応用力学研究所研究集会報告 No.19ME-S2
「戸田格子 40 周年　非線形波動研究の歩みと展望」（研究代表者　西成 活裕）

Reports of RIAM Symposium No.19ME-S2
40 years Anniversary of Toda lattice - history and perspective of nonlinear wave research
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 7 - 9, 2007

Article No. 14

超離散ソリトン方程式の超離散パーマネント解

長井 秀友（NAGAI Hidetomo），高橋 大輔（TAKAHASHI Daisuke）

（Received February 26, 2008）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
April, 2008

超離散ソリトン方程式の超離散パーマネント解*1

早稲田大学基幹理工学研究科 長井　秀友 (NAGAI Hidetomo)
早稲田大学基幹理工学研究科 高橋　大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

概要

超離散戸田方程式，超離散 mKdV 方程式，および可変容量箱玉系を表す非自励超離散 KP 方程式について，行列式の定義から符号を取り除いたパーマネントの超離散化によってソリトン解を与えた．また，この新しい形式のソリトン解と摂動形式の超離散ソリトン解との関係を示した．さらに解の証明について，差分ソリトン解の証明を援用することなく，超離散方程式におけるマックスープラス演算で閉じた形で証明を与えた．

1　はじめに

超離散ソリトン方程式は差分ソリトン方程式を超離散化することによって得られる方程式である．その特長として，解が差分ソリトン解の超離散化から得られる，箱玉系と呼ばれる無限個に並ぶ箱と有限個の玉によって表現される，ソリトンの性質を持つなどが挙げられる．一方で差分ソリトン方程式には解が行列式で表現されるのに対して超離散ソリトン方程式にはそれに相当するようなものは今までなかった．しかしながら最近，超離散ソリトン方程式の一つである超離散 KdV 方程式において行列式解に相当する解が存在することが示され，さらに超離散系で閉じた証明が与えられた [1]．本稿ではこのような解が超離散戸田方程式，超離散 mKdV 方程式，および可変容量箱玉系を表す非自励超離散 KP 方程式にも存在することを報告する．特に超離散戸田方程式については摂動形式解を導き，さらに超離散系で閉じた証明の概略を与える．

2　超離散戸田方程式の超離散パーマネント解とその証明

2.1　超離散戸田方程式とパーマネント

超離散戸田方程式は離散戸田方程式

$$\log(1+V_{n+1}^m) - 2\log(1+V_n^m) + \log(1+V_{n+1}^m) = \log\left(1+\delta^2 V_n^{m+1}\right) - 2\log\left(1+\delta^2 V_n^m\right) + \log\left(1+\delta^2 V_n^{m-1}\right) \quad (1)$$

を超離散化することで得られる．すなわち

$$V_n^m = e^{u_n^m/\epsilon} - 1, \quad \delta = e^{-L/2\epsilon} \quad (2)$$

とし，さらに極限操作 $\epsilon \to +0$ を行うことで

$$u_{n+1}^m - 2u_n^m + u_{n-1}^m = \max(0, u_n^{m+1} - L) - 2\max(0, u_n^m - L) + \max(0, u_n^{m-1} - L) \quad (3)$$

を得る．ただし L は非負の定数とする．また変数変換

$$u_n^m = f_n^{m+1} - 2f_n^m + f_n^{m-1} \quad (4)$$

により双線形形式の超離散戸田方程式が得られる．

$$f_{n+1}^m + f_{n-1}^m = \max\left(2f_n^m, f_n^{m+1} + f_n^{m-1} - L\right). \quad (5)$$

超離散戸田方程式の N-ソリトン解は（双線形形式の）離散戸田方程式の N-ソリトン解

$$F_n^m = \sum_{\mu_i=0,1} \exp\left(\sum_{i=1}^N \mu_i\xi_i + \sum_{1\le i<j\le N} \mu_i\mu_j A_{ij}\right) \quad (6)$$

*1 講演タイトルを変更した

を超離散化して得られることが示されている[*2][3].

