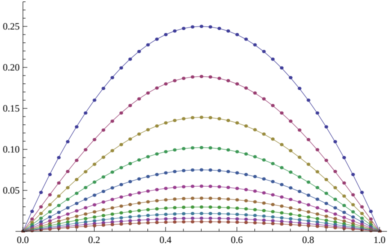
0 と 1 をつなぐ数学

高橋 大輔

拡散方程式の仲間 1 — 差分方程式

$$\boxed{u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}$$

両隣の平均をとる



$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$$

$$\downarrow \qquad u_j^n = u(j\Delta x, n\Delta t), \quad \Delta t = (\Delta x)^2/2, \quad \Delta x \to 0$$

$$u_t = u_{xx}$$

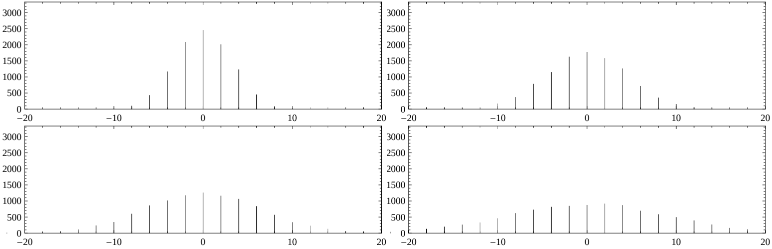
極限で拡散方程式に帰着できる　→　拡散方程式の親

拡散方程式の仲間 2 — ランダムウォーク

←●→　左右に 1/2 の確率で動く

$$\boxed{p_j^{n+1} = \frac{1}{2}(p_{j-1}^n + p_{j+1}^n)}$$

一万個



極限で拡散方程式に帰着できる → 拡散方程式の親

拡散方程式の仲間？ — 超離散化

$$\boxed{u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}$$

$$\downarrow \quad u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon}$$

$$\boxed{U_j^{n+1} = \varepsilon \log((e^{U_{j-1}^n/\varepsilon} + e^{U_{j+1}^n/\varepsilon})/2)}$$

$$\downarrow \quad \varepsilon \to +0$$

$$\boxed{U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n)}$$

公式 $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to+0} \varepsilon \log(e^{A/\varepsilon} + e^{B/\varepsilon}) = \max(A, b)$

```
..........1.......3.....2..........
.........1.1.....3.3...2.2.........
........1.1.1...3.3.3.2.2.2........
.......1.1.1.1.3.3.3.3.2.2.2.......
......1.1.1.1.3.3.3.3.3.2.2.2......
.....1.1.1.1.3.3.3.3.3.3.2.2.2.....
```

本当に仲間か？

$u_j^n = e^{U_j^n/\varepsilon} \to \varepsilon$ が有限であり，$u > 0$ である限り，解と方程式を log スケールで書き換えただけなので仲間

$$\begin{array}{lll}
u_t = u_{xx} & & \\
\quad\uparrow \quad （連続極限） & & \\
u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) & \sim & p_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(p_{j-1}^n + p_{j+1}^n) \\
\quad\downarrow \quad （超離散極限） & & \\
U_j^{n+1} = \max(U_{j-1}^n, U_{j+1}^n) & &
\end{array}$$

極限を取りきる前はどれも差分方程式．差分の極端な場合を，微分と超離散が受け持っている

時間変化は凹凸に比例 $\in$ 次時刻は両隣の平均 $\ni$ 次時刻は両隣の最大

$\to$ 数理モデルのメカニズムは意外なつながりを持っている

0 と 1 をどうつなぐか — 解の立場から

$u_t = u_{xx}$　特解 $u(x,t) = e^{-k^2 t}\sin(kx)$

$u_j^{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)$　特解 $u_j^n = (\cos k)^n \sin kj$

有限領域の初期値問題はともにフーリエ級数で解ける（基本解の存在）

j は任意の実数で方程式を満足する（格子点の間の値にも意味）

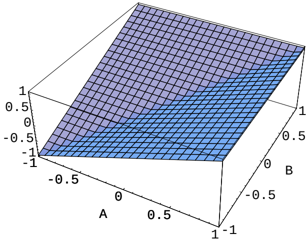
超離散方程式は？

```
.......1.......
......1.1......
.....1.1.1.....
....1.1.1.1....
...1.1.1.1.1...
```

