連続と離散のはざまにて

高橋　大輔　(早稲田大学)*

1. はじめに

ソリトン理論の現在までの進展は，離散化の歩みとともにあった．Korteweg-de Vries (KdV) 方程式

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

を代表とする一群の偏微分ソリトン方程式は，1960年代に逆散乱法やLax形式によって体系づけられるが，この頃にすでに戸田方程式

$$\ddot{u}_j = e^{u_{j+1}} - 2e^{u_j} + e^{u_{j-1}}$$

という微差分ソリトン方程式が発見されている [1]．さらに，1970年代以降は差分戸田方程式

$$\begin{aligned} &u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} \\ &\qquad = \log(1+\delta^2(e^{u_{j+1}^n}-1)) - 2\log(1+\delta^2(e^{u_j^n}-1)) + \log(1+\delta^2(e^{u_{j-1}^n}-1)) \end{aligned}$$

など，それまでの微分，微差分ソリトン方程式の完全差分版が次々と報告される．そして1990年代に従属変数（状態変数）まで離散化された超離散ソリトン方程式が登場する．たとえば上の戸田方程式の超離散版は

$$u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1} = \max(0, u_{j+1}^n - 1) - 2\max(0, u_j^n - 1) + \max(0, u_{j-1}^n - 1)$$

である [2]．

現在のソリトン理論においては，対象となる方程式が連続か離散かということよりも，解や保存量がどのようなメカニズムに支配されているかが大事であり，その連続あるいは離散的実現が微分，差分，超離散方程式であるにすぎない．

本講演ではこのようなソリトン方程式に則した事情を詳しく解説しないが，重要な点は，方程式による連続，離散的実現で，同じメカニズムを表現しているものがあったという事実である．このようなことはもっと普遍的なのではないだろうか．そこで講演では，差分化や超離散化を通じて系が同じメカニズムを共有している例をいろいろ紹介する．

ただし，そのようなことを議論する際に問題となるのは，何をもって同じメカニズムと考えるかという点である．ここでは，解，保存量，線形性など，方程式が持っている特徴を共有し，極限あるいは基本演算の置き換えを通じて方程式とその特徴がセットで行き来可能な連続，離散方程式の対応を想定する．そして，このような特徴の一般的な呼び名として「構造」という言葉を用いることにする．

2. 超離散化

方程式を記述する変数は，独立変数と従属変数がある．方程式を考える際には，たいていの場合それぞれの変数が連続値を取るのか離散値を取るのかが定まっていること

* 〒187-0022 東京都新宿区大久保3-4-1 早稲田大学 理工学術院

がほとんどである．微分，差分，超離散方程式について，各変数の典型的な離散度合いを表にしたものを以下に示す．これら以外にも連立常微分方程式やセルオートマトンなど，いろいろなタイプの方程式が存在するがそれらについては省略する．

	微分方程式	差分方程式	超離散方程式
独立変数	連続	離散（一部連続）	離散
従属変数	連続	連続	離散（連続）

超離散化について簡単に説明する [3]．まず，方程式の変数や定数に対して $x = e^{X/\varepsilon}$ 型の変数変換を施し，$\varepsilon \to +0$ 型の極限を取って得られる極限方程式のことを超離散方程式と呼び，その手続き全体を超離散化と呼ぶ．たとえば

$$x_{j+1} = \frac{1 + cx_j}{x_j^2}$$

という差分方程式（漸化式）を考える．x, c は非負の実数とする．これに

$$x_j = e^{X_j/\varepsilon}, \qquad c = e^{C/\varepsilon}$$

という変換を行うと

$$X_{j+1} = \varepsilon \log(1 + e^{(X_j+C)/\varepsilon}) - 2X_j$$

という方程式が得られる．さらに $\varepsilon \to +0$ の極限をほどこすと

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, B)$$

という公式より

$$X_{j+1} = \max(0, X_j + C) - 2X_j$$

という区分線形型の超離散方程式が得られる．X や C は実数とみなしても構わないが，もし X の初期値および C が整数なら，任意の X_j は整数となる．整数で閉じた解にとりわけ意味がある場合，上の手続きをもって従属変数の離散化が可能となったとみなすのが超離散化の考え方である．

