日本応用数理学会
2011年度年会

講演予稿集

会場：同志社大学今出川キャンパス

会期：2011年9月14日(水)～16日(金)

日本応用数理学会

○ 登壇者　☆「若手優秀講演賞」審査対象　※ 時間の記載がない講演は20分（講演15分＋質疑応答5分）

◇◇◇◇◇ **15：20～15：40 一般講演／数理ファイナンス** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

◇◇◇◇◇ **15：40～16：40 研究部会OS／数理政治学** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

9月14日 E会場　≪至誠館2F S21教室≫

◇◇◇◇◇ **14：10～15：30 研究部会OS／応用可積分系（1）** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

◇◇◇◇◇ **15：40～17：20 研究部会OS／応用可積分系（2）** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

9月14日 F会場　≪至誠館2F S22教室≫

◇◇◇◇◇ **9：00～10：20 研究部会OS／行列・固有値問題の解法とその応用（1）** ◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇◇

14p-E4-3

ECAの初期値問題のmax-plus解析

池上 貴俊
早稲田大学大学院数学応用数理専攻
e-mail : mimshoioe@fuji.waseda.jp

1 はじめに

Elementary cellular automaton（ＥＣＡ）とは，状態変数が０か１のどちらかであって，３つの近傍の値から次の時刻における状態変数の値が決まるセルオートマトンの一種であり，２５６種類のルールが存在する [1]．ＥＣＡの初期値問題による解の挙動は，[2],[3] 等によって統計的な分類やパターン解析がなされている．しかし，ＥＣＡの各ルールについて解析学的な手法をもちいて調べたものは少ない．そこで，ＥＣＡの各ルールに対して 0, 1 の組み合わせを引数とした時に，次の時刻の値が一致するように max-plus 代数をもちいて時間発展則をさだめ，その時間発展則をもちいて一般解や解の漸近挙動を解析する．また，これにより解や漸近挙動から明確なルールの分類をおこなう．そして，max-plus 代数が持つ性質について考える．

2 ＥＣＡの max-plus 方程式による表現

ＥＣＡのひとつの例として，ルール 10 における入力と出力は次の表であらわされる．

111	110	101	100	011	010	001	000
0	0	0	0	1	0	1	0

そこで，次の max-plus 方程式

$$u_j^{n+1} = \min(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n) \qquad (1)$$

をあたえると，この方程式は上の表の 0, 1 の組み合わせに対して，正しい値を返すことがわかる．この時間発展則は，初期値を u_j^0 とすると

$$u_j^n = \min(1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0) \qquad (2)$$

を一般解として持つことが max-plus 代数の性質のみをもちいて証明できる．また，この解の表現より $n \geq 1$ において，解が

$$u_j^{n+1} = u_{j+1}^n \qquad (3)$$

という漸近挙動をすることもわかる．同様にルール 140 において，max-plus 方程式が

$$u_j^{n+1} = \min(\max(1 - u_{j-1}^n, u_{j+1}^n), u_j^n) \qquad (4)$$

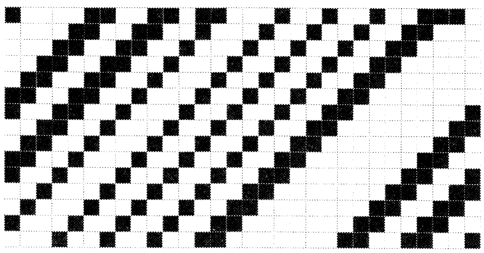
という形であたえられ，一般解は

$$\begin{aligned} u_j^n = \min(&\max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, \cdots, \\ &\quad 1 - u_{j+n-3}^0, 1 - u_{j+n-2}^0, u_{j+n}^0), \\ &\max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, \cdots, \\ &\quad 1 - u_{j+n-3}^0, u_{j+n-1}^0), \\ &\cdots, \\ &\max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, 1 - u_{j+1}^0, u_{j+3}^0), \\ &\max(1 - u_{j-1}^0, 1 - u_j^0, u_{j+2}^0), \\ &\max(1 - u_{j-1}^0, u_{j+1}^0), u_j^0) \end{aligned} \qquad (5)$$

となる．この一般解の証明においても，max-plus 代数の性質しかもちいていない．ここであげた２つのルールは，一般解の形式が異なるものであり，漸近挙動も異なる．よって式の上での明確な分類をおこなうことができる．

ところで，これらの解証明の過程においてＥＣＡのルールの起点となった，状態変数 u_j^n が 0, 1 である，という条件をもちいていない．よって (1), (4) は，初期値が実数であっても (2), (5) を解として持つ．また，解の漸近挙動も初期値が 0, 1 であったときと同様のものがあらわれる．