パーマネントとは行列式の定義において符号を取り除いたものである．すなわち $\{a_{ij}\}_{1\le i,j\le N}$ なる $N\times N$ 行列において

$$\mathrm{perm}[a_{ij}] = \sum_{\pi_i} a_{1\pi_1} a_{2\pi_2} \dots a_{N\pi_N} \tag{7}$$

で与えられる．ここで $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_N)$ は N を自然数としたときの 1 から N までのあらゆる組み合わせの集合とする．a_{ij} が正の値をとるとき，パーマネントもまた正の値をとる．ゆえに超離散化可能であり，それを

$$\max[a_{ij}] = \max_{\pi_i} \left(a_{1\pi_1} + a_{2\pi_2} + \dots + a_{N\pi_N} \right) \tag{8}$$

と定義し超離散パーマネント（以下 UP）と呼ぶことにする．

2.2 超離散戸田方程式の UP 解と摂動形式解

超離散戸田方程式 (5) の UP 解は以下で表される．

$$f_n^m = \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |s_1(m,n)| \exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial n}\right) & \dots & |s_1(m,n)| \exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial n}\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(m,n)| \exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial n}\right) & \dots & |s_N(m,n)| \exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial n}\right) \end{bmatrix}, \tag{9}$$

$$s_i(m,n) = p_i m - \varepsilon_i q_i n + c_i, \tag{10}$$

$$q_i = \min(0, p_i + L) - \min(0, -p_i + L). \tag{11}$$

ここで p_i, c_i は任意定数で ε_i は 1 または -1 をとる値である．$\exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial n}\right)$ はずらし演算子であり，前節の (8) を用いると次のように定義される．

$$\max[a_{ij}\exp(\pi_i)] = \max_{\pi_i} \left(a_{\pi_1 1} + \exp(\pi_1) a_{\pi_2 2} + \dots + \exp(\pi_1)\dots\exp(\pi_{N-1}) a_{\pi_N N} \right), \tag{12}$$

$$\exp(\pi_i)|s_j(m,n)| = \exp\left(\frac{\partial}{\partial m} - \varepsilon_i \frac{\partial}{\partial n}\right) |s_j(m,n)| = |s_j(m+1, n-\varepsilon_i)|. \tag{13}$$

例として $N=3$ のとき，(9) は以下で表される．

$$\begin{aligned} f_n^m = \frac{1}{2} \max(&|s_1(m,n)| + |s_2(m+1, n-\varepsilon_1)| + |s_3(m+2, n-\varepsilon_1-\varepsilon_2)|, \\ &|s_1(m,n)| + |s_2(m+2, n-\varepsilon_1-\varepsilon_3)| + |s_3(m+1, n-\varepsilon_1)|, \\ &|s_1(m+1, n-\varepsilon_2)| + |s_2(m,n)| + |s_3(m+2, n-\varepsilon_1-\varepsilon_2)|, \\ &|s_1(m+2, n-\varepsilon_2-\varepsilon_3)| + |s_2(m,n)| + |s_3(m+1, n-\varepsilon_2)|, \\ &|s_1(m+1, n-\varepsilon_3)| + |s_2(m+2, n-\varepsilon_1-\varepsilon_3)| + |s_3(m,n)|, \\ &|s_1(m+2, n-\varepsilon_2-\varepsilon_3)| + |s_2(m+1, n-\varepsilon_3)| + |s_3(m,n)|). \end{aligned} \tag{14}$$

また (9) は s_i の定義および絶対値から一般性を失わずに

$$p_1 \ge p_2 \ge \dots \ge p_N \ge 0 \tag{15}$$

を仮定できる．

続いて (9) から摂動形式解を導く．仮定 (15) のもとで (9) は次のように表されることが示される．

$$f_n^m = \frac{1}{2} \max_{\sigma_i = \pm 1} \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i s_i + \sum_{i=1}^N \left(\frac{1+\sigma_i}{2} \left((N-i) p_i + q_i \varepsilon_i \sum_{j=i+1}^N \varepsilon_j \right) + \sigma_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1-\sigma_j}{2} \left(p_i + q_i \varepsilon_i \varepsilon_j \right) \right) \right). \tag{16}$$

[*2] しかしながら [3] で示されている解には反例が存在する．完全な解は (17) で与えられる．

さらに任意定数 c_i を適当にとることで以下の摂動形式解に帰着される．

$$f_n^m = \max_{\mu_i=0,1}\left(\sum_{i=1}^{N}\mu_i s_i - \sum_{1\le i<j\le N}\mu_i\mu_j(p_j+\varepsilon_i\varepsilon_j q_j)\right). \tag{17}$$

2.3 証明の概略

ここでは超離散系で閉じた証明の概略を示す．前節で得られた摂動形式解 (17) は仮定 (15) の条件下から導かれた．しかしながら任意の p_i において (17) が超離散戸田方程式の解であることが示される．摂動形式解 (17) を (5) の両辺へ代入し，共通項を除くと十分条件として次を示せばよいことが求められる．

$$\max_{\sigma_i=\pm1} g_l(\sigma_i) = \max\left(\max_{\sigma_i=\pm1} g_{r1}(\sigma_i),\ \max_{\sigma_i=\pm1} g_{r2}(\sigma_i) - L\right) \tag{18}$$