$z = x + y$, $z = x - y$, $z = x \cdot y$, $z = x/y$ のそれぞれに対して $x = e^{X/\varepsilon}$ 型の変換と $\varepsilon \to +0$ の極限をほどこすと以下のようになる．

$$\begin{array}{llllll} z = x + y & \to & Z = \max(X, Y) & \qquad z = x - y & \to & \text{not well-defined} \\ z = x \cdot y & \to & Z = X + Y & \qquad z = x/y & \to & Z = X - Y \end{array}$$

すなわち超離散化は和，積，商をそれぞれ max, +, − に置き換える演算の変更とみなすことができる．このような基本演算が提供する代数的構造を max-plus 代数と呼ぶ [4]．

3. 構造を共有する連続離散対応

構造を共有する連続離散対応とはどのようなものかを説明するため，Burgers 方程式を取り上げてみよう．まず差分 Burgers 方程式は差分 Cole–Hopf 変換を通じて差分拡散方程式と以下の関係にある [3, 5]．

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_j^{n+1} = u_j^n \dfrac{u_{j+1}^n + 1/u_j^n}{u_j^n + 1/u_{j-1}^n} & \text{（差分 Burgers 方程式）} \\ \qquad \updownarrow \quad u_j^n = f_j^n / f_{j-1}^n & \text{（差分 Cole–Hopf 変換）} \\ f_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_{j-1}^n) & \text{（差分拡散方程式）} \end{array} \right. \tag{1}$$

連続極限

$$u_j^n = e^{\Delta x \cdot u(j\Delta x, n\Delta t)}, \quad f_j^n = f(j\Delta x, n\Delta t), \quad \Delta t = \Delta x^2/2, \quad \Delta x \to 0$$

により，(1) は以下の微分方程式の系に帰着する．

$$\begin{cases} u_t = 2uu_x + u_{xx} & \text{（Burgers 方程式）} \\ \quad \updownarrow \quad u(x,t) = (\log f(x,t))_x & \text{（Cole–Hopf 変換）} \\ f_t = f_{xx} & \text{（拡散方程式）} \end{cases}$$

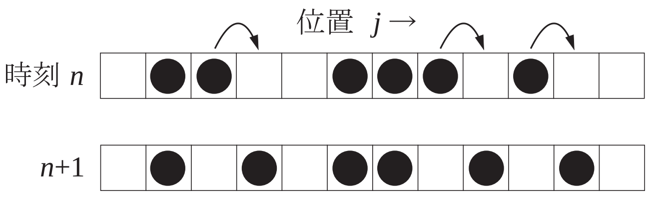
さらに，超離散極限

$$u_j^n = e^{(U_j^n - 1/2)/\varepsilon}, \quad f_j^n = e^{F_j^n/\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0 \tag{2}$$

により，(1) は以下の超離散方程式の系に帰着する．

$$\begin{cases} U_j^{n+1} = U_j^n + \min(U_{j-1}^n, 1 - U_j^n) - \min(U_j^n, 1 - U_{j+1}^n) & \text{（超離散 Burgers 方程式）} \\ \qquad \updownarrow \quad U_j^n = F_j^n - F_{j-1}^n + 1/2 & \text{（超離散 Cole–Hopf 変換）} \\ F_j^{n+1} = \max(F_{j-1}^n, F_{j+1}^n) & \text{（超離散拡散方程式）} \end{cases}$$

U, F の方程式は区分線形型の差分方程式とみなすこともできるが，U の初期値を $0, 1$ に限定すると，U は常に $0, 1$ のどちらかの値しかとらない．このように独立変数が離散で，従属変数の値の集合（値域）が有限集合となるようなものをセルオートマトン (Cellular Automaton, CA) という．しかも，1 を粒子，0 を真空とし，U_j^n を位置 j，時刻 n での粒子の個数と想定することで，U の方程式は以下のような粒子の運動を表している．