0 と 1 をつないだときに，格子をずらしても解となるものは？
適当に離散解を寄せ集めないで…

区分線形の世界

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(e^{A/\varepsilon}+e^{B/\varepsilon})=\max(A,B)$$



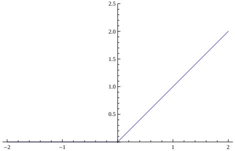
$$u_j^{n+1}=\frac{1}{2}(u_{j-1}^n+u_{j+1}^n)$$

$$\downarrow$$

差分の特解 $\cosh^n k e^{kj}$

$\downarrow \quad k=K/\varepsilon,\ \varepsilon\to+0$

超離散の特解 $|K|n+Kj$



ともに解の重ね合わせ OK

$$1+\cosh^n k e^{kj}\to\max(0,|K|n+Kj)$$

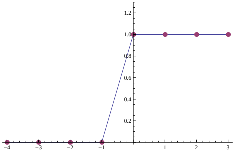
区分線形かつ連続が超離散解の特徴

$u_j^{n+1} = \max(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$ の基本解

$$\boxed{u_j^n = \max(0, n+j+1) - \max(0, n+j)}$$

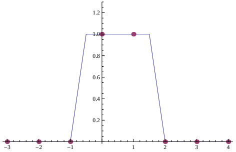
（工夫必要）

```
.......11111
......111111
.....1111111
....11111111
...111111111
```



$$\boxed{\begin{aligned} u_j^n = {} & \max(0, 2(n-j)+4) - \max(0, 2(n-j)+3) \\ & + \max(0, 2(n+j)+2) - \max(0, 2(n+j)+1) - 1 \end{aligned}}$$

```
.......11......
......1111.....
.....111111....
....11111111...
...1111111111..
```



注：チェッカーボード格子

なぜ max の他に $+$ と $-$？ $\rightarrow$ max-plus 代数（後述）

セルオートマトンから作る

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$$

$a\,b$	11	10	01	00
$f(a,b)$	1	1	1	0

$\rightarrow$　実数に拡張する

$f(a,b)$ の候補

$$a+b-ab,\ 1-\sin(2^{a+b}\pi/2),\ \max(a,b),\ 3/2-|a+b-3/2|,\ \ldots$$

我々の指導原理：以下の図式を大事にしたい

$$\boxed{\text{微分方程式} \xleftarrow{\text{連続極限}} \text{差分方程式} \xrightarrow{\text{超離散化}} \text{超離散方程式} \supset \text{デジタル方程式}}$$

なぜか？　$\rightarrow$　デジタル方程式に解析学的手法を持ち込みたい

超離散化によってどのようなタイプの方程式が得られるか？

　変数変換 $x = e^{X/\varepsilon}$, $\varepsilon \to +0$

対象となる差分方程式は正値性，有理型

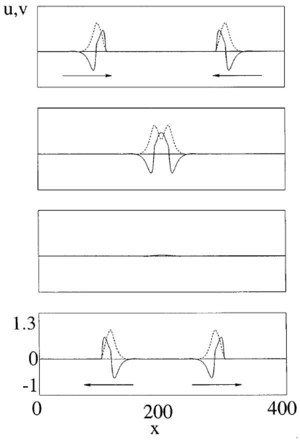
得られる超離散方程式は max と + と − で構成される

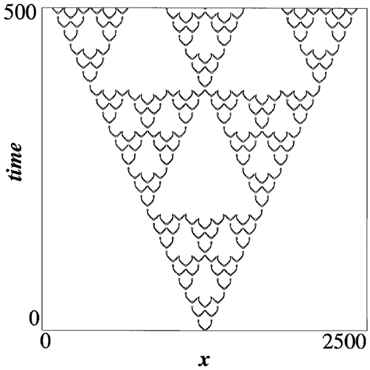
デジタルとアナログの共演 — パルスダイナミクスと ECA90

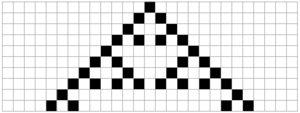
Hayase & Ohta, "Sierpinski Gasket in a Reaction-Diffusion System", PRL (1998)

$$\tau u_t = D_u u_{xx} + f(u) - v,\ v_t = D_v v_{xx} + u$$

$$f(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\tanh(u-a)}{\delta} + \frac{\tanh a}{\delta}\right) - u$$

