

---

**日本応用数理学会  
2011年度年会**

# **講演予稿集**

---

会場：同志社大学今出川キャンパス  
会期：2011年9月14日（水）～16日（金）

**日本応用数理学会**

○ 登壇者 ☆「若手優秀講演賞」審査対象 ※ 時間の記載がない講演は20分(講演15分+質疑応答5分)

## ◇◇◇◇ 15:20～15:40 一般講演／数理ファイナンス ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 【14p-D3-1】 FBMの影響を受ける Black-Scholes モデルのインプライドボラティリティ ..... 61  
 ○成田 清正(神奈川大学)

## ◇◇◇◇ 15:40～16:40 研究部会OS／数理政治学 ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 【14p-D4-1】 ☆ 空間的投票理論における政党座標値計算の精緻化 ..... 63  
 ○品川 景子(筑波大学), 岸本一男(筑波大学)
- 【14p-D4-2】 [特別講演(40分)] レニーのエントロピーに基づく議席配分方式について ..... 65  
 ○一森 哲男(大阪工業大学)

## 9月14日 E会場 ≪至誠館2F S21教室≫

## ◇◇◇◇ 14:10～15:30 研究部会OS／応用可積分系(1) ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 【14p-E3-1】 離散平面曲線の時間発展に現れる離散可積分系と離散ホドグラフ変換 ..... 67  
 Baofeng Feng (University of Texas Pan American), 井ノ口順一(山形大学),  
 ○梶原 健司(九州大学), 丸野 健一(University of Texas Pan American),  
 太田 泰広(神戸大学)

- 【14p-E3-2】 ☆ シフトを考慮した LR 変換に関連する離散ハングリー系について ..... 69  
 ○濱 洋輔(東京理科大学), 福田 亜希子(東京理科大学),  
 石渡 恵美子(東京理科大学), 岩崎 雅史(京都府立大学),  
 山本 有作(神戸大学), 中村 佳正(京都大学)

- 【14p-E3-3】 ☆ 中心多様体理論を用いた離散ハングリー系の局所解析 ..... 71  
 高橋 悠(京都府立大学), 岩崎 雅史(京都府立大学),  
 ○福田 亜希子(東京理科大学), 石渡 恵美子(東京理科大学),  
 中村 佳正(京都大学)

- 【14p-E3-4】 ☆ Multiple直交多項式と可積分系 ..... 73  
 ○三木 啓司(京都大学), 辻本 諭(京都大学)

## ◇◇◇◇ 15:40～17:20 研究部会OS／応用可積分系(2) ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 【14p-E4-1】 ☆ ある双直交有理関数に付随して現れる箱玉系について ..... 75  
 ○前田 一貴(京都大学), 辻本 諭(京都大学)

- 【14p-E4-2】 ☆ 超離散パンルヴェ II型方程式の様々な特殊解系列 ..... 77  
 ○磯島 伸(青山学院大学), 薩摩 順吉(青山学院大学)

- 【14p-E4-3】 ☆ ECAの初期値問題のmax-plus解析 ..... 79  
 ○池上 貴俊(早稲田大学)

- 【14p-E4-4】 非線形波動系に対するシンプレクティック数値積分法と  
マルチシンプレクティック数値積分法  
 ○佐々 成正(日本原子力研究開発機構)

- 【14p-E4-5】 ☆ 楕円データ関数とソボレフ形不等式の最良定数 ..... 81  
 ○山岸 弘幸(都立産業技術高専), 亀高 惟倫(大阪大学), 永井 敦(日本大学),  
 渡辺 宏太郎(防衛大学), 武村 一雄(日本大学)

## 9月14日 F会場 ≪至誠館 2F S22教室≫

## ◇◇◇◇ 9:00～10:20 研究部会OS／行列・固有値問題の解法とその応用(1) ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

- 【14a-F1-1】 ☆ AXPY計算を削減した IDRstab 法の実装とその収束性 ..... 83  
 ○相原 研輔(東京理科大学), 阿部 邦美(岐阜聖徳学園大学),  
 石渡 恵美子(東京理科大学)
- 【14a-F1-2】 ☆ GBiCGSTAB( $s, L$ )法の偽収束性について ..... 85  
 ○深堀 康紀(東京大学), 杉原 正顯(東京大学)