各粒子は，右側が空いていればそこに移動し，
右側に粒子がいればその場にとどまる

上の差分，超離散方程式は，微分方程式の近似スキームとしての差分方程式や，微分方程式の解の挙動を模している粒子モデルとどこが違うのであろうか．この Burgers 方程式の場合は,「線形化可能」という構造を共有している点が他と異なる．すなわち Cole–Hopf 変換によって線形の拡散方程式に帰着するので，重ね合わせ可能な解を有している．たとえば 2 段衝撃波に相当する解は，それぞれの拡散方程式の解

$$\begin{aligned} \text{微分：}\ & f(x,t) = 1 + \exp(k_1 x + k_1^2 t + c_1) + \exp(k_2 x + k_2^2 t + c_2) \\ \text{差分：}\ & f_j^n = 1 + \exp(k_1 j + (\cosh k_1) n + c_1) + \exp(k_2 j + (\cosh k_2) n + c_2) \\ \text{超離散：}\ & F_j^n = \max(0, K_1 j + |K_1| n + C_1, K_2 j + |K_2| n + C_2) \end{aligned}$$

から Cole–Hopf 変換を通じて生成できる．

なお (1) の差分 Burgers 方程式は，数値計算に用いるスキームとしてはそれほど精度が高くなく，$O(\Delta x^2)$ である．この程度であるなら，たとえば

$$\frac{1}{\Delta t}(u_j^{n+1}-u_j^n)=\frac{1}{2\Delta x}((u_{j+1}^n)^2-(u_{j-1}^n)^2)+\frac{1}{\Delta x^2}(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

のような通常の差分化を改良した方が精度のよいものができる．このように，どのような立場から連続離散対応を考えるかによって得られる式が大きく異なる．本講演で扱う離散方程式については，近似精度を第一の目標とせず，構造の共有に重点を置いたものとなっている．

4. ソリトン系

ソリトン系として最初に見つかった CA は箱玉系と呼ばれ，偏微分ソリトン方程式である KdV 方程式と以下の関係を通じて関連している [3, 6]．LV 方程式とは Lotka–Volterra 方程式の略である．

偏微分： $u_t+6uu_x+u_{xxx}=0$ （KdV 方程式）

$\uparrow$ 空間変数 j の連続極限

微差分： $\dfrac{du_j}{dt}=u_j(u_{j-1}-u_{j+1})$ （LV 方程式）

$\uparrow$ 時間変数 n の連続極限

差分： $\dfrac{1}{\delta}(u_j^{n+1}-u_j^n)=u_j^n u_{j-1}^n-u_j^{n+1}u_{j+1}^{n+1}$ （差分 LV 方程式）

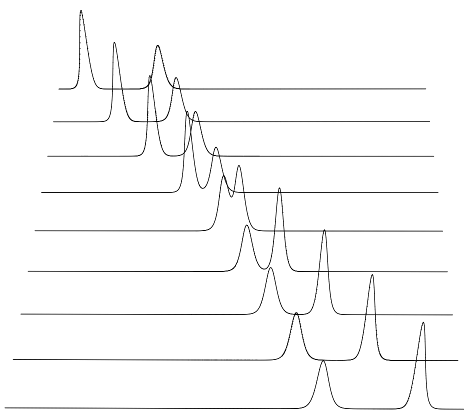
$\downarrow$ 従属変数 u の超離散極限

超離散： $U_j^{n+1}-U_j^n=\max(0,U_{j-1}^n-1)-\max(0,U_{j+1}^{n+1}-1)$ （超離散 LV 方程式）

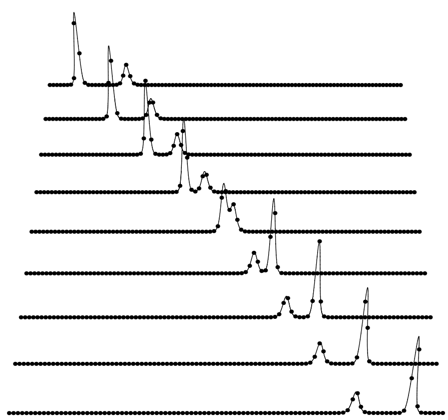
$\downarrow$ 従属変数 U から B への書き換え

CA： $B_j^{n+1}=\min\Big(1-B_j^n,\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{j-1}(B_k^n-B_k^{n+1})\Big)$ （箱玉系）

どの方程式も広田の双線形化法により双線形方程式を導くことができ，N ソリトン解の摂動形式や行列式形式，可算無限個の保存量など，ソリトン系として必要な性質はすべて共有しており，それら方程式や量の表現についても上の図式の連続極限や超離散極限によって相互に変換可能である [7, 8].