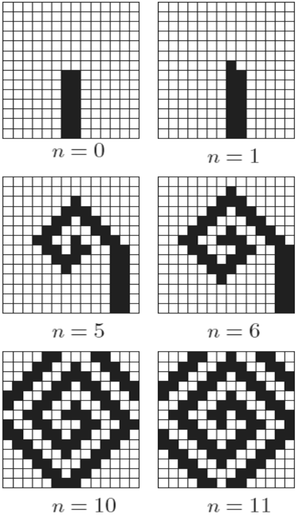


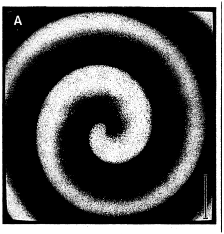




アナログの中にデジタルのメカニズム

デジタルとアナログの共演 — BZ 反応





Müller et.al.Science (1985)

$$\begin{cases} u_t = D_u \nabla^2 u + f(u,v), \\ v_t = D_v \nabla^2 v + g(u,v) \end{cases}$$

$$u_{ij}^{n+1} = \max(u_{ij}^n, u_{i+1j}^n, u_{i-1j}^n, u_{ij-1}^n, u_{ij+1}) - u_{ij}^n$$

max-plus 代数と超離散化

和を max, 積を +, 商を − とする代数系

交換	$\max(A,B)=\max(B,A)$ $A+B=B+A$
結合	$\max(A,\max(B,C))=\max(\max(A,B),C)$ $A+(B+C)=(A+B)+C$
分配	$A+\max(B,C)=\max(A+B,A+C)$

超離散化

$a=e^{A/\varepsilon}$, $b=e^{B/\varepsilon}$ とすると

$$\max(A,B)=\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(a+b) \qquad A+B=\lim_{\varepsilon\to+0}\varepsilon\log(ab)$$

例：$x_{n+1}=(x_n+x_{n-1})x_n/x_{n-1}$

$$\to\ X_{n+1}=\varepsilon\log\left((e^{X_n/\varepsilon}+e^{X_{n-1}/\varepsilon})e^{X_n/\varepsilon}/e^{X_{n-1}/\varepsilon}\right)$$

$$\to\ X_{n+1}=\max(X_n,X_{n-1})+X_n-X_{n-1}$$

- $+$, $\times$, $\div$ で構成される有理式は超離散化の可能性大
- $\varepsilon\to+0$ の極限でトリビアルになる危険性もある
- $-$ が含まれていると超離散化は not well-defined

max-plus は経験が必要

Q: $\max(a,b) = -\min(-a,-b)$ を示せ

Q: $\max(0,a,b,a+b) = \max(0,a) + \max(0,b)$ を示せ

Q: $|a|$ を max で表せ

Q: $\max(3a+b, 2a+3b, a+5b) = \max(3a+b, a+5b)$ を示せ

Q: $\max(0,2a,3a) = 3\max(0,a)$ を示せ

Q: $\max(a, \min(b,c)) = \min(\max(a,b), \max(a,c))$ を示せ

Q: $\max(\min(a_1,a_2,\ldots), \min(b_1,b_2,\ldots),\ldots)$ を
$\min(\max(\ldots), \max(\ldots),\ldots)$ の形にせよ

Q: $\max(\min(a,b), \min(b,c), \min(c,a))$ は何を答える演算か

方程式の証明 1

Q: $u_j^{n+1} = \max(u_{j-1}^n, u_j^n)$ の初期値問題を解け

A:

$$
\begin{aligned}
u_j^n &= \max(u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}) \\
&= \max(\max(u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}), \max(u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2})) \\
&= \max(u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2}) \\
&= \cdots \\
&= \max(u_{j-n}^0, u_{j-n+1}^0, \ldots, u_j^n)
\end{aligned}
$$

方程式の証明 2

Q: $u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_j^n)$ の初期値問題を解け

A:

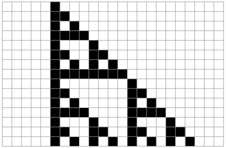
$$\begin{aligned}
u_j^n &= \min(1 - u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}) \\
&= \min(1 - \min(1 - u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}), \min(1 - u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2})) \\
&= \min(\max(u_{j-2}^{n-2}, \underline{1 - u_{j-1}^{n-2}}), \underline{1 - u_{j-1}^{n-2}}, u_j^{n-2}) \\
&= \min(1 - u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2}) \\
&= \cdots \\
&= \min(1 - u_{j-1}^0, u_j^0)
\end{aligned}$$

