パターン生成 CA の方程式による解析

早稲田大学基幹理工学研究科数学応用数理専攻　新田真奈美，高橋大輔

セルオートマトン(CA)には，特徴的なパターンを示す解を持つものが数多く存在している．今回の研究では 2 次元 CA が生成する縞状の解に注目し，その生成メカニズムを方程式の解の立場から解析し，更にパターンを持つような方程式の探索を行なった．

今回の研究では 2 次元格子上の縞状のパターンに着目し，十字型の近傍を持つ時間 1 階空間 2 次元の束方程式$u_C^{n+1}=f(u_C^n,u_W^n,u_E^n,u_S^n,u_N^n)$ についてパターン生成のメカニズムを解析した．解析には曲線群の考え方を利用し，2 次元の束方程式を 1 次元の束方程式にリダクションするという手法を用いた．

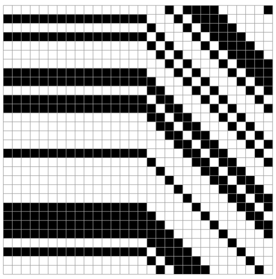

図 1　2 次元格子上の縞パターンの例

2 種類の基本的なパターンおよびそれらを接続したパターン 4 種類についてリダクションを行うと，接続したパターンにおいて，近傍の配置によりいくつかの領域が存在しそれらが異なる式にリダクションされる場合があることがわかった．よって接続されたパターンが存在するためには，パターン上の全ての領域で等価な式にリダクションされる必要がることがわかった．そこで各パターンが存在するために元の方程式に必要となる条件を導いた．

はじめに解析対象として時間 1 階空間 2 次元の束方程式を解析した．まず，方程式に回転・鏡映の対称性を仮定し, 34 種類の方程式を取り上げた．そして，それぞれに対して， 前述したパターンの無矛盾条件を調べることにより, その存在・非存在を判定した．また存在が確認されたパターンについて，ブール束上でどのような挙動を持つかを分析したところ解析した 34 種類の方程式には定値解や定在波は見つかったが，進行波は見つからなかった．そこで，進行波をパターン上で持つ方程式の候補として，時間 2 階の項としてu_C^{n-1}を加えた時間 2 階空間 2 次元の束方程式$u_C^{n+1}=h(u_C^{n-1},u_C^n,u_W^n,u_E^n,u_S^n,u_N^n)$を新たな解析対象とした．時間 1 階の 34 種類の方程式を時間 2 階に拡張し解析したところ，時間 1 階には存在しなかった進行波の存在を確認することが出来た．

また，これまでの結果の拡張として，非対称な方程式や，より複雑なパターンの存在条件についても考察を行った．

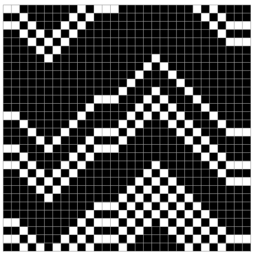

図 2　複雑なパターンの例

非対称な方程式では対称な方程式と比べて接続パターンの無矛盾条件の詳細が変化することが確認され, 3 つ以上の基本パターンの組み合わせからなる複合パターンでは無矛盾条件はより複雑になり， 元の方程式に課される条件が多くなることがわかった．特にパターンの境界領域が交差する場合には新たな近傍配置が出現することもあり，条件が非常に厳しくなることがわかった．

更にこれまでに得られた結果を用いて逆に空間 1 次元の束方程式から空間 2 次元のパターンを生成する手法についても一般化を行い，任意の ECA について曲線番号と近傍の対応表を用いることで特定のパターンを生成することが出来た．

今後の課題として，今回の研究で方程式に課した制限を取り払うことで、より多くのパターンを再現できる方程式を探索すること，また十字形以外の近傍や今回は取り上げなかった曲線配置についても研究の対象とすることが挙げられる．