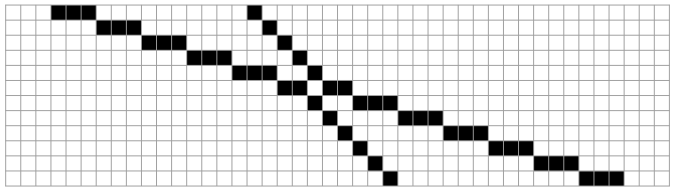
KdV 方程式



差分 LV 方程式

```
...42...12...................
....51...21..................
....15...12..................
.....24...21.................
......33..12.................
.......42..21................
........51.12................
........15..21...............
.........24.12...............
..........33.21..............
...........4212..............
............5121.............
............1512.............
.............2421............
.............1242............
..............2151...........
..............1215...........
...............2124..........
...............12.33.........
................21.42........
................12..51.......
.................21.15.......
.................12..24......
..................21..33.....
..................12...42....
...................21...51...
...................12...15...
```

超離散LV方程式（・は0を表す）



箱玉系（■は1，□は0）

KdV方程式に限らず，ソリトン系では連続と離散がたいへんうまく対応し，前に述べた戸田方程式などいろいろな例が知られている．

5. 可積分写像

可積分な2階の離散写像にQuispel–Roberts–Thompson (QRT)系がある[9]．次式はその一例である．

$$x_{n+1} = \frac{\alpha + \beta x_n}{x_n^2 x_{n-1}} \tag{3}$$

この写像は次式で定義される保存量$h_n = h(x_{n-1}, x_n)$を持つ．

$$h(x, y) = xy + \frac{\alpha}{xy} + \beta\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)$$

さらに一般解はJacobiの楕円関数を用いて

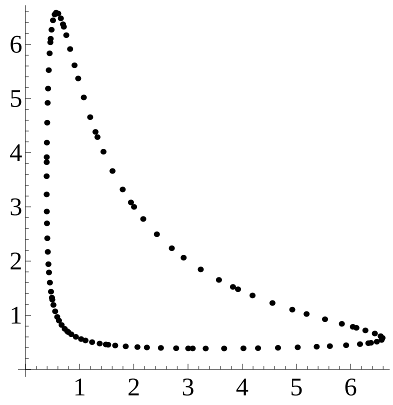
$$x_n = a + b\,\mathrm{cn}^2(\xi n; k)$$

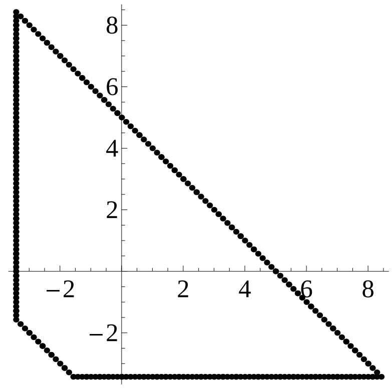
と書くことができる．(a, b, ξ, kは初期値およびα, βから定まる．)

この方程式の超離散化は$x_n = e^{X_n/\varepsilon}$等の変換と$\varepsilon \to +0$の極限によってなされ，上のそれぞれの式に対応して以下が得られる[3, 10]．

$$\begin{cases} X_{n+1} = \max(A, X_n + B) - 2X_n - X_{n-1}, \\ H(X, Y) = \max(X + Y, A - X - Y, B - X, B - Y), \\ X_n = p\min\Big(\dfrac{q}{p}, 2\{\dfrac{q}{2p}n\}, 2 - 2\{\dfrac{q}{2p}n\}\Big) \end{cases} \tag{4}$$

特に最後の解については，小数部分を表す演算$\{x\}$ $(= x - \lfloor x \rfloor)$が楕円テータ関数の超離散化から導かれ，連続と離散の関係として興味深い．(3)と(4)の相平面内における解の様子を以下に示す．





(3) の解 ($\alpha = 1$, $\beta = 2$)　　(4) の解 ($A = 0$, $B = 11/7$)

右の図で相平面内の解の点 (X_{n-1}, X_n) は $H(X_{n-1}, X_n) = \mathrm{const.}$ で表される多角形上を動く．この多角形および解の挙動をトロピカル楕円曲線によって捉える研究が最近活発に行われている [11].

