

電子情報 通信学会誌

THE JOURNAL OF THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

本会のWWWホームページ
<http://www.ieice.org/>

特集 非線形理論とその応用



11

平成27年11月
NOVEMBER
Vol.98 No.11

THE INSTITUTE OF ELECTRONICS, INFORMATION
AND COMMUNICATION ENGINEERS

EIC 一般社団法人
電子情報通信学会

2015-11



98巻11号 平成27年11月

一般社団法人
電子情報通信学会

〒105-0011 東京都港区芝公園3-5-8機械振興会館内
電話 (03) 3433-6691代 FAX (03) 3433-6659
E-mail : office@eice.org 振替口座 : 00120-0-35300

目次

電子情報通信学会誌

会長	小柴正則
次期会長	長佐藤健一
副会長	笹瀬巖亨
	石田進一
	大石隆久
	中沢正彦
総務理事	茨木久夫
	小林岳彦
会計理事	西原基夫
	本島邦明
編集理事	三瓶政一
	伊東匡
企画理事	保田佳之
	山尾泰
調査理事	川村龍太郎
	永妻忠夫
編集長	津田俊隆
企画室長	村上篤道
規格調査会委員長	浅谷耕一
監事	鈴木博孝
	小川恭孝
基礎・境界	
ソサイエティ会長	宮永喜一
次期ソサイエティ会長	植松友彦
NOLTA	
ソサイエティ会長	合原一幸
次期ソサイエティ会長	土居伸二
通信	
ソサイエティ会長	梅比良正弘
次期ソサイエティ会長	村田正幸
エレクトロニクス	
ソサイエティ会長	橋本修
次期ソサイエティ会長	大橋弘美
情報・システム	
ソサイエティ会長	美濃導彦
次期ソサイエティ会長	坂井修一
ヒューマンコミュニケーショングループ	
運営委員長	井原雅行
次期運営委員長	竹内勇剛
北海道支部長	岡崎哲夫
東北支部長	岸本文明
東京支部長	相澤清晴
信越支部長	山崎克之
東海支部長	武田一哉
北陸支部長	鹿間敏弘
関西支部長	森井昌克
中国支部長	秦正治
四国支部長	清水明宏
九州支部長	上原一郎

