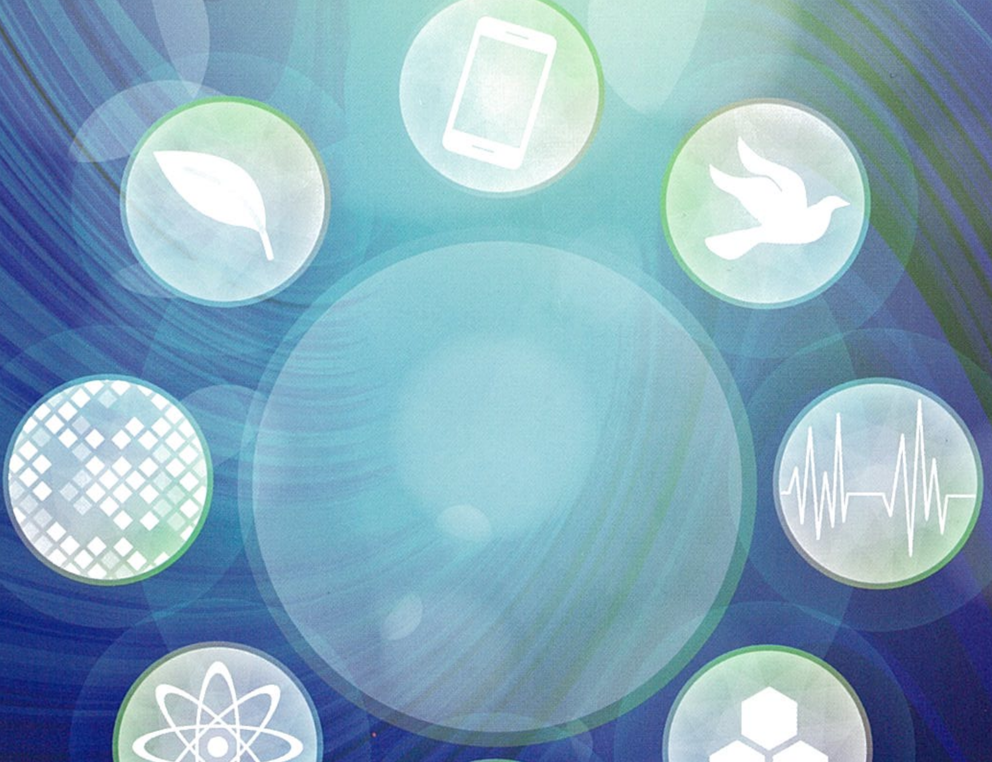
平成27年10月25日印刷　平成27年11月1日発行　第1098号／毎月1回1日発行

電子情報通信学会誌

THE JOURNAL OF THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

本会のWWWホームページ
http://www.ieice.org/

特集　非線形理論とその応用



11 平成27年11月
NOVEMBER
Vol.98 No.11

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

EiC 一般社団法人
電子情報通信学会

2015-11
EiC

98巻11号 平成27年11月
一般社団法人
電子情報通信学会

〒105-0011 東京都港区芝公園3-5-8機械振興会館内
電話 (03) 3433-6691(代) FAX (03) 3433-6659
E-mail : office@ieice.org 振替口座 : 00120-0-35300

目次
電子情報通信学会誌

巻頭言

追悼抄

特集　非線形理論とその応用

その他

ニュース解説

完全離散系へ向かう解ける非線形系の理論

Theory on Solvable Nonlinear Systems Going to Completely Discrete Systems

高橋大輔

Abstract

解ける非線形系の理論は可積分系を中心に発展してきた．当初は微分系を中心に研究が盛んであったが，理論が整備されていくにつれ厳密解・保存量などの表現に関する代数的な側面が次第に重要性を増していく．そして，差分方程式で記述される系の研究が隆盛を迎える．ところが更に超離散化と呼ばれる状態変数の離散化手法が発見され，完全離散系すなわちディジタル系の研究に到達する．本稿では具体例に基づいて超離散化の解説を行い，この手法が提示する連続と離散の新しい関係について述べる．