6. リャプノフ関数とアトラクタ

今までのすべての例は可積分系に属するかそれに近いものであった．連続，差分，超離散の対応が可積分系だけにとどまるのであれば，特殊な系で成り立つ珍しいサンプルを提供しているに過ぎない．しかしながら，非可積分の領域でもこのような例が次々と見つかっており，この節以降ではそれらについて紹介する．ここで問題となるのは，非可積分系では可積分系ほど明示的な構造を示すことが難しく，連続離散対応において何をもって構造の共有とするのかがあいまいになるという点である．そこで，方程式の連続，超離散極限だけでなく，解にまつわる何らかの性質が共有されていることを示せるものに限定して例を紹介する．

まず，前節の QRT 系に修正を施した以下の離散写像を考える [12].

$$x_{n+1} = \frac{g_1(x_n)}{x_{n-1}g_3(x_n)} \cdot \frac{h_\infty g_1(x_n) + h(x_{n-1}, x_n)x_{n-1}^2 g_3(x_n) + \beta_n}{h(x_{n-1}, x_n)g_1(x_n) + h_\infty x_{n-1}^2 g_3(x_n) + \beta_n} \tag{5}$$

ここで

$$h(x, y) = \frac{1}{xy}(a_{00}x^2y^2 + a_{01}(x + y) + a_{02}(x^2 + y^2) + a_{11}xy + a_{12}(x + y) + a_{22}),$$
$$g_1(x) = a_{02}x^2 + a_{12}x + a_{22}, \qquad g_3(x) = a_{00}x^2 + a_{01}x + a_{02},$$
$$\beta_n > 0, \qquad a_{ij},\, h_\infty：\text{正の定数}$$

とする．元の QRT 系では保存量であった $h(x_{n-1}, x_n)$ は (5) では n に対して単調な Lyapunov 関数となる．

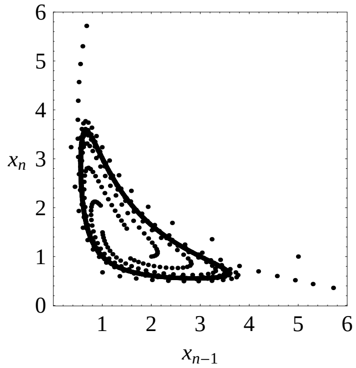
(5) は Lyapunov 関数とともに連続極限をとることができる．これによって得られた微分方程式と Lyapunov 関数は次式となる．

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{1}{c_{02}}(-c_{00}e^{2x} - c_{01}e^{x} + c_{12}e^{-x} + c_{22}e^{-2x}) - 2c_{02}\tilde{\beta}e^{2x}(\tilde{h}(x, \dot{x}) - \tilde{h}_\infty)\dot{x}, \\ \tilde{h}(x, y) = c_{02}y^2 + c_{00}e^{2x} + 2c_{01}e^{x} + c_{11} + 2c_{12}e^{-x} + c_{22}e^{-2x} \end{cases} \tag{6}$$

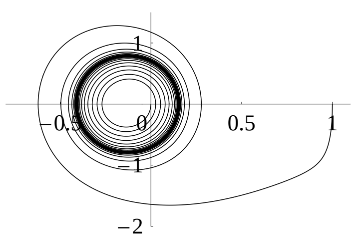
さらに (5) と Lypunov 関数の超離散化も可能であり，次式で与えられる．

$$
\begin{cases}
X_{n+1} = G_1(X_n) - X_{n-1} - G_3(X_n) \\
\qquad\qquad + \max(H_\infty + G_1(X_n), H(X_{n-1}, X_n) + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n) \\
\qquad\qquad - \max(H(X_{n-1}, X_n) + G_1(X_n), H_\infty + 2X_{n-1} + G_3(X_n), B_n), \\
H(X,Y) = \max(A_{00} + 2X + 2Y, A_{01} + X + Y + \max(X,Y), A_{02} + 2\max(X,Y), \\
\qquad\qquad\qquad A_{11} + X + Y, A_{12} + \max(X,Y), A_{22}) - X - Y, \\
G_1(X) = \max(A_{02} + 2X, A_{12} + X, A_{22}), \qquad G_3(X) = \max(A_{00} + 2X, A_{01} + X, A_{02})
\end{cases}
\tag{7}
$$