巻頭言

目次前

論理性を磨くための学会との関わり

編集理事 三瓶政一

追悼抄

1023

平山 博さんを偲んで

富永英義

特集 非線形理論とその応用

945

特集編集にあたって

編集チームリーダー 櫻田英樹

946

1. 総論

NOLTA ソサイエティから次の世代・世界へ

大石進一

948

2. 不規則遷移（カオス）現象の実体安定性について

理論上の方程式から現実の現象としてのカオスへ

上田皖亮

953

3. 完全離散系へ向かう解ける非線形系の理論

非線形微分方程式のデジタル化がもたらすもの、そしてその先にあるものとは？

高橋大輔

957

4. 力学系の位相計算理論の進展

力学系の大域的構造を計算機を使って厳密に求める

國府寛司

961

5. 時・空間パターンの数理解析

数理モデルが生命や自然の不思議を解き明かす

柴 伸一郎

967

6. 精度保証付数値計算と非線形問題の計算機援用証明

「情報ロスのない数値計算」とは何か？ その理論と証明方法を探る

大石進一

972

7. 数理モデリングと非線形理論

複雑に振る舞う実世界を美しく表現。その理論とは？

合原一幸

977

8. 非線形回路の数理

定理をマスターして回路に応用しよう

西 哲生

982

9. 非線形自律系回路のカオス

研究者の興味を引き続ける問題

斎藤利通

その他

平成27年12月号小特集予定目次 966 編集室 1024

複写される方へ 1024 IEICE Global Plaza 1025 会告 1027

広告目次 巻頭言前

987

10. 非線形・感性・科学哲学

——デカルトの近代とそれを超える情報科学・技術の視点——
近代科学技術の隠れた壁を「感性」で打ち破ることができるか？

長島知正

992

11. 通信における非線形性

通信系の機能向上を目指して

香田 徹

997

12. 複雑工学システムの設計手法

現実世界の複雑な問題へのアプローチ

堀尾喜彦

1002

13. 同期をつかさどる非線形性

解析・実験から身近な同期現象をひも解く

池口 徹

1007

14. 非線形を手なずけて

非線形性を利用した新たな機能を生み出す

引原隆士

1012

15. 視覚と錯視の数理における非線形性

脳が生み出す視覚の世界から画像応用まで

新井仁之

1017

16. Nonlinear Connection : How We Created a World-wide Ring of Researchers

世界に広がる非線形研究の輪

Maciej J. OGORZALEK

ニュース解説

1021 遠隔地からのファイルアクセスをソフトウェアだけで高速化するデータ転送高速化技術を開発

トライアル参加者募集中！

会誌のプッシュ型配信サービスのトライアルを開始しています。iPhone, iPad 等をお持ちの場合、簡単に毎月1日に電子配信を受けられます。

右のQRコードまたは下記URLからインストールできます。

iOS 端末のAppStoreから“IEICE”で検索してインストールできます。

<https://itunes.apple.com/jp/app/id957695896>



会誌編集委員会

編集長 津田俊隆
編集理事 三瓶政一・伊東 匡
編集特別幹事 藤芳明生・植松芳彦
山下真司・山内結子

WG・A

主 査 藤芳明生
副 主 査 松本智佳子・深山 篤
委 員 阿部正英・打矢隆弘
加藤 豪・佐藤正知
下ノ村和弘・辻川剛範
土田 勝・野村英之
半田拓也・日高昇平
間邊哲也・茂呂征一郎
山本真基

WG・B

主 査 植松芳彦
副 主 査 松浦基晴・堀田茂雄
委 員 栗野穰太・飯草恭一
伊藤嘉浩・衣斐信介
今田美幸・小川裕之
小泉健吾・高瀬誠由
瀧川道生・中川健治
中川孝之・流田理一郎
潘 珍妮・札幌伸和
山田 暁・吉田裕志
山中直明

WG・C

主 査 山下真司
副 主 査 巽 泰三・松嶋 功
委 員 弥政和宏・齊藤晋聖
齊藤三長・全 伸幸
高橋真吾・武田正典
乃万裕一・平野拓一
堀田昌志・山梨裕希
吉松俊英・渡辺正裕
大山貴晴

WG・D

主 査 山内結子
副 主 査 大隈隆史・佐藤雄隆
委 員 天野浩文・石川真澄
井口 寧・今泉一哉
江村 暁・加藤恒夫
小林彰夫・小町 守
諏訪美佐子・高野光司
竹島秀則・古木一朗
待井君吉・水野 洋
林 敏浩

ニュース委員会

委 員 長 津田俊隆
幹 事 山下真司・植松芳彦
委 員 赤峰幸徳・川上憲司
河島 整・川村卓也
笹岡英資・高橋 洋
滝沢賢一・田中俊樹
中戸川剛・西海聡子
長谷川英明・丸谷和史
山野 悟・横出智貴
藤野貴之

会誌に対する御意見をお寄せ下さい。
<http://www.ieice.org/jpn/books/kaishiiken.html>

完全離散系へ向かう解ける非線形系の理論

Theory on Solvable Nonlinear Systems Going to Completely Discrete Systems

高橋大輔



解ける非線形系の理論は可積分系を中心に発展してきた。当初は微分系を中心に研究が盛んであったが、理論が整備されていくにつれ厳密解・保存量などの表現に関する代数的な側面が次第に重要性を増していく。そして、差分方程式で記述される系の研究が隆盛を迎える。ところが更に超離散化と呼ばれる状態変数の離散化手法が発見され、完全離散系すなわちデジタル系の研究に到達する。本稿では具体例に基づいて超離散化の解説を行い、この手法が提示する連続と離散の新しい関係について述べる。