キーワード：超離散，ソリトン，箱玉系，差分方程式，セルオートマトン

1. はじめに

非線形系が解けるという表現は人によって受け止め方が異なるが，ここでは簡単に，解が初等関数や特殊関数で明示的に与えられるような場合のこととする．このような解ける非線形系は，ソリトン系あるいはより広く可積分系と呼ばれる系で数多く発見され，その数理構造の理論研究が盛んに行われている．

ソリトン理論は1960〜70年頃に最初のブレークを迎え，当初はKorteweg-de Vries方程式やsine-Gordon方程式を代表格とする非線形偏微分方程式が主な対象であった[(1),(2)]．そしてNソリトン解，可算無限個の保存量，Bäcklund変換，逆散乱法など，ソリトン系特有の性質がいろいろな方程式で共有され，方程式同士でヒエラルキーを作っていることが解明された．更に1980年前後における統一理論の登場により，ほぼ全てのソリトン系が同じルーツを持っていることが判明し，ソリトン系理論は一つの頂点を迎える．

その一方で，空間座標や時間を離散化した差分ソリトン系の研究が1970年代から登場し，微分系の研究に並行しながら深化し，微分ソリトン系と同じルーツを持った別の顔であることが次第に明らかになる．そして研究の中心は次第に微分系から差分系にシフトしていくようになる[(3)]．厳密解をはじめ様々な特徴量が明示的に数式で記述され，変換や極限などの記号処理的演算が中心の理論であるがゆえに，その代数的側面が重要になるのは自然の流れであり，系の根源的メカニズムをより直接的に内包するのは連続系よりも離散系である．

そして1990年代に超離散化が登場する[(3),(4)]．これによって空間，時間などの独立変数だけでなく，状態値を表す従属変数までも離散化が可能となり，ソリトン系に完全離散な，すなわち，ディジタルな系が存在していることが明らかとなった．ところが，それらもまた微分系，差分系と同じルーツを持っており，系のメカニズムは「連続も離散も同じ」であることが帰結された．連続と離散のこのような関係は全く新しい視点を，特にディジタル系に投げ掛ける．本稿では，超離散化が与えるこのような物の見え方について，具体例を通じて紹介する．

2. 可積分写像の超離散化

例えば次の離散写像（3項間漸化式）は，可積分なQuispel-Roberts-Thompson（QRT）系の特別な場合となっている．

高橋大輔　早稲田大学基幹理工学部応用数理学科
E-mail　daisuket@waseda.jp
Daisuke TAKAHASHI, Nonmember (School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 169-8555 Japan).
電子情報通信学会誌　Vol.98 No.11 pp.953-956 2015年11月

$$x_{n+1}=\frac{1+cx_n}{x_{n-1}x_n^2} \qquad (1)$$

この系には保存量

$$h(x_{n-1}, x_n)=\frac{1}{x_{n-1}x_n}+\frac{c}{x_{n-1}}+\frac{c}{x_n}+x_{n-1}x_n \qquad (2)$$

が存在し，初期値（例えばx_0, x_1）を定めれば$h(x_{n-1}, x_n)$が初期値によらない定数となることを容易に示せる．また一般解はJacobiのだ円関数snを用いて

$$x_n=A+B\,\mathrm{sn}^2(Cn+D) \qquad (3)$$

の形で与えることができる．ある初期値からの解を相平面にプロットしたものが図1である．解の点は$h(x_{n-1}, x_n)$=定数の曲線上に乗っている．

次にこの解の「極端な場合」を考えてみよう．今，方程式の変数や定数にパラメータεを含む以下の変換を施す．

$$x_n=e^{X_n/\varepsilon},\quad c=e^{C/\varepsilon} \qquad (4)$$

この変換により式(1)は

$$X_{n+1}=\varepsilon\log(1+e^{X_n+C})-X_{n-1}-2X_n$$

と書き換えられるが，この段階ではグラフをlogプロットするようなもので，解の本質は何も変わっていない．ところが$\varepsilon\to+0$の極限を取ると，公式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon})=\max(A,B) \qquad (5)$$

より，更に

$$X_{n+1}=\max(0, X_n+C)-X_{n-1}-2X_n \qquad (6)$$

となる．この方程式の解を相平面にプロットしたものが図2である．式(6)は式(1)とは随分異なる写像であり，解の軌道も多角形状になった．しかしながら，εが有限なら式(1)そのものであり，εが十分小さいと式(6)に近い解の振舞いになる．ということは，$\varepsilon\to+0$の極限を取り終わった瞬間に得られる式(6)は，元の式(1)の性質を何らかの形で反映しているはずである．