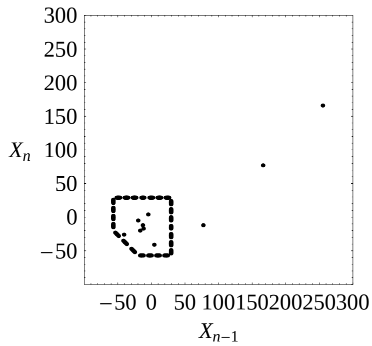
以上の 3 つの系について，アトラクタの外側と内側から解軌道を描いたものを以下に示す．



(5) の解軌道（差分）



(6) の解軌道（微分）



(7) の解軌道（超離散）

アトラクタを有する写像力学系の連続離散対応の他の例として，伝染病の流行を記述する以下の微分，差分，超離散 SIR モデルが報告されている [13]．

$$
\text{微分：}\ \dot{S} = -rSI, \qquad \dot{I} = rSI - sI, \qquad \dot{R} = sI,
$$

$$
\text{差分：}\ \frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{1 + cy_n}{1 + y_n}, \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{a + x_n}{1 + bx_n},
$$

$$
\text{超離散：}\ \begin{cases} X_n = X_{n-1} + \max(0, Y_n - \gamma) - \max(0, Y_n), \\ Y_{n+1} = Y_n + \max(-\alpha, X_n) - \max(0, X_n - \beta) \end{cases}
$$

7. カオス力学系

可解なカオス力学系において解のレベルで差分，超離散の対応が得られた例がある [14]．Schröder 写像と呼ばれる以下の離散写像を考える．

$$
z_{n+1} = \frac{4z_n(1 - z_n)(1 - k^2 z_n)}{(1 - k^2 z_n^2)^2} \qquad (0 \le k \le 1)
$$

この写像には，k を母数とする Jacobi の楕円関数で記述される解

$$
z_n = \mathrm{sn}^2(2^n u_0; k)
$$

が存在する．この方程式の超離散化は，変換

$$
z_n/(1 - z_n) = e^{X_n/\varepsilon}, \quad \sqrt{1 - k^2} = e^{-1/2\varepsilon}, \quad \varepsilon \to +0
$$

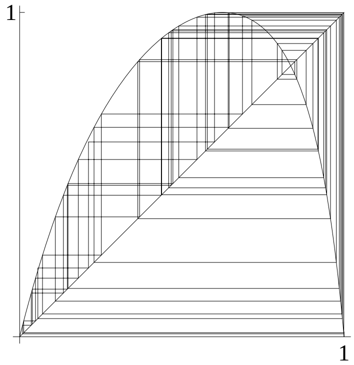
によって得られ，実質的な部分を残すとテント写像

$$X_{n+1} = 1 - 2\left|X_n - \frac{1}{2}\right|$$

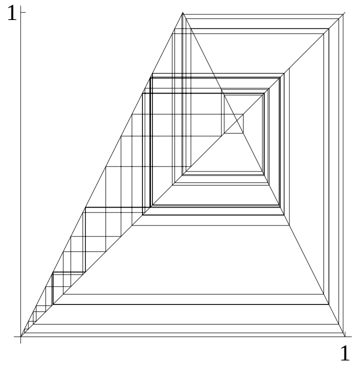
が導かれる．解については，5 節の QRT 系の場合と同様に楕円テータ関数の超離散化により，小数部分を表す演算 $\{\cdot\}$ を用いて

$$X_n = 1 - 2\left|\{2^n \nu_0\} - \frac{1}{2}\right|$$

となる．それぞれの写像の解の様子を以下に示す．



Schröder 写像



テント写像

8. 負の問題

超離散化において減法に相当する演算はうまく定義できなかった．このことから差分方程式に引き算が含まれていたり，解の符号が途中で変わったりすると超離散化ができないことが多い．しかしながらこれをうまく回避するテクニックも存在する．たとえば前節のカオス力学系における変換 $z_n/(1-z_n) = e^{X_n/\varepsilon}$ もこれにあたる．その他に，最適速度モデルと呼ばれる交通渋滞モデル