## ECA の初期値問題の max-plus 解析

池上 貴俊

早稲田大学大学院数学応用数理専攻

e-mail : mimshoioe@fiji.waseda.jp

### 1 はじめに

Elementary cellular automaton (ECA) とは、状態変数が 0 か 1 のどちらかであって、3 つの近傍の値から次の時刻における状態変数の値が決まるセルオートマトンの一種であり、256 種類のルールが存在する [1]。ECA の初期値問題による解の挙動は、[2], [3] 等によって統計的な分類やパターン解析がなされている。しかし、ECA の各ルールについて解析学的な手法をもちいて調べたものは少ない。そこで、ECA の各ルールに対して 0, 1 の組み合わせを引数とした時に、次の時刻の値が一致するよう max-plus 代数をもちいて時間発展則をさだめ、その時間発展則をもちいて一般解や解の漸近挙動を解析する。また、これにより解や漸近挙動から明確なルールの分類をおこなう。そして、max-plus 代数が持つ性質について考える。

### 2 ECA の max-plus 方程式による表現

ECA のひとつの例として、ルール 10 における入力と出力は次の表であらわされる。

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	0	1	0	1	0

そこで、次の max-plus 方程式

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n) \quad (1)$$

をあたえると、この方程式は上の表の 0, 1 の組み合わせに対して、正しい値を返すことがわかる。この時間発展則は、初期値を  $u_j^0$  とすると

$$u_j^n = \min(1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0) \quad (2)$$

を一般解として持つことが max-plus 代数の性質のみをもちいて証明できる。また、この解の表現より  $n \geq 1$  において、解が

$$u_j^{n+1} = u_{j+1}^n \quad (3)$$

という漸近挙動をすることもわかる。同様にルール 140 において、max-plus 方程式が

$$u_j^{n+1} = \min(\max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \quad (4)$$

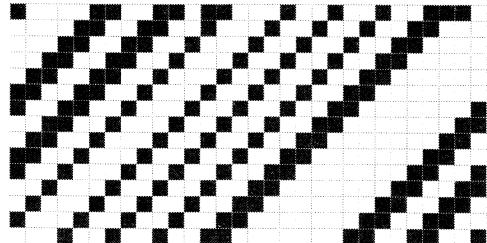
という形であったえられ、一般解は

$$\begin{aligned} u_j^n &= \min(\max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, \dots, \\ &\quad 1 - u_{j+n-3}^0, 1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0), \\ &\quad \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, \dots, \\ &\quad 1 - u_{j+n-3}^0, u_{j+n-1}^0), \\ &\quad \dots, \\ &\quad \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, u_{j+3}^0), \\ &\quad \max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, u_{j+2}^0), \\ &\quad \max(1 - u_{j-1}^0, u_{j+1}^0, u_j^0) \end{aligned} \quad (5)$$

となる。この一般解の証明においても、max-plus 代数の性質しかもちいていない。ここであげた 2 つのルールは、一般解の形式が異なるものであり、漸近挙動も異なる。よって式の上で明確な分類をおこなうことができる。

ところで、これらの解証明の過程において ECA のルールの起点となった、状態変数  $u_j^n$  が 0, 1 である、という条件をもちいていない。よって (1), (4) は、初期値が実数であっても (2), (5) を解として持つ。また、解の漸近挙動も初期値が 0, 1 であったときと同様のものがあらわれる。

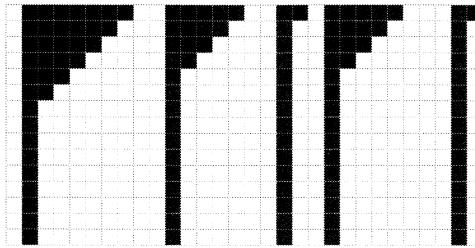
ルール 10 の解の一例 (0, 1 パターン)



ルール 10 の解の一例 (実数値)

$$\begin{array}{cccccccccc} -6.5 & -2.7 & 9.1 & -3.5 & 6.4 & 1.1 & 8.8 & -3.6 & 7.9 \\ -6.9 & 5.5 & -3.5 & 4.5 & 1.1 & -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 \\ 5.5 & -3.5 & 4.5 & 1.1 & -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 & -6.9 \\ -3.5 & 4.5 & 1.1 & -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 & -6.9 & -2.7 \\ 4.5 & 1.1 & -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 & -6.9 & -2.7 & 5.5 \\ 1.1 & -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 & -6.9 & -2.7 & 5.5 & -3.5 \\ -0.1 & -3.6 & 2.6 & -6.5 & -6.9 & -2.7 & 5.5 & -3.5 & 4.5 \end{array}$$