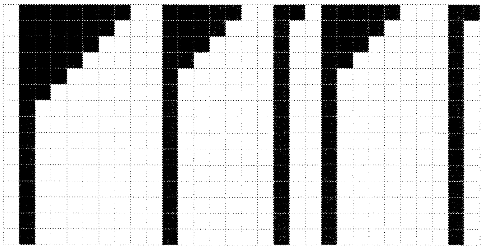
ルール 10 の解の一例（0, 1 パターン）



ルール 10 の解の一例（実数値）

−6.5	−2.7	9.1	−3.5	6.4	1.1	8.8	−3.6	7.9
−6.9	5.5	−3.5	4.5	1.1	−0.1	−3.6	2.6	−6.5
5.5	−3.5	4.5	1.1	−0.1	−3.6	2.6	−6.5	−6.9
−3.5	4.5	1.1	−0.1	−3.6	2.6	−6.5	−6.9	−2.7
4.5	1.1	−0.1	−3.6	2.6	−6.5	−6.9	−2.7	5.5
1.1	−0.1	−3.6	2.6	−6.5	−6.9	−2.7	5.5	−3.5
−0.1	−3.6	2.6	−6.5	−6.9	−2.7	5.5	−3.5	4.5

ルール 140 の解の一例（0, 1 パターン）



ルール 140 の解の一例（実数値）

−2.5	−1.7	7.2	4.5	1.4	0.2	−1.4	3.6	7.9
−2.5	−1.7	4.5	1.4	0.2	−0.4	−1.4	3.6	−2.5
−2.5	−1.7	2.7	0.2	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.5
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.5
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.5
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.5
−2.5	−1.7	2.7	−0.4	−0.4	−0.4	−1.4	2.4	−2.5

これにより，0, 1 の値のみの挙動であったＥＣＡが，自然に実数における時間発展則へと拡張されていることがわかる．

3　max-plus 代数の新たな性質

本稿の方法をもちいて多くのＥＣＡルールにおける解析をしていくと，似通った一般解の形があることがわかる．その中で解の形がルール 10 の一般解のように簡単にあらわせないルール 140 などを比較すると，一般解の証明をおこなう形においても似通っていることがわかる．そこで，それらの証明によってえられる式を比較して，うまく共通部分を抜き出すと

$$\begin{aligned}&\min(\max(a,\min(s_1,t_1),\cdots,\min(s_n,t_n),\\&\qquad\min(\max(b,t_1,\cdots,t_n),\\&\qquad\qquad r_1,\cdots,r_m)),\\&\qquad\max(a,r_1),\cdots,\max(a,r_m))\\&=\min(\max(a,b,t_1,\cdots,t_n)\\&\qquad\max(a,r_1),\cdots,\max(a,r_m))\end{aligned} \tag{6}$$

という max-plus 代数をもちいた恒等式がえられる．そしてこの恒等式をもちいて，抜き出した元のルール以外のルールを証明することができる．まだ解けていないほかのルールを解析していく上で，別の恒等式がえられるかは現在研究中である．

また，ルール 140 をあらわす方程式 (4) において

$$\max(1-u_j^n, u_{j-1}^n) \tag{7}$$

は n について単調減少である．すなわち

$$\max(1-u_j^{n+1}, u_{j-1}^{n+1}) \le \max(1-u_j^n, u_{j-1}^n) \tag{8}$$

が成り立つ．このようなある方程式に対して領域毎に単調性が成り立つ関数が存在すれば，その方程式は有限ステップののちに一定の値に収束する．このような性質をもつ式は保存量と関係があり，実際に (7) は初期値が 0, 1 であった場合には保存量となっている．max-plus 方程式の保存量を考える上で，このような式を見つけることは重要であると思われる．現時点では，他のルールに対する (7) のようなものは見つかっておらず，研究していく必要がある．

4　まとめ

ＥＣＡに対して解析学的な手法をもちいることによって，いくつかのルールに対しては一般解を求めることができた．これは解空間の自然な拡張となっており，初期値が実数であってもよい．そして，求めた解や漸近挙動によって，明確な分類ができるようになった．また，max-plus 代数をもちいた新しい恒等式や max-plus の式をもちいた性質などが見つかった．この点についての新しい発見がまだまだあったり，ひいては超離散系の発展に繋がっていくであろう．

参考文献

[1] 広田良吾，高橋大輔，差分と超離散，共立出版，2003.

[2] S.Wolfram, A NEW KIND OF SCIENCE, Wolfram Media Inc, 2002.

[3] Joana G. Freire and Jason A.C. Gallas, "Synchronization and predictability under rule 52, a cellular automaton reputedly of class", Phys. Lett. A, vol.366 (2007), 25-29.