$$\ddot{x}_k = A\{V(x_{k+1} - x_k) - \dot{x}_k\}$$

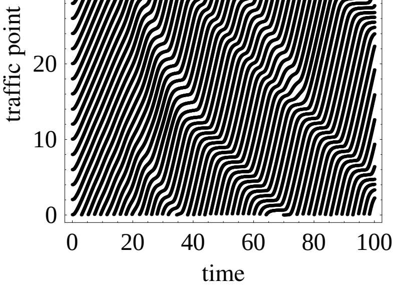
の時間変数の差分化を工夫して

$$x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} = A\{\log(1 + \delta^2 V(x_{k+1}^n - x_k^n)) - \log(1 + \delta(e^{x_k^n - x_k^{n-1}} - 1))\} \qquad (8)$$

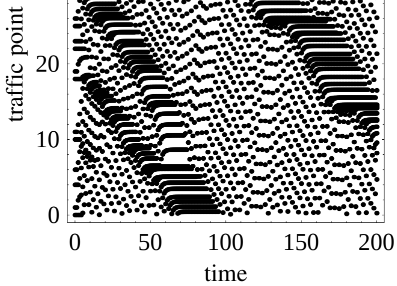
とし，最終的に

$$x_k^{n+1} - 2x_k^n + x_k^{n-1} = A\{V(x_{k+1}^n - x_k^n) - \max(0, x_k^n - x_k^{n-1})\} \qquad (9)$$

という超離散方程式を導いた例がある [15]．以下に (8) と (9) の解の例を示す．



(8) の解



(9) の解

このような工夫は現在もいろいろ試みられており，反応拡散方程式の超離散化などが報告されている [16].

9. セルオートマトンの束論

今までのような連続系と離散系の対応を考えるには，解や保存量などの構造の共有が重要である．その際には，それぞれの系での基本演算を用いた解の証明や公式の提示が必要となる．ところが，離散側，特にデジタル系においてこのための数学が不足している．方程式を解いて解を表現しようにも，その表現方法が非常に少ないのである．

そこで最近，セルオートマトン (CA) でこのような数学を構築する試みが行われている [17, 18]．たとえば 2 進のブール代数の OR ($x \vee y$), AND ($x \wedge y$), NOT ($\neg x$) を用いた Elementary CA (ECA) のひとつに以下のものがある．

$$u_j^{n+1} = (\neg u_{j-1}^n \vee u_{j+1}^n) \wedge u_j^n$$

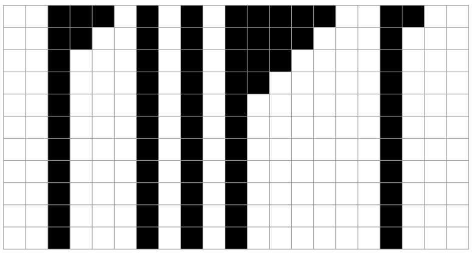
この方程式を max-plus 代数で翻訳すると，たとえば

$$u_j^{n+1} = \min(\max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \tag{10}$$

と表せる．$n = 0$ を初期時刻とした初期値問題を考えると，解は

$$\begin{aligned} u_j^n = \min(\, & \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, \ldots, 1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0), \\ & \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, \ldots, 1 - u_{j+n-3}^0, u_{j+n-1}^0), \ldots, \\ & \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, u_{j+2}^0), \max(1 - u_{j-1}^0, u_{j+1}^0), u_j^0) \end{aligned} \tag{11}$$

となる．実は (10) と (11) のセットは，u を 0, 1 に限定せず実数としても成り立つ．以下に 0, 1 に限定した解と限定しない解の例をそれぞれ示す.