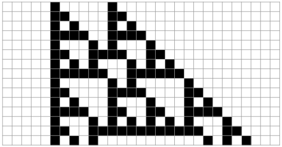
$n = 1$ 以降は静止解

セルオートマトンから作る 2

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_j^n),$$

$a\ b$	11	10	01	00
$f(a,b)$	0	1	1	0





$f(a,b) = a \oplus b = a + b \mod 2 \quad \to \quad \oplus$ を和とみなせる

$$a \oplus b = b \oplus a, \qquad (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$$

Q: a, b が整数なら $\oplus$ と一致し，実数でも和の交換則，結合則を満たすような演算 $\boxplus$ を max-plus で作れ.

A:
$$\begin{aligned} a \boxplus b &= \max(a,b) - \max(0, a+b-1) \\ &= \max(\min(a, 1-b), \min(b, 1-a)) \end{aligned}$$

$$\boxed{u_j^{n+1} = u_{j-1}^n \boxplus u_j^n = \max(u_{j-1}^n, u_j^n) - \max(0, u_{j-1}^n + u_j^n - 1)}$$

```
.....1........2..........3........................
.....11.......22.........33.......................
.....111......212........3.3......................
.....1111.....2222.......3333.....................
.....11111....21112......3...3....................
.....111111...221122.....33..33...................
.....1111111..2121212....3.3.3.3..................
.....11111111.22222222...33333333.................
.....111111111211111112..3.......3................
.....1111111112211111122.33......33...............
.....111111111212111112123.3.....3.3..............
.....111111111222211112221333....3333.............
.....1111111112111211121122..3...3...3............
.....11111111122112211221212.33..33..33...........
.....1111111112121212121222223.3.3.3.3.3..........
.....111111111222222222221111133333333333.........
.....11111111121111111111211112..........3........
.....111111111221111111112211122.........33.......
.....1111111112121111111121211212........3.3......
.....11111111122221111111222212222.......3333.....

.....111111111211121111112111221112......3...3....
```

注：各数値を 3 で割る

解の重ね合わせOK u_j^n, v_j^n が解なら $u_j^n \boxplus v_j^n$ も解

max-plus は常にベストか？

交換・結合法則を満たさなくていいなら $f(a,b) = |a-b|$ も実数拡張

$$\boxed{u_j^{n+1} = |u_{j-1}^n - u_j^n|}$$

```
.....1........2..........3........................
.....11.......22.........33.......................
.....1.1......2.2........3.3......................
.....1111.....2222.......3333.....................
.....1...1....2...2......3...3....................
.....11..11...22..22.....33..33...................
.....1.1.1.1..2.2.2.2....3.3.3.3..................
.....11111111.22222222...33333333.................
.....1.......12.......2..3.......3................
.....11......112......22.33......33...............
.....1.1.....1.12.....2.23.3.....3.3..............
.....1111....11112....2221333....3333.............
.....1...1...1...12...2..12..3...3...3............
.....11..11..11..112..22.112.33..33..33...........
.....1.1.1.1.1.1.1.12.2.21.123.3.3.3.3.3..........
.....1111111111111111222211111333333333333.........
.....1...............1...1....2..........3........
.....11..............11..11...22.........33.......
.....1.1.............1.1.1.1..2.2........3.3......
.....1111............11111111.2222.......3333.....

.....1...1...........1.......12...2......3...3....
```

注：各数値を 3 で割る

フラクタル構造が壊れない？

max-plus は常にベストか？

$a+b \mod 2$ の実数拡張のひとつ：2 で割った余り

$$\boxed{2\left(\frac{a+b}{2} - \left\lfloor \frac{a+b}{2} \right\rfloor\right)}$$