キーワード：超離散，ソリトン，箱玉系，差分方程式，セルオートマトン

1. はじめに

非線形系が解けるという表現は人によって受け止め方が異なるが、ここでは簡単に、解が初等関数や特殊関数で明示的に与えられるような場合のこととする。このような解ける非線形系は、ソリトン系あるいはより広く可積分系と呼ばれる系で数多く発見され、その数理論の理論研究が盛んに行われている。

ソリトン理論は1960～70年頃に最初のブレイクを迎え、当初はKorteweg-de Vries方程式やsine-Gordon方程式を代表格とする非線形偏微分方程式が主な対象であった^{(1),(2)}。そして N ソリトン解、可算無限個の保存量、Bäcklund変換、逆散乱法など、ソリトン系特有の性質がいろいろな方程式で共有され、方程式同士でヒエラルキーを作っていることが解明された。更に1980年前後における統一理論の登場により、ほぼ全てのソリトン系が同じルーツを持っていることが判明し、ソリトン系理論は一つの頂点を迎える。

その一方で、空間座標や時間を離散化した差分ソリトン系の研究が1970年代から登場し、微分系の研究に並行しながら深化し、微分ソリトン系と同じルーツを持つ

た別の顔であることが次第に明らかになる。そして研究の中心は次第に微分系から差分系にシフトしていくようになる⁽³⁾。厳密解をはじめ様々な特徴量が明示的に数式で記述され、変換や極限などの記号処理的演算が中心の理論であるがゆえに、その代数的側面が重要になるのは自然の流れであり、系の根源的メカニズムをより直接的に内包するのは連続系よりも離散系である。

そして1990年代に超離散化が登場する^{(3),(4)}。これによって空間、時間などの独立変数だけでなく、状態値を表す従属変数までも離散化が可能となり、ソリトン系に完全離散な、すなわち、デジタルな系が存在していることが明らかとなった。ところが、それらもまた微分系、差分系と同じルーツを持っており、系のメカニズムは「連続も離散も同じ」であることが帰結された。連続と離散のこのような関係は全く新しい視点を、特にデジタル系に投げ掛ける。本稿では、超離散化が与えるこのような物の見え方について、具体例を通じて紹介する。

2. 可積分写像の超離散化

例えば次の離散写像(3項間漸化式)は、可積分なQuispel-Roberts-Thompson (QRT) 系の特別な場合となっている。

高橋大輔 早稲田大学基幹理工学部応用数理学科
E-mail daisuket@waseda.jp
Daisuke TAKAHASHI, Nonmember (School of Fundamental Science and Engineering, Waseda University, Tokyo, 169-8555 Japan).
電子情報通信学会誌 Vol.98 No.11 pp.953-956 2015年11月
©電子情報通信学会 2015

$$x_{n+1} = \frac{1 + cx_n}{x_{n-1}x_n^2} \quad (1)$$

この系には保存量

$$h(x_{n-1}, x_n) = \frac{1}{x_{n-1}x_n} + \frac{c}{x_{n-1}} + \frac{c}{x_n} + x_{n-1}x_n \quad (2)$$

が存在し、初期値 (例えば x_0, x_1) を定めれば $h(x_{n-1}, x_n)$ が初期値によらない定数となることを容易に示せる。また一般解は Jacobi のだ円関数 sn を用いて

$$x_n = A + B \text{sn}^2(Cn + D) \quad (3)$$

の形で与えることができる。ある初期値からの解を相平面にプロットしたものが図 1 である。解の点は $h(x_{n-1}, x_n) = \text{定数}$ の曲線上に乗っている。

次にこの解の「極端な場合」を考えてみよう。今、方程式の変数や定数にパラメータ ε を含む以下の変換を施す。

$$x_n = e^{X_n/\varepsilon}, \quad c = e^{C/\varepsilon} \quad (4)$$

この変換により式(1)は

$$X_{n+1} = \varepsilon \log(1 + e^{X_n + C}) - X_{n-1} - 2X_n$$

と書き換えられるが、この段階ではグラフを \log プロットするようなもので、解の本質は何も変わっていない。ところが $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を取ると、公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B) \quad (5)$$