差分方程式の連続極限では，極限で得られる微分方程式の解を差分方程式が近似していることが多い．しかしながら，図1，2の解を比較すれば明らかであるが，近似はとても望めそうにない．ところが，式(2)の保存量に対して同様に

$$h(x_{n-1}, x_n)=e^{H(X_{n-1}, X_n)/\varepsilon}$$

と変換し，$\varepsilon\to+0$の極限を取ると，

$$H(X_{n-1}, X_n)=\max(-X_{n-1}-X_n,\ C-X_{n-1}, C-X_n, X_{n-1}+X_n)$$

となり，相平面でHの等高線を描くと解軌道と一致する，つまり，Hは式(6)の保存量となっているのである．更に計算はハードであるが，だ円関数解（式(3)）から上記の変換を通じて式(6)の解を導出することもできる．用いたものは変換と極限だけであるので，四則演算で構成された元の系及び付随する特徴量をごっそりmaxの世界に翻訳できるのである．

更に，式(6)にはうれしいおまけが付いている．もし初期値とパラメータCが整数ならば，X_nの値は常に整数で閉じる．例えば$C=1$の場合に$X_0=X_1=2$とすると，X_nは

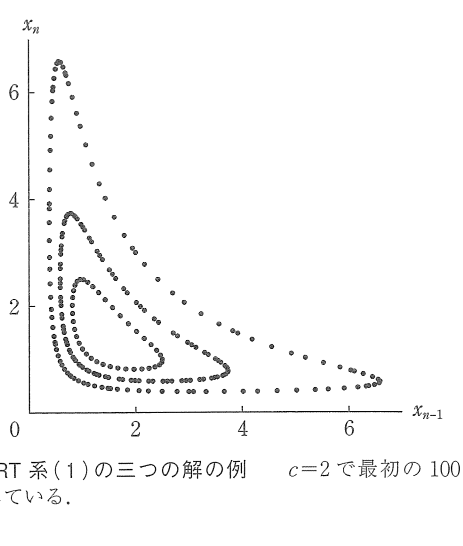


図1　QRT系(1)の三つの解の例　$c=2$で最初の100点をプロットしている．

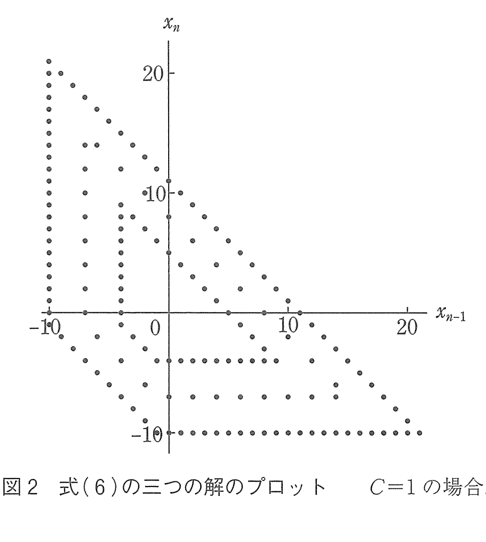


図2　式(6)の三つの解のプロット　$C=1$の場合.

$$X_n: 2, 2, -3, 4, 0, -3, 6, -2, -2, 6, -3, 0, 4, -3, 2, 2, \cdots$$

という数列となり，周期 14 の整数値の周期解となる．更に $X_0=X_1=11$ で周期 43，200/11 で周期 1578，無理数なら非周期である．厳密解は，整数部を答えるガウス記号 $[x]$ で表現でき，有理数の初期値と周期の関係は素因数を通じて与えることができる．つまり，元の四則演算の系(1)にはない組合せ論的な性質が式(6)では登場してくる．

