フォーラム

共生する連続と離散

高橋 大輔

1 連続と離散

現象を数理モデルで記述するとき，それを連続の数量で表現するか，離散の数量で表現するかは，モデル化の最初の段階で考慮する，あるいは，考慮の余地なく選択する事柄であろう．また，平均場近似を用いて離散現象を連続の微分方程式で記述したり，逆に微分方程式を解くために離散の差分法や有限要素法を用いるということもある．そもそも，実体が純粋に連続であったり離散であったりすることはなく，その数学的記述において便利な連続体や離散集合を用いているにすぎない．しかしながら，連続と離散の数学はときに大きく様相が異なり，特にセルオートマトンのような完全デジタル表現における数学は，微分や差分の方程式で用いられる解析学的な数学とは道具立てが全く違っているといってもよい[1].

しかし，アナログであろうとデジタルであろうと音楽や映像に同じ美しさを感じるように，連続と離散の数理モデルの間には，類似や近似だけではない太いつながりがあるのではないだろうか．特に完全連続と完全離散の数理モデルにおける数学の関係はどうなっているのであろうか．この問いかけに対するひとつの答が，ソリトン系における超離散化手法の発見に端を発する一連の研究によってもたらされた．そこでは，微分・差分・超離散・セルオートマトンという異なる離散レベルの方程式が極限等を通じてストレートにつながっている．そして，連続と離散が実は同じ法則を体現しているというような普遍性が存在することも明らかにされた．拙稿ではこれらのことについて例を挙げながら紹介しよう．

たかはし だいすけ．早稲田大学理工学術院.

2 Burgers 方程式における構造の保存

連続と離散の対応をきれいに提示できる例として Burgers 方程式を取り上げよう[2]．まず，非線形の Burgers 方程式は以下のように Cole-Hopf 変換を通じて線形の拡散方程式に帰着するという性質を持っている．

$$\begin{cases} v_t = 2vv_x + v_{xx} \\ \quad\updownarrow \quad v = (\log f)_x \\ f_t = f_{xx} \end{cases} \tag{1}$$

この性質を壊さずに系を差分化すると，以下の差分 Burgers 方程式，差分 Cole-Hopf 変換，差分拡散方程式が得られる．

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = u_j^n \dfrac{u_{j+1}^n + 1/u_j^n}{u_j^n + 1/u_{j-1}^n} \\ \quad\updownarrow \quad u_j^n = f_j^n / f_{j-1}^n \\ f_j^{n+1} = (f_{j+1}^n + f_{j-1}^n)/2 \end{cases} \tag{2}$$

連続極限

$$u_j^n = \frac{1}{\Delta x} \log v\Big(j\Delta x,\, n\frac{\Delta x^2}{2}\Big), \qquad \Delta x \to 0$$

を考えると (2) から (1) を得ることができ，(2) が (1) の差分近似になっていることがわかる．さらに，パラメータ ε を含む以下の変数変換を考える．

$$u_j^n = e^{(U_j^n - 1/2)/\varepsilon}, \qquad f_j^n = e^{F_j^n/\varepsilon}$$

これらを (2) に代入し，さらに $\varepsilon \to +0$ の極限をと

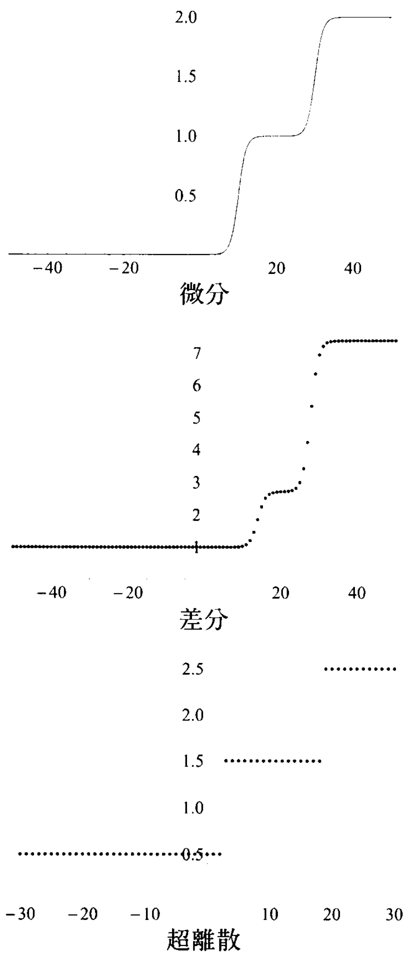


図1　二段衝撃波解

る．この際に極限公式

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log\left(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon}\right)=\max(A,B)\quad(3)$$