より、更に

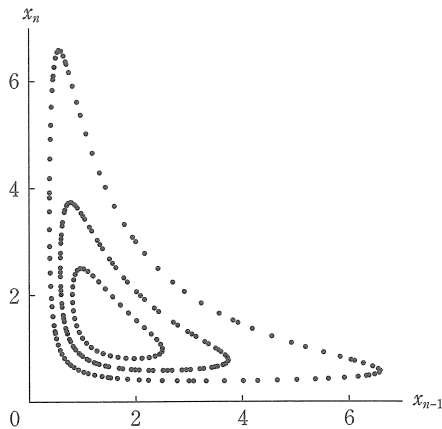


図 1 QRT 系(1)の三つの解の例 $c=2$ で最初の 100 点をプロットしている。

$$X_{n+1} = \max(0, X_n + C) - X_{n-1} - 2X_n \quad (6)$$

となる。この方程式の解を相平面にプロットしたものが図 2 である。式(6)は式(1)とは随分異なる写像であり、解の軌道も多角形状になった。しかしながら、 ε が有限なら式(1)そのものであり、 ε が十分小さいと式(6)に近い解の振舞いになる。ということは、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を取り終わった瞬間に得られる式(6)は、元の式(1)の性質を何らかの形で反映しているはずである。

差分方程式の連続極限では、極限で得られる微分方程式の解を差分方程式が近似していることが多い。しかしながら、図 1, 2 の解を比較すれば明らかであるが、近似はとても望めそうにない。ところが、式(2)の保存量に対して同様に

$$h(x_{n-1}, x_n) = e^{H(X_{n-1}, X_n)/\varepsilon}$$

と変換し、 $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限を取ると、

$$H(X_{n-1}, X_n) = \max(-X_{n-1} - X_n, C - X_{n-1}, C - X_n, X_{n-1} + X_n)$$

となり、相平面で H の等高線を描くと解軌道と一致する、つまり、 H は式(6)の保存量となっているのである。更に計算はハードであるが、だ円関数解 (式(3)) から上記の変換を通じて式(6)の解を導出することもできる。用いたものは変換と極限だけであるので、四則演算で構成された元の系及び付随する特徴量をごっそり \max の世界に翻訳できるのである。

更に、式(6)にはうれしいおまけが付いている。もし初期値とパラメータ C が整数ならば、 X_n の値は常に整数で閉じる。例えば $C=1$ の場合に $X_0 = X_1 = 2$ とすると、 X_n は

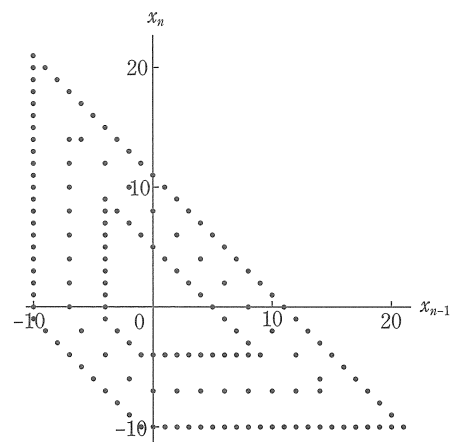


図 2 式(6)の三つの解のプロット $C=1$ の場合。

$$X_n : 2, 2, -3, 4, 0, -3, 6, -2, -2, \\ 6, -3, 0, 4, -3, 2, 2, \dots$$

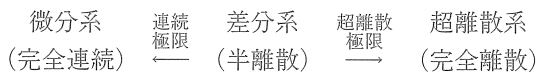
という数列となり、周期 14 の整数値の周期解となる。更に $X_0 = X_1 = 11$ で周期 43, 200/11 で周期 1578, 無理数なら非周期である。厳密解は、整数部を答えるガウス記号 $[x]$ で表現でき、有理数の初期値と周期の関係は素因数を通じて与えることができる。つまり、元の四則演算の系(1)にはない組合せ論的な性質が式(6)では登場してくる。