0, 1 に限定した解

0.3	2.3	2.2	3.0	2.5	0.1	1.9	0.8	1.4	2.3	1.3
0.3	2.2	2.2	2.5	0.1	0.1	0.9	0.8	1.4	1.3	0.3
0.3	2.2	2.2	0.1	0.1	0.1	0.9	0.8	1.3	0.3	0.3
0.3	2.2	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.8	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3
0.3	0.7	0.1	0.1	0.1	0.1	0.9	0.3	0.3	0.3	0.3

0, 1 に限定しない解

(10) と (11) のような表現で与えられる方程式と解のセットは，ECA だけでも数多く存在している．また，証明に使われる基本演算や公式は，もっと一般的な束に昇華することが可能であり，方程式の初期値問題を束の立場から議論する試みが開始している．2 進のデジタル系から垣間見ることのできるデジタル方程式の解法は広大なものがあり，微分方程式や差分方程式と並立しうる豊かなものであるというのが印象である．

10. おわりに

可積分系分野における微分，差分，超離散の対応関係については，トロピカル幾何や結晶基底と関連しつつ，その広大で深い数理構造を解明する研究が活発に行われている [19]．それと同時に，対象をもっと一般の非線形系に拡げてこのような対応を探索する試みも盛んに行われている．両者の研究において共通するのは，連続と離散は表裏一体のものであるという思想である．この考えを推し進めるための数学は，特に離散の側に不足しており，今後の発展に期待したい．

参考文献

[1] 戸田盛和, “非線形波動とソリトン 新版”, 日本評論社 (2000).

[2] J.Matsukidaira, J.Satsuma, D.Takahashi, T.Tokihiro and M. Torii, “Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution”, Phys. Lett. A **225** (1997) 287–295.

[3] 広田良吾・高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版 (2003).

[4] 潮俊光, “ペトリネットと max-plus 代数”, 数理科学 **435** (1999) 45–50.

[5] K.Nishinari and D.Takahashi, “Analytical properties of ultradiscrete Burgers equation and rule-184 cellular automaton”, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998) 5439–5450.

[6] 時弘哲治, “開かれた数学 3 箱玉系の数理”, 朝倉書店 (2010).

[7] D.Takahashi and R.Hirota, “Ultradiscrete soliton solution of permanent type”, J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 104007 (6pp).

[8] H.Nagai and D.Takahashi, “Ultradiscrete Plücker relation specialized for soliton solutions”, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 095202 (18pp).

[9] G.R.W.Quispel, J.A.G.Roberts and C.T.Thompson, “Integrable mappings and soliton equations II”, Physica D **34** (1989) 183-192.

[10] D.Takahashi, T.Tokihiro, B.Grammaticos, Y.Ohta and A. Ramani, “Constructing solutions to the ultra-discrete Painlevé equations”, J. Phys. A: Math. Gen. **30** (1997) 7953–7966.

[11] A.Nobe, “Ultradiscrete QRT maps and tropical elliptic curves”, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 125205 (12pp).

[12] H.Inoue, D.Takahashi and J.Matsukidaira, “Discrete mappings with an explicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings”, Physica D **217** (2006) 22–30.

[13] R.Willox, B.Grammaticos, A.S.Carstea and A. Ramani, “Epidemic dynamics: discrete-time and cellular automaton models”, Physica A **328** (2003) 13–22.

[14] K.Kajiwara, A.Nobe and T.Tsuda, “Ultradiscretization of solvable one-dimensional chaotic maps”, J. Phys. A: Math. Theor. **41** (2008) 395202 (13pp).

[15] D.Takahashi and J.Matsukidaira, “On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives”, JSIAM Letters **1** (2009) 1–4.

[16] 村田実貴生, “超離散反応拡散系”, 研究集会「非線形波動研究の進展—現象と数理の相互作用—」, 九州大学応用力学研究所 (2011).

[17] D.Takahashi, J.Matsukidaira, H.Hara and B.Feng, “Max-plus analysis on some binary particle systems”, J. Phys. A: Math. Theor. **44** (2011) 135102 (21pp).

[18] 池上貴俊, “Elementary cellular automaton の初期値問題の max-plus 解析”, 京都大学数理解析研究所講究録別冊, 投稿中.

[19] R.Inoue, A.Kuniba and T. Takagi, “Integrable structure of box-ball systems: crystal, Bethe ansatz, ultradiscretization and tropical geometry”, J. Phys. A: Math. Theor. **45** (2012) 073001 (64pp).