を用い，max, min に関する公式

$$\max(A,B)=-\min(-A,-B),$$
$$\max(A,B)+C=\max(A+C,B+C)$$

などを考慮すると，(2)から以下が得られる．

$$\left\{\begin{aligned}&U_j^{n+1}=U_j^n+\min(U_{j-1}^n,1-U_j^n)\\&\qquad\quad-\min(U_j^n,1-U_{j+1}^n)\\&\quad\updownarrow\qquad U_j^n=F_j^n-F_{j-1}^n+1/2\\&F_j^{n+1}=\max(F_{j+1}^n,F_{j-1}^n)\end{aligned}\right.\quad(4)$$

もし U や F の初期値が整数であるならば，上の時間発展方程式により任意の時刻の値も整数となる．このように，差分方程式から極限(3)を利用して(4)のような区分線形型の方程式を導き，従属変数の離散化を自然に行う手続きのことを我々

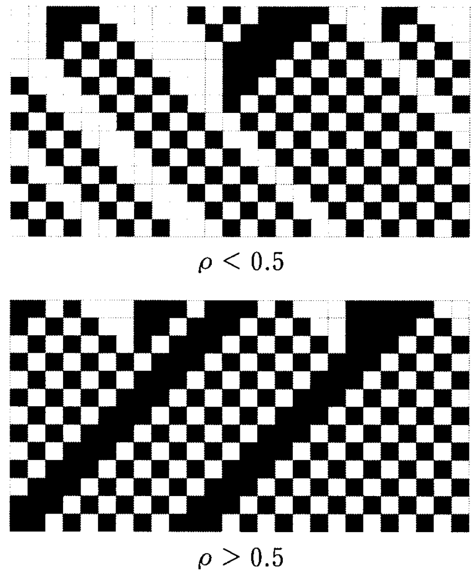


図2　ルール番号184の初等セルオートマトン
右方向，下方向がそれぞれ j, n の正の向き

は『超離散化』と呼んでいる．

差分方程式に対して連続極限や超離散化の極限をとると，微分方程式や超離散方程式に化ける．しかしながら極限をとる一歩手前までは差分方程式であることには変わりがない．ということは，微分，差分，超離散で方程式が持つ性質や法則が激変するとは考えにくい．上の例では，どの系も線形化可能であるので厳密解は容易に導け，それら同士にも方程式と同じ対応が存在する．次式で与えられる微分，差分，超離散 Burgers 方程式の二段衝撃波解のプロットを**図1**に示す．

$$f(x,t)=1+e^{k_1x+k_1^2t+c_1}+e^{k_2x+k_2^2t+c_2},$$
$$f_j^n=1+e^{k_1j+\log(\cosh k_1)n+c_1}$$
$$\qquad+e^{k_2j+\log(\cosh k_2)n+c_2},$$
$$F_j^n=\max(0,K_1j+|K_1|n+C_1,$$
$$\qquad K_2j+|K_2|n+C_2)$$

ただし，微分，差分の解は時間が経つと二段の衝撃波が一段に融合するが，超離散の解はそうならないという点が極限によって欠落した性質である．

さらに(4)の U の方程式は，U の初期値を 0, 1 の値に限定すると任意の時刻で 0 か 1 の値しかとらない．以下にそのときのルール表を示す．上段が $U_{j-1}^n, U_j^n, U_{j+1}^n$ の 0, 1 の組み合わせ，下段がそれに対応する U_j^{n+1} の値である．