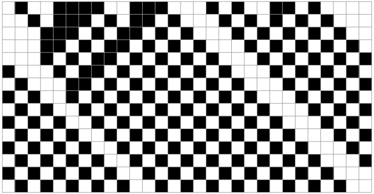
```
.....1........2..........3........................
.....11.......22.........33.......................
.....121......242........3.3......................
.....1331.....2..2.......3333.....................
.....14.41....22.22......3...3....................
.....154451...242242.....33..33...................
.....1.323.1..2..4..2....3.3.3.3..................
.....11355311.22.44.22...33333333.................
.....124242421242424242..3.......3................
.....13......33........2.33......33...............
.....143.....3.3.......223.3.....3.3..............
.....1513....3333......245333....3333.............
.....1..43...3...3.....2.32..3...3...3............
.....11.413..33..33....22352.33..33..33...........
.....1214543.3.3.3.3...2452123.3.3.3.3.3..........
.....1335331333333333..2.3133533333333333.........
.....14.22.44........3.22344.22..........3........
.....154242424.......33245124242.........33.......
.....1.3......4......3.5.3.3....2........3.3......
.....1133.....44.....33553333...22.......3333.....

.....124.3....424....3.242...3..242......3...3....
```

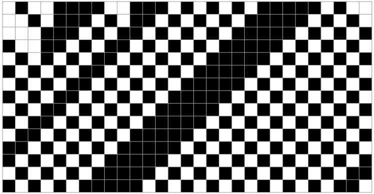
注：各数値を 3 で割る

$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$：小数部を答える演算　$\rightarrow$　楕円 θ 関数の超離散化で登場

特徴をつかめ！ — Burgers CA

$a\ b\ c$	111	110	101	100	011	010	001	000
$f(a,b,c)$	1	0	1	1	1	0	0	0





相転移現象　$\rho < 1/2$ で右ずれ，$\rho > 1/2$ で左ずれパターン

1 の気持ちになると…　　10 → 01（右が空いていたら動く）

1 の数（0 の数）が保存する保存系になっている（粒子系）

粒子系は保存形で書ける　（服部・武末 Physica D 1991）

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-1}^n, u_j^n) - q(u_j^n, u_{j+1}^n)$$

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} q(u, u_x)$$

Burgers CA

Nishinari & Takahashi J. Phys. A 1998

$$\boxed{u_j^{n+1} = u_j^n + \min(u_{j-1}^n, 1 - u_j^n) - \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n)}$$

保存系はポテンシャルの方程式で書ける

$$u_t = \frac{\partial}{\partial x} q(u, u_x) \quad \xrightarrow{u = f_x} \quad f_t = q(f_x, f_{xx}) + c$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n + \min(u_{j-1}^n, 1 - u_j^n) - \min(u_j^n, 1 - u_{j+1}^n) \\ &\downarrow \quad u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + 1/2 \\ f_j^{n+1} &= \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n) \end{aligned}}$$

f の式は簡単に解ける

$$f_j^n = \max(f_{j-n}^0, f_{j-n+2}^0, \dots, f_{j+n-2}^0, f_{j+n^0})$$

u の初期値問題も解け，相転移も f の初期値問題として説明できる！

Burgers CA は Burgers 方程式の図式の超離散翻訳（via 差分）

$$\begin{cases} u_t = 2uu_x + u_{xx}, & \qquad q(u,u_x) = u^2 + u_x \\ \quad \downarrow \quad u = (\log f)_x & \\ f_t = f_{xx} & \end{cases}$$

全流束 $\displaystyle\int q dx$ は単調減少

$$\frac{\partial}{\partial t}\int q(u,u_x)dx = \int (2uu_t + u_{xt})dx = -2\int u_x^2 dx < 0$$

$\displaystyle\sum_j \min(u_j^n, 1-u_{j+1}^n)$ は単調増大のはず（流束としては符号逆）

$$\sum_j \min(u_j^n, 1-u_{j+1}^n) = \sum_j \min\Big(f_j^n - f_{j-1}^n + \frac{1}{2}, 1 - (f_{j+1}^n - f_j^n + \frac{1}{2}\Big)$$
$$= \sum_j \Big(\frac{1}{2} + f_j^n - \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n)\Big)$$

. . . .

$$\sum_j \min(u_j^{n+1}, 1-u_{j+1}^{n+1}) - \sum_j \min(u_j^n, 1-u_{j+1}^n)$$
$$= \sum_j f_j^{n+1} - \max(f_{j-1}^{n+1}, f_{j+1}^{n+1}) - (f_j^n - \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n))$$
$$= \sum_j \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n) - \max(f_{j-2}^n, f_j^n, f_{j+2}^n) - (f_j^n - \max(f_{j-1}^n, f_{j+1}^n))$$
$$= \sum_j \max(f_{j-2}^n, f_j^n) + \max(f_j^n, f_{j+2}^n) - \max(f_{j-2}^n + f_j^n, 2f_j^n, f_j^n + f_{j+2}^n)$$
$$= \sum_j \max(f_{j-2}^n + f_j^n, 2f_j^n, f_j^n + f_{j+2}^n, f_{j-2}^n + f_{j+2}^n)$$
$$- \max(f_{j-2}^n + f_j^n, 2f_j^n, f_j^n + f_{j+2}^n) \geq 0$$