方程式(1)から式(6)のように、式(4)のタイプの変換を利用し、式(5)の極限公式を使うことによって方程式を変換する操作を我々は超離散化と呼ぶ。この用語には、独立変数は離散的だが従属変数が連続的な差分方程式を、整数値で閉じたデジタル系に翻訳することで、あらゆる変数を離散的にしようという意味が込められている。また極限公式(5)は、統計力学において自由エネルギーが低温極限で最低状態のエネルギーを実現するという以下の式と等価であり、物理的にも意味のある操作となっている。

$$F = \lim_{T \rightarrow +0} -kT \log \sum_i e^{-E_i/kT} = \min_i E_i$$

3. 箱 玉 系

前章で具体例を用いて差分系と超離散系の関連を述べた。では、微分系はどこに介在しているのだろうか。可積分系の分野では、以下の描像が受け入れられている。



差分系が全てのソースであり、異なる極限を通じて連続系と超離散系が付随している。最初に超離散化が発見されたソリトン系でこの描像の例を示す。

Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$v_t + 6uv_x + u_{xxx} = 0$$

↑ 空間変数 j の連続極限

Lotka-Volterra (LV) 方程式

$$\frac{du_j}{dt} = u_j(u_{j-1} - u_{j+1})$$

↑ 時間変数 n の連続極限

差分 Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{1}{\delta} (u_j^{n+1} - u_j^n) = u_j^n u_{j-1}^n - u_j^{n+1} u_{j+1}^{n+1}$$

↓ 状態変数 u の超離散極限
超離散 Lotka-Volterra 方程式

$$U_j^{n+1} - U_j^n = \max(0, U_{j-1}^n - 1) \\ - \max(0, U_{j+1}^{n+1} - 1)$$

↓ 変数変換, 座標変換

箱玉系

$$B_j^{n+1} = \min\left(1 - B_j^n, \sum_{k=-\infty}^{j-1} (B_k^n - B_k^{n+1})\right)$$

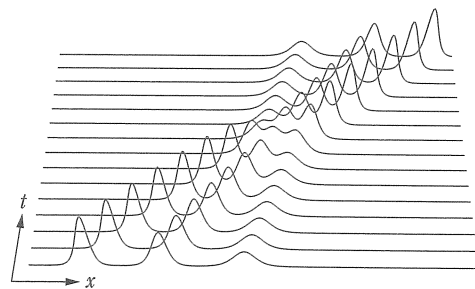
各方程式の離散の度合いについてまとめたものが表1である。

KdV 方程式から順にだんだんと各変数が離散化されていき、超離散 LV 方程式でデジタル化、箱玉系で 2 進デジタル化が達成される。しかも全ての方程式は極限や変換で結び付き、ソリトン系の特徴である双線形式、ソリトン解、保存量などあらゆる特徴量が相互に行き来できる。図3で KdV 方程式と箱玉系の 3 ソリトン解の例を示す。

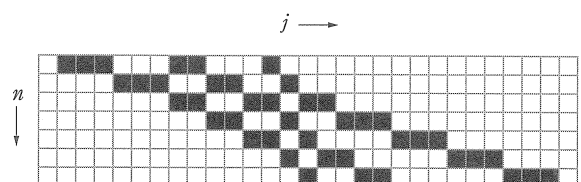
箱玉系は更に、 B_j^n を時刻 n での j 番目の箱の中の玉の個数 (1 個か 0 個) とみなすと以下の玉の移動ルール

表1 各方程式の離散度合い

変数	KdV	LV	差分 LV	超離散 LV	箱玉系
空間	連続	離散	離散	離散	離散
時間	連続	連続	離散	離散	離散
状態	連続	連続	連続	整数で閉じる	0.1 で閉じる



(a) KdV方程式



(b) 箱玉系 (■, □がそれぞれ1, 0を表す)

図3 KdV 方程式と箱玉系の 3 ソリトン解

に解釈できる。(jの正方向を右方向とする.)