111	110	101	100	011	010	001	000
1	0	1	1	1	0	0	0

この表はルール番号184の初等セルオートマトンのルールと一致する[1]．すなわち，Burgers 方程式はデジタル化するとセルオートマトンに化ける．このCAの解の挙動も興味深く，1の密度が0.5を境にして，漸近挙動に相転移現象が起こる(**図2**)．これを自然渋滞の発生メカニズムと結びつける研究もある．この相転移現象は，(4)のFの式を利用して方程式の初期値問題の観点から容易に説明できる．

3 共生する連続と離散

前節でBurgers方程式を例に挙げて，我々の離散化過程を説明した．この過程を一般化すると以下のような図式となる．このとき，方程式の間をつなぐ道筋はすべて変数変換と極限によって得られる．

微分方程式
↑ 独立変数の連続極限
差分方程式
↓ 従属変数の超離散極限
超離散方程式
↓ 従属変数の特殊化
セルオートマトン

超離散化の過程において$e^{X/\varepsilon}$型の変数変換と$\varepsilon\to+0$の極限を行うことで，極限の前後の基本演算には以下のような対応がある．

$$z=x+y \quad\longleftrightarrow\quad Z=\max(X,Y)$$
$$z=x-y \quad\longleftrightarrow\quad Z=(\text{not well-defined})$$
$$z=x\times y \quad\longleftrightarrow\quad Z=X+Y$$
$$z=x/y \quad\longleftrightarrow\quad Z=X-Y$$

すなわち，超離散方程式は和がmax，積が＋，商が－の代数系の上で成り立つ方程式ともみなせ，この代数系は慣用としてmax-plus代数と呼ばれている．しかしながら，$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{X/\varepsilon}-e^{Y/\varepsilon})$が$X=Y$や$X<Y$の場合にうまく表せないことより，残念なことに差に関してはnot well-definedとなる．したがって差分方程式が通常の実数演算の＋，×，/だけで構成されていないと超離散化が行えない．このことは『負の問題』と呼ばれている．しかしながら，差分方程式を作る段階で$1-x$を$1/(1+x)$に置き換えるなどの工夫によって解決する場合も多い．

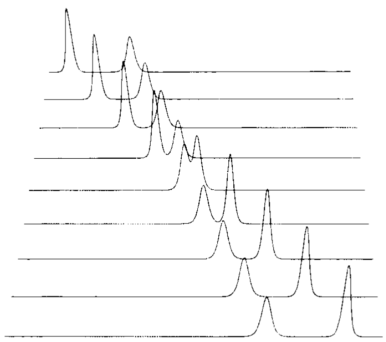
では，他の例をいくつか紹介しよう．まず，超離散化が最初に発見されたソリトン分野では，解や保存量などについて代数的構造を壊さない差分化が以前から知られており，超離散化との親和性も非常に高い．たとえば多ソリトン解を有するKorteweg-de Vries方程式では

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0,$$
$$\frac{1}{\delta}(u_j^{n+1}-u_j^n)=u_j^n u_{j-1}^n-u_j^{n+1}u_{j+1}^{n+1},$$
$$B_j^{n+1}=\min\left(1-B_j^n,\ \sum_{k=-\infty}^{j-1}(B_k^n-B_k^{n+1})\right)$$