粒子系は面白い

粒子系の特徴

保存量の存在（1 の数の和），ポテンシャルの存在（解析のしやすさ）

u を 0, 1 に限定し，時間 1 階の粒子系を全探索する

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-r_1}^n, u_{j-r_1+1}^n, \ldots, u_{j+r_2-1}^n, u_{j+r_2}^n)$$

近傍数：$r_2 - r_1 + 1$

ガリレイ変換 $j \to j - cn$

$$u_j^{n+1} = f(u_{j-r_1+c}^n, u_{j-r_1+c+1}^n, \ldots, u_{j+r_2+c-1}^n, u_{j+r_2+c}^n)$$

近傍数を決めさえすれば，近傍はどこでも同じ（グラフをゆがめるだけ）

同一視できるルールを除外しておく
白黒反転 $u \to 1 - u$，ガリレイ変換&左右反転 $j \to \pm j + cn$，
偶奇格子分離 $u_j^{n+1} = f(u_{j-1}^n, u_{j+1}^n)$

粒子系のリスト

- PCA1: $u_j^{n+1} = u_j^n$
- PCA2: none
- PCA3: Burgers CA
- PCA4: $u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n) - q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$

4-1

$a\,b\,c$	111	110	101	100	011	010	001	000
$q(a,b,c)$	0	1	0	1	0	1	0	0

4-2

$a\,b\,c$	111	110	101	100	011	010	001	000
$q(a,b,c)$	0	1	0	0	0	0	-1	0

4-3

$a\,b\,c$	111	110	101	100	011	010	001	000
$q(a,b,c)$	0	1	0	0	0	0	0	0

4-4

$a\,b\,c$	111	110	101	100	011	010	001	000
$q(a,b,c)$	0	0	0	0	0	1	0	0

PCA4-1: 101 100　　PCA4-2: 110 001

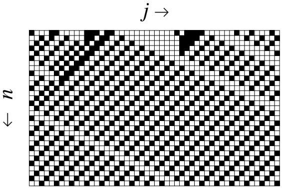
PCA4-3: 110　　PCA4-4: 010

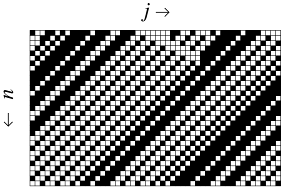
- PCA5: 115 個
- PCA6: 約 3 万個

すべて保存系なのでポテンシャル方程式で表せる

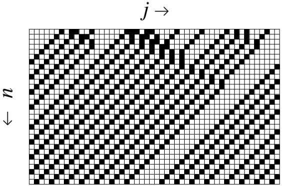
PCA4 の観察

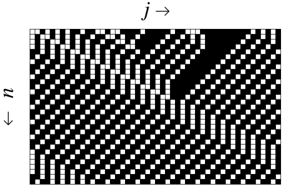
PCA4-1　密度 $1/3$ で相転移

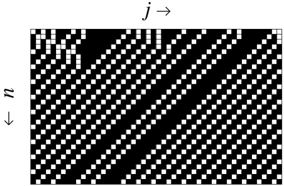




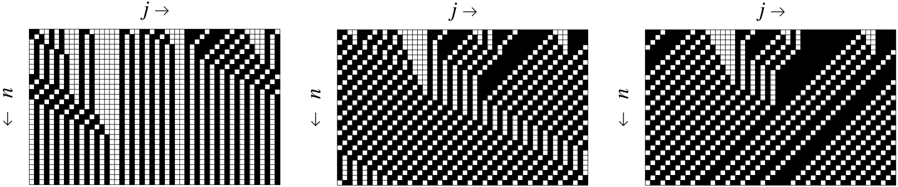
PCA4-2　密度 $1/3$, $2/3$ で相転移



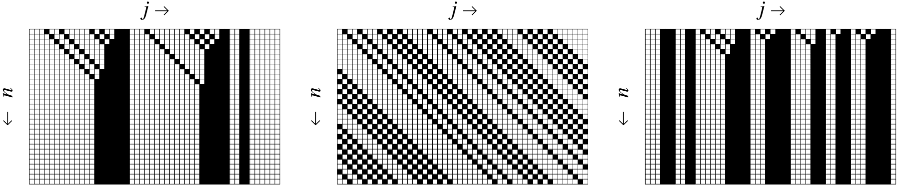




PCA4-3　密度 $1/2$, $2/3$ で相転移



PCA4-4　密度 $1/2$ までに二重解



PCA4-1 の初期値問題

PCA4-1:

