solitaire game 'life'", *Sci. Am.* **223** 120–123.
- [43] K. Sakata, Y. Tanaka and D. Takahashi, "Max-Plus Generalization of Conway's Game of Life", *Complex Syst.* **29** (2020) 63–76.
- [44] S. Rafler (2011) "Generalization of Conway's 'Game of Life' to a continuous domain – SmoothLife", arXiv:nlin.CG/1111.1567v2 (2011).
- [45] 中村佳正編, "可積分系の応用数理" (第3章 松木平淳太パート), 裳華房 (2000).
- [46] 広田良吾, 高橋大輔, "差分と超離散", 共立出版 (2003).
- [47] 時弘哲治, "箱玉系の数理" (開かれた数学3), 朝倉書店 (2010).
- [48] B. Heidergott, G. J. Olsder and J. van der Woude, "Max Plus at Work: Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications", Princeton University Press (2014).

相関付きランダムウォークから導かれる 連続・離散・超離散方程式

福田 亜希子¹, 渡邊 扇之介², 瀬川 悦生³,

¹ 芝浦工業大学, ² 福知山公立大学, ³ 横浜国立大学

1 はじめに

連続の拡散方程式 $f_t = f_{xx}$ に対し, コール・ホップ変換と呼ばれる変数変換 $u = (\log f)_x$ によってパーガース方程式

$$u_t = 2uu_x + u_{xx} \quad (1.1)$$

が得られることが知られている [1, 5]. また, 離散拡散方程式

$$f_j^{n+1} = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) \quad (1.2)$$

に対し, 離散コール・ホップ変換

$$u_j^n = \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} \quad (1.3)$$

を行おうと, 離散パーガース方程式

$$u_j^{n+1} = u_j^n \frac{u_{j+1}^n + 1/u_j^n}{u_j^n + 1/u_{j-1}^n} \quad (1.4)$$

が得られる [3]. また, これらの方程式とコール・ホップ変換の超離散版が得られており, 超離散拡散方程式

$$F_j^{n+1} = \max(F_{j+1}^n, F_{j-1}^n) \quad (1.5)$$

に対し, 超離散コール・ホップ変換

$$U_j^n = F_{j+1}^n - F_j^n + \frac{L}{2}$$

を行おうと, 超離散パーガース方程式

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, L - U_j^n, U_j^n, L - U_{j+1}^n) \quad (1.6)$$