と微分，差分，超離散の対応がついている[2][3]．微分と超離散の2ソリトン解を**図3**に示す．

可積分系以外でも応用例の収集が精力的に行われている．たとえば最適速度モデルと呼ばれる交通渋滞の方程式は負の問題を克服した例のひとつである[4]．

$$\ddot{x}_k=A\{V(x_{k+1}-x_k)-\dot{x}_k\},$$
$$x_k^{n+1}-2x_k^n+x_k^{n-1}$$


微分

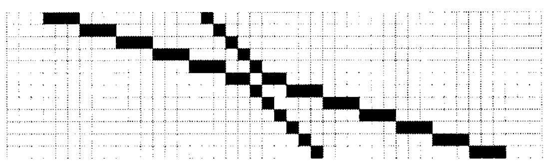

超離散

図3 2ソリトン解

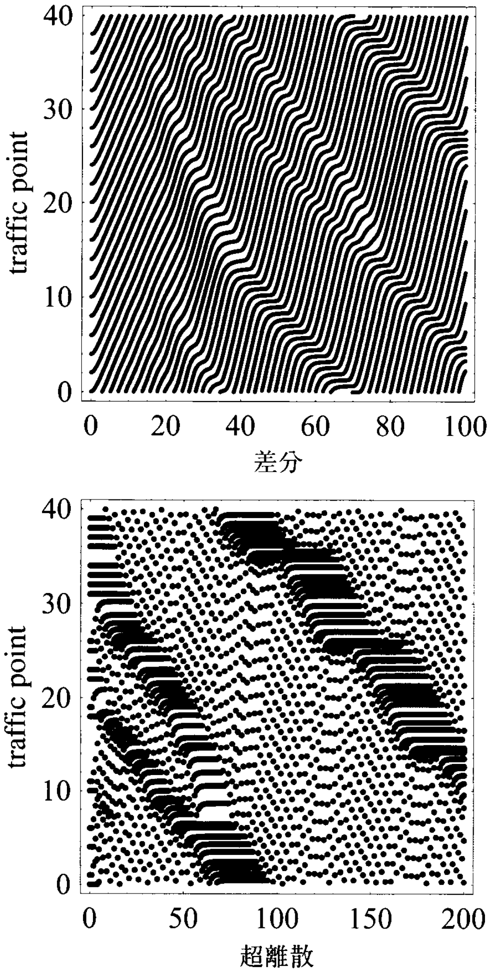


図4 最適速度モデル

$$
\begin{aligned}
&= A\{\log(1+\delta^2 V(x_{k+1}^n - x_k^n)) \\
&\quad -\log(1+\delta(e^{x_k^n - x_k^{n-1}}-1))\}, \\
&x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} \\
&= A\{V(x_{k+1}^n - x_k^n) - \max(0, x_k^n - x_k^{n-1})\}
\end{aligned}
$$

上式を用いた交通渋滞形成の様子を差分と超離散のそれぞれで**図4**に示す．

可積分と対極にあるカオスの分野でも可解カオスの超離散化に成功した[5]．以下はSchröderが提出した写像に関する超離散化である．

$$
z_{n+1} = \frac{4z_n(1-z_n)(1-k^2 z_n)}{(1-k^2 z_n^2)^2},
$$

$$
X_{n+1} = 1-2\left|X_n - \frac{1}{2}\right|
$$

可解カオスであるので解も超離散化によって対応がつく．

$$
z_n = \mathrm{sn}^2(2^n u_0, k),
$$

$$
X_n = 1-2\left|\{2^n \nu_0\} - \frac{1}{2}\right|
$$

記号$\{x\}$はxの小数部分をとる演算であり，Jacobiの楕円関数$\mathrm{sn}\,x$が$\{x\}$に置きかわっている点は興味深い．自然数Mに対してxが整数のとき$M\{x/M\}$はxをMで割った余りであり，連続と離散のそれぞれで当然出てくるべき代表的な周期関数が登場している．

4 おわりに

以上，駆け足で連続と離散の『共生関係』について紹介した．興味深い成果や現在進行中の研究もまだまだあるが，紙数の都合上割愛する．しかしながら，真の共生とは，連続でもあり離散でもあるというような，量子力学における波動性と粒子性のような関係を指すのが本来であろう．そのような連続と離散の共生が実現すれば，革新的な数理モデルが作れるのではないかと思う．

参考文献

[1] Wolfram, S., A New Kind of Science, Wolfram Media Inc., 2002.

[2] 広田良吾，高橋大輔，差分と超離散，共立出版，2003.

[3] 時弘哲治，開かれた数学3 箱玉系の数理，朝倉書店，2010.

[4] Takahashi, D. and Matsukidaira, J., On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives, JSIAM Letters, 1(2009) 1-4.

[5] Kajiwara, K., Nobe, A. and Tsuda, T., Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps, J. Phys. A: Math. Theor., 41(2008), 395202(13 pages).