ルール 140 の解の一例 (0,1 パターン)



ルール 140 の解の一例 (実数値)

$$\begin{array}{ccccccccc}
 -2.5 & -1.7 & 7.2 & 4.5 & 1.4 & 0.2 & -1.4 & 3.6 & 7.9 \\
 -2.5 & -1.7 & 4.5 & 1.4 & 0.2 & -0.4 & -1.4 & 3.6 & -2.5 \\
 -2.5 & -1.7 & 2.7 & 0.2 & -0.4 & -0.4 & -1.4 & 2.4 & -2.5 \\
 -2.5 & -1.7 & 2.7 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -1.4 & 2.4 & -2.5 \\
 -2.5 & -1.7 & 2.7 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -1.4 & 2.4 & -2.5 \\
 -2.5 & -1.7 & 2.7 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -1.4 & 2.4 & -2.5 \\
 -2.5 & -1.7 & 2.7 & -0.4 & -0.4 & -0.4 & -1.4 & 2.4 & -2.5
 \end{array}$$

これにより、0,1の値のみの挙動であったECAが、自然に実数における時間発展則へと拡張されていることがわかる。

### 3 max-plus 代数の新たな性質

本稿の方法をもちいて多くのECAルールにおける解析をしていくと、似通った一般解の形があることがわかる。その中で解の形がルール10の一般解のように簡単にあらわせないルール140などを比較すると、一般解の証明をおこなう形においても似通っていることがわかる。そこで、それらの証明によってえられる式を比較して、うまく共通部分を抜き出すと

$$\begin{aligned}
 & \min(\max(a, \min(s_1, t_1), \dots, \min(s_n, t_n), \\
 & \quad \min(\max(b, t_1, \dots, t_n), \\
 & \quad r_1, \dots, r_m)), \\
 & \quad \max(a, r_1), \dots, \max(a, r_m)) \\
 & = \min(\max(a, b, t_1, \dots, t_n) \\
 & \quad \max(a, r_1), \dots, \max(a, r_m))
 \end{aligned} \tag{6}$$

という max-plus 代数をもちいた恒等式がえられる。そしてこの恒等式をもちいて、抜き出した元のルール以外のルールを証明することができる。まだ解けていないほかのルールを解析していく上で、別の恒等式がえられるかは現在研究中である。

また、ルール 140 をあらわす方程式(4)において

$$\max(1 - u_j^n, u_{j-1}^n) \tag{7}$$

は  $n$  について単調減少である。すなわち

$$\max(1 - u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1}) \leq \max(1 - u_j^n, u_{j-1}^n) \tag{8}$$

が成り立つ。このようなある方程式に対して領域毎に単調性が成り立つ関数が存在すれば、その方程式は有限ステップのうちに一定の値に収束する。このような性質をもつ式は保存量と関係があり、実際に(7)は初期値が0,1であった場合には保存量となっている。max-plus 方程式の保存量を考える上で、このような式を見つけることは重要であると思われる。現時点では、他のルールに対する(7)のようなものは見つかっておらず、研究していく必要がある。

### 4 まとめ

ECAに対して解析学的な手法をもちいることによって、いくつかのルールに対しては一般解を求めることができた。これは解空間の自然な拡張となっており、初期値が実数であってもよい。そして、求めた解や漸近挙動によって、明確な分類ができるようになった。また、max-plus 代数をもちいた新しい恒等式や max-plus の式をもちいた性質などが見つかった。この点についての新しい発見がまだまだあったり、ひいては超離散系の発展に繋がっていくであろう。

### 参考文献

- [1] 広田良吾, 高橋大輔, 差分と超離散, 共立出版, 2003.
- [2] S.Wolfram, A NEW KIND OF SCIENCE, Wolfram Media Inc, 2002.
- [3] Joana G. Freire and Jason A.C. Gallegas, "Synchronization and predictability under rule 52, a cellular automaton reputedly of class", Phys. Lett. A, vol.366 (2007), 25-29.