左から順に各箱をチェックしていき、玉が入っていれば取り出して右に運び、玉が入っておらず運搬中の玉があれば一つ入れる。全ての箱のチェックが終われば、時刻を1増やして再び左の箱から同じ動作を行う。

KdV 方程式は、水深が浅い水路を波高が小さく波長が長い波が伝搬するときの波同士の相互作用を記述する方程式としてよく知られているが、この方程式が厳密な道筋をたどってデジタル化すると、箱玉系という驚くほど単純な2進デジタル系に帰着するのは興味深い。しかも、そのデジタル化は近似やアナロジーというレベルではなく、保存量やソリトン解まで同時にデジタル化できる。ここまで来ると、連続か離散かというような対立構図はもはや意味を持たず、観察している系の尺度を変えるだけでアナログはデジタルに、デジタルはアナログになるのだという新しい考え方に到達する。

4. 交通流モデル

最後の例として、一次元衝撃波のモデル方程式となる Burgers 方程式

$$u_t + uu_x = ku_{xx}$$

の超離散化を紹介する。数学的仕組みからは、前に述べたように差分系から微分系、超離散系それぞれへの極限という描像が自然であるが、現実には「この微分系をデジタル化すると何が得られるだろうか」、「このデジタル系の背後にどのような微分系があるのだろうか」という問題設定が多く、差分系はその答を解くための隠れた鍵の役割を果たす。そのため職人芸的な離散化の技巧が必要となり、それが超離散研究の醍醐味とも言える。

上の Burgers 方程式を超離散化した結果は、

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n)$$

であり、 U は0, 1の2進値で閉じることができる。するとこの時間発展方程式は

$U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$	111	110	101	100
U_j^{n+1}	1	0	1	1
	011	010	001	000
	1	0	0	0

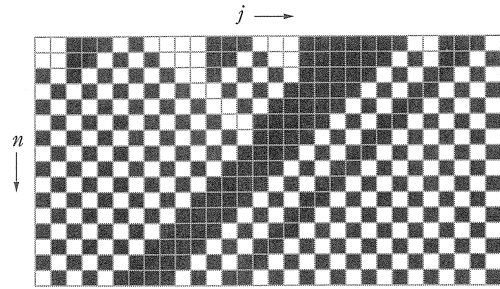


図4 超離散 Burgers 方程式の解の例 ■, □がそれぞれ1, 0を表す. j には周期境界条件を設定している.

という2進の時間発展ルール(ルール番号184の初等セルオートマトン)と同値である⁽⁵⁾. この系の解の例を図4に示す. この2進系は、 $U_j^n=1, 0$ を時刻 n 位置 j に車がいる、いないとみなすと、右隣が空いて入れば車が進むという基本的な交通流モデルとなっている. 図は渋滞が形成される様子を示しており、車の密度が1/2を境に自由走行相、渋滞相の相転移現象が生じ、統計力学的観点からも興味深いモデルである.

5. おわりに

以上、解ける非線形系では連続と離散が強固に結びつきながらメカニズムを共有している様子を駆け足であるが紹介した. 現在は、このような関係をどれだけ「解けない」非線形系でも通用するかというフェーズに研究が移りつつある. これについては紙数の関係で割愛するが、このようなデジタルとアナログの関係を情報通信などの応用に生かせないか模索中である.

文 献

- (1) M.J. アプロビッツ, H. シーガー, ソリトンと逆散乱変換, 日本評論社, 東京, 1991.
- (2) 広田良吾, 直接法によるソリトンの数理解, 岩波書店, 東京, 1992.
- (3) 辻本 論, 西成活裕, 佐々成正, 松木平淳太, 梶原健司, 中村佳正, 永井 敦, 渡辺芳英, 可積分系の応用数理解, 中村佳正(編), 裳華房, 東京, 2000.
- (4) 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 東京, 2003.
- (5) S. Wolfram, A New Kind of Science, Wolfram Media Inc., 2002.

(平成27年5月30日受付)



たかはし だいすけ
高橋 大輔

1985 東大大学院修士課程了. 工博. 東大助手, 龍谷大助教授等を経て, 現在は早大・理工学術院教授. 主に離散可解系の研究に従事. 2013 日本応用数理学会業績賞受賞.