ただし $a_{ij}=p_j+\varepsilon_i\varepsilon_j q_j$ とし，$g_l(\sigma_i)$, $g_{r1}(\sigma_i)$, $g_{r2}(\sigma_i)$ は以下で与えられる．

$$g_l(\sigma_i) = -\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\varepsilon_i q_i - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le N}\sigma_i\sigma_j a_{ij} \tag{19}$$

$$g_{r1}(\sigma_i) = -\frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le N}\sigma_i\sigma_j a_{ij} \tag{20}$$

$$g_{r2}(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N}\sigma_i p_i - \frac{1}{2}\sum_{1\le i<j\le N}\sigma_i\sigma_j a_{ij} \tag{21}$$

これらの最大値となる σ_i は $g_l(\sigma_i)$, $g_{r1}(\sigma_i)$, $g_{r2}(\sigma_i)$ それぞれ

$$\sigma_i = \begin{cases} (-1)^i\prod_{j=1}^{i}\varepsilon_j & (i:\mathrm{odd}) \\ (-1)^i\prod_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j & (i:\mathrm{even}) \end{cases}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} (-1)^{i+1}\prod_{j=1}^{i}\varepsilon_j & (i:\mathrm{odd}) \\ (-1)^{i+1}\prod_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j & (i:\mathrm{even}) \end{cases}$$

$$\sigma_i = \begin{cases} 1 & (i=1) \\ (-1)^i\varepsilon_1\prod_{j=1}^{i}\varepsilon_j & (i:\mathrm{odd}) \\ (-1)^i\varepsilon_1\prod_{j=1}^{i-1}\varepsilon_j & (i:\mathrm{even}) \end{cases}$$

であることが示され，最大値は以下で与えられる．

$$\max_{\sigma_i=\pm1} g_l(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1+(-1)^i}{4}p_i + q_1 - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1+(-1)^i}{4}\prod_{l=1}^{i}\varepsilon_l - \frac{1+(-1)^{i-1}}{4}\left(1+\prod_{l=1}^{i-1}\varepsilon_l\right)\right)q_i \tag{22}$$

$$\max_{\sigma_i=\pm1} g_{r1}(\sigma_i) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1+(-1)^i}{4}p_i + \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1+(-1)^i}{4}\prod_{l=1}^{i}\varepsilon_l + \frac{1+(-1)^{i-1}}{4}\left(1-\prod_{l=1}^{i-1}\varepsilon_l\right)\right)q_i \tag{23}$$

$$\max_{\sigma_i=\pm1} g_{r2}(\sigma_i) = p_1 + \sum_{i=1}^{N}\frac{1+(-1)^i}{4}p_i - \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{1+(-1)^i}{4}\prod_{l=1}^{i}\varepsilon_l - \frac{1+(-1)^{i-1}}{4}\left(1+\prod_{l=1}^{i-1}\varepsilon_l\right)\right)q_i \tag{24}$$

したがって各最大値を $\max_{\sigma_i=\pm1} g(\sigma_i)=\bar{g}$ で表すと

1. $p_1 \le L$ のとき

$$\bar{g}_{r1}-\bar{g}_l = 0, \tag{25}$$

$$\bar{g}_{r2}-\bar{g}_l - L = p_1 - L \le 0. \tag{26}$$

2. $p_1 \geq L$ のとき

$$\bar{g}_{r1} - \bar{g}_l = -q_1 + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1+(-1)^i}{2} \prod_{l=1}^{i} \varepsilon_l - \frac{1+(-1)^{i-1}}{2} \prod_{l=1}^{i-1} \varepsilon_l \right) q_i \tag{27}$$

$$\leq -q_1 + q_2 - q_3 + q_4 - \cdots + (-1)^N q_N \ \leq 0,$$

$$\bar{g}_{r2} - \bar{g}_l - L = p_1 - q_1 - L = 0. \tag{28}$$

ゆえに

$$\max(\bar{g}_{r1} - \bar{g}_l, \bar{g}_{r2} - \bar{g}_l - L) = 0 \tag{29}$$

が成り立ち，解であることが示される．

3 他の超離散ソリトン方程式の UP 解

同様の形式の解が他の超離散ソリトン方程式にも存在する．ここでは結果のみを列挙する．

3.1 可変容量箱玉系

箱が可変容量である箱玉系の双線形方程式は NDKP から与えられる [4].