方程式(1)から式(6)のように，式(4)のタイプの変換を利用し，式(5)の極限公式を使うことによって方程式を変換する操作を我々は超離散化と呼ぶ．この用語には，独立変数は離散的だが従属変数が連続的な差分方程式を，整数値で閉じたディジタル系に翻訳することで，あらゆる変数を離散的にしてしまうという意味が込められている．また極限公式(5)は，統計力学において自由エネルギーが低温極限で最低状態のエネルギーを実現するという以下の式と等価であり，物理的にも意味のある操作となっている．

$$F=\lim_{T\to+0}-kT\log\sum_i e^{-E_i/kT}=\min_i E_i$$

3. 箱　玉　系

前章で具体例を用いて差分系と超離散系の関連を述べた．では，微分系はどこに介在しているのであろうか．可積分系の分野では，以下の描像が受け入れられている．

$$\underset{(\text{完全連続})}{\text{微分系}} \xleftarrow{\substack{\text{連続}\\ \text{極限}}} \underset{(\text{半離散})}{\text{差分系}} \xrightarrow{\substack{\text{超離散}\\ \text{極限}}} \underset{(\text{完全離散})}{\text{超離散系}}$$

差分系が全てのソースであり，異なる極限を通じて連続系と超離散系が付随している．最初に超離散化が発見されたソリトン系でこの描像の例を示す．

Korteweg-de Vries（KdV）方程式

$$\boxed{v_t+6uu_x+u_{xxx}=0}$$

↑空間変数 j の連続極限

Lotka-Volterra（LV）方程式

$$\boxed{\frac{du_j}{dt}=u_j(u_{j-1}-u_{j+1})}$$

↑時間変数 n の連続極限

差分 Lotka-Volterra 方程式

$$\boxed{\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1}-u_j^n)=u_j^n u_{j-1}^n-u_j^{n+1}u_{j+1}^{n+1}}$$

↓状態変数 u の超離散極限

超離散 Lotka-Volterra 方程式

$$\boxed{\begin{aligned}U_j^{n+1}-U_j^n=&\max(0, U_{j-1}^n-1)\\&-\max(0, U_{j+1}^{n+1}-1)\end{aligned}}$$

↓変数変換，座標変換

箱玉系

$$\boxed{B_j^{n+1}=\min\left(1-B_j^n, \sum_{k=-\infty}^{j-1}(B_k^n-B_k^{n+1})\right)}$$

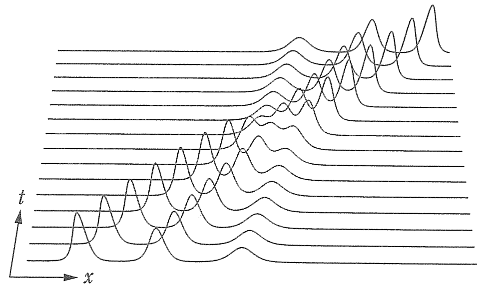
各方程式の離散の度合いについてまとめたものが表1である．

KdV 方程式から順にだんだんと各変数が離散化されていき，超離散 LV 方程式でディジタル化，箱玉系で 2 進ディジタル化が達成される．しかも全ての方程式は極限や変換で結び付き，ソリトン系の特徴である双線形形式，ソリトン解，保存量などあらゆる特徴量が相互に行き来できる．図3で KdV 方程式と箱玉系の 3 ソリトン解の例を示す．

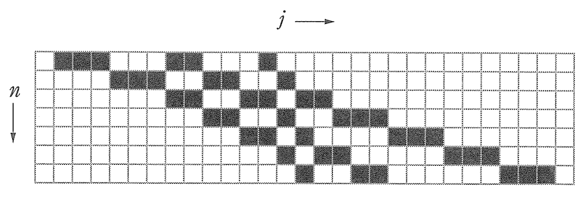
箱玉系は更に，B_j^n を時刻 n での j 番目の箱の中の玉の個数（1 個か 0 個）とみなすと以下の玉の移動ルール

表1　各方程式の離散度合い

変数	KdV	LV	差分 LV	超離散 LV	箱玉系
空間	連続	離散	離散	離散	離散
時間	連続	連続	離散	離散	離散
状態	連続	連続	連続	整数で閉じる	0.1 で閉じる



(a) KdV方程式



(b) 箱玉系（■，□がそれぞれ1, 0を表す）

図3　KdV 方程式と箱玉系の 3 ソリトン解

に解釈できる．（jの正方向を右方向とする．）

左から順に各箱をチェックしていき，玉が入っていれば取り出して右に運び，玉が入っておらず運搬中の玉があれば一つ入れる．全ての箱のチェックが終われば，時刻を1増やして再び左の箱から同じ動作を行う．