$$\boxed{\begin{array}{l} u_j^{n+1} = u_j^n + q_{j-1}^n - q_j^n, \qquad q_j^n = \min(u_{j-1}^n + u_j^n,\ 1 - u_{j+1}^n) \\ \qquad \downarrow \quad u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + 1/3 \\ f_j^{n+1} = \max(f_{j-2}^n,\ f_{j+1}^n) \end{array}}$$

すぐに解ける

PCA4-2 の初期値問題

$$u_j^{n+1} = u_j^n + q(u_{j-2}^n, u_{j-1}^n, u_j^n) - q(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n)$$

$$q(a,b,c) = \min(\max(-c, a+b-1), 1-c)$$

$$\downarrow \quad u_j^n = f_j^n - f_{j-1}^n + 1/2$$

$$f_j^{n+1} = \max\left(\min\left(f_{j-2}^n, f_{j+1}^n + \frac{1}{2}\right), f_{j+1}^n - \frac{1}{2}\right)$$

一般解 $$f_j^n = \max_{0\le k\le n}\left(\min\left(f_{j-2n+3k}^0 - \frac{k}{2}, \min_{k+1\le i\le n} f_{j-2n+3i}^0 + \frac{i}{2}\right)\right)$$

$$f_j^1 = \max\left(\min\left(f_{j-2}^0, f_{j+1}^0 + \frac{1}{2}\right), f_{j+1}^0 - \frac{1}{2}\right),$$

$$f_j^2 = \max\left(\min\left(f_{j-4}^0, f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j+2}^0 + 1\right), \min\left(f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}, f_{j+2}^0 + 1\right), f_{j+2}^0 - 1\right),$$

$$f_j^3 = \max\left(\min\left(f_{j-6}^0, f_{j-3}^0 + \frac{1}{2}, f_j^0 + 1, f_{j+3}^0 + \frac{3}{2}\right), \min\left(f_{j-3}^0 - \frac{1}{2}, f_j^0 + 1, f_{j+3}^0 + \frac{3}{2}\right), \min(f_j^0 - 1, f_{j+3}^0 + \frac{3}{2}), f_{j+3}^0 - \frac{3}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
f_j^2 = \max(\min(&\max(\min(f_{j-4}^0, f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}), f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}),\\
&\max(\min(f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j+2}^0 + 1), f_{j+2}^0)),\\
&\max(\min(f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), f_{j+2}^0 - 1))\\
= \max(&\min(\min(\max(f_{j-4}^0, f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}), \max(f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j-1} - \frac{1}{2})),\\
&\min(\max(f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), \max(f_{j+2}^0 + 1, f_{j+2}^0))),\\
&\min(f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), f_{j+2}^0 - 1)\\
= \max(&\min(\max(f_{j-4}^0, f_{j-1} - \frac{1}{2}), f_{j-1}^0 + \frac{1}{2},\\
&\max(f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), f_{j+2}^0 + 1),\\
&\min(f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), f_{j+2}^0 - 1)\\
= \max(&\min(\max(f_{j-4}^0, f_{j-1} - \frac{1}{2}), f_{j-1}^0 + \frac{1}{2}, f_{j+2}^0 + 1),\\
&\min(f_{j-1}^0 - \frac{1}{2}, f_{j+2}^0), f_{j+2}^0 - 1) = \cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

将来の夢 — デジタル－アナログ・ハイブリッドモデル

超離散化の構図

微分方程式
↑　　連続極限
差分方程式
↓　　超離散極限
超離散方程式
∪　　特別な場合
セルオートマトン

離散度合いが異なるメカニズムに対応がつく

→　しかし，共存していない！

→　論理演算（デジタル）を行う神経パルス回路（アナログ）を作れないか！