KdV方程式は，水深が浅い水路を波高が小さく波長が長い波が伝搬するときの波同士の相互作用を記述する方程式としてよく知られているが，この方程式が厳密な道筋をたどってディジタル化すると，箱玉系という驚くほど単純な2進ディジタル系に帰着するのは興味深い．しかも，そのディジタル化は近似やアナロジーというレベルではなく，保存量やソリトン解まで同時にディジタル化できる．ここまで来ると，連続か離散かというような対立構図はもはや意味を持たず，観察している系の尺度を変えるだけでアナログはディジタルに，ディジタルはアナログになるのだという新しい考え方に到達する．

4. 交通流モデル

最後の例として，一次元衝撃波のモデル方程式となるBurgers方程式

$$u_t+uu_x=ku_{xx}$$

の超離散化を紹介する．数学的仕組みからは，前に述べたように差分系から微分系，超離散系それぞれへの極限という描像が自然であるが，現実には「この微分系をディジタル化すると何が得られるだろうか」，「このディジタル系の背後にどのような微分系があるのだろうか」という問題設定が多く，差分系はその答を解くための隠れた鍵の役割を果たす．そのため職人芸的な離散化の技巧が必要となり，それが超離散研究の醍醐味とも言える．

上のBurgers方程式を超離散化した結果は，

$$U_j^{n+1}=U_j^n+\min(U_{j-1}^n,1-U_j^n)-\min(U_j^n,1-U_{j+1}^n)$$

であり，Uは0，1の2進値で閉じることができる．するとこの時間発展方程式は

$U_{j-1}^n\,U_j^n\,U_{j+1}^n$	111	110	101	100
U_j^{n+1}	1	0	1	1

	011	010	001	000
	1	0	0	0

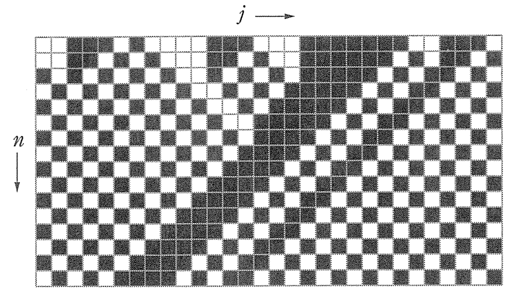


図4　超離散Burgers方程式の解の例　■，□がそれぞれ1，0を表す．jには周期境界条件を設定している．

という2進の時間発展ルール（ルール番号184の初等セルオートマトン）と同値である[5]．この系の解の例を図4に示す．この2進系は，$U_j^n=1,0$を時刻n位置jに車がいる，いないとみなすと，右隣が空いて入れば車が進むという基本的な交通流モデルとなっている．図は渋滞が形成される様子を示しており，車の密度が1/2を境に自由走行相，渋滞相の相転移現象が生じ，統計力学的観点からも興味深いモデルである．

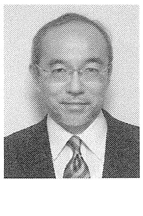
5. お わ り に

以上，解ける非線形系では連続と離散が強固に結び付きながらメカニズムを共有している様子を駆け足であるが紹介した．現在は，このような関係をどれだけ「解けない」非線形系でも通用するかというフェーズに研究が移りつつある．これについては紙数の関係で割愛するが，このようなディジタルとアナログの関係を情報通信などの応用に生かせないか模索中である．

文　　献

（1）　M.J. アブロビッツ，H. シーガー，ソリトンと逆散乱変換，日本評論社，東京，1991.
（2）　広田良吾，直接法によるソリトンの数理，岩波書店，東京，1992.
（3）　辻本　諭，西成活裕，佐々成正，松木平淳太，梶原健司，中村佳正，永井　敦，渡辺芳英，可積分系の応用数理，中村佳正（編），裳華房，東京，2000.
（4）　広田良吾，高橋大輔，差分と超離散，共立出版，東京，2003.
（5）　S. Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media Inc., 2002.

（平成27年5月30日受付）



高橋（たかはし）　大輔（だいすけ）
1985東大大学院修士課程了．工博．東大助手，龍谷大助教授等を経て，現在は早大・理工学術院教授．主に離散可解系の研究に従事．2013日本応用数理学会業績賞受賞．