$$f_n^{m+1} + f_{n-1}^{m-1} = \max(f_n^m + f_{n-1}^m, f_{n-1}^{m+1} + f_n^{m-1} - \theta_n). \tag{30}$$

θ_n は n によって決まる自然数．このとき N-ソリトン解は以下で表される．

$$f_n^m = \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |s_1(m,n)| & \dots & |s_1(m+2(N-1),n)| \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(m,n)| & \dots & |s_N(m+2(N-1),n)| \end{bmatrix} \tag{31}$$

ただし

$$s_i(m,n) = p_i m - q_i^{(n)} + c_i \tag{32}$$

であり，$p_i \geq 0$, $q_i^{(n)}$ は

$$q_i^{(n)} = \sum_{n'}^{n} \min\left(\theta_{n'}, p_i\right)$$

とする．

3.2 運搬車付き箱玉系

運搬車付き箱玉系は超離散 mKdV 方程式から導かれる [5].

$$\begin{aligned} f_{n+1}^m + g_{n-1}^m &= \max(f_n^{m-1} + g_n^{m+1} - \max(0, -A-D), f_n^{m+1} + g_n^{m-1} - \max(0, A+D)) \\ f_{n-1}^m + g_{n+1}^m &= \max(f_n^{m-1} + g_n^{m+1} - \max(0, -A+D), f_n^{m+1} + g_n^{m-1} - \max(0, A-D)) \end{aligned} \tag{33}$$

N-ソリトン解は以下で表される．

$$f_n^m = \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |s_1(m,n)+p_1| & |s_1(m,n)+5p_1| & \dots & |s_1(m,n)+(4N-3)p_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(m,n)+p_N| & |s_1(m,n)+5p_N| & \dots & |s_N(m,n)+(4N-3)p_N| \end{bmatrix}, \tag{34}$$

$$g_n^m = \frac{1}{2} \max \begin{bmatrix} |s_1(m,n)-p_1| & |s_1(m,n)+3p_1| & \dots & |s_1(m,n)+(4N-5)p_1| \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ |s_N(m,n)-p_N| & |s_1(m,n)+3p_N| & \dots & |s_N(m,n)+(4N-5)p_N| \end{bmatrix} \tag{35}$$

s_i, p_i', q_i は以下で与えられる．

$$s_i(m,n) = p_i' m - q_i n + c_i \tag{36}$$

$$\begin{aligned}2p_j' = &\max\left(2p_j + \max(0, A-D), \max(0, -A-D)\right) + \max\left(2p_j + \max(0, A+D), \max(0, -A+D)\right)\\ &- \max\left(2p_j + \max(0, -A-D), \max(0, A-D)\right) - \max\left(2p_j + \max(0, -A+D), \max(0, A+D)\right)\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}2q_j = &-\max\left(2p_j + \max(0, A-D), \max(0, -A-D)\right) - \max\left(2p_j + \max(0, -A+D), \max(0, A+D)\right)\\ &+ \max\left(2p_j + \max(0, -A-D), \max(0, A-D)\right) + \max\left(2p_j + \max(0, A+D), \max(0, -A+D)\right).\end{aligned} \tag{38}$$

4 まとめ

いくつかの超離散ソリトン方程式に対して新しい形式の解が存在することを紹介した．特にこれらの解は行列式から符号を取り除いたパーマネントを超離散化したもので表現されている．したがってこれらの解が超離散系における行列式解であると予想される．また得られた結果から離散系，連続系におけるソリトン方程式の行列式解に見られるような代数的構造が超離散系でも表現されることが期待できる．なお本稿では述べられなかった証明の詳細等は後日論文にして投稿予定である．

参考文献

[1] D. Takahashi, R. Hirota, Ultradiscrete Soliton Solution of Permanent Type, J. Phys. Soc. Japan **76** (2007) 104007–104012

[2] R. Hirota, Nonlinear Partial Difference Equations. II. Discrete-Times Toda Equation J. Phys. Soc. Japan **43** (1977) 2074–2078.

[3] J. Matsukidaira, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro, and M. Torii, Toda-type cellular automaton and its N-soliton solution, Phys. Lett. A **225** (1997) 287–295.

[4] T. Tokihiro, D. Takahashi, and J. Matsukidaira, Box and ball systems as a realization of ultradiscrete nonautonomous KP equation, J. Phys. A: Math. Gen. **33** (2001) 607–619

[5] M. Murata, S. Isojima, A. Nobe and J. Satsuma, Exact solutions for discrete and ultradiscrete modified KdV equation and their relation to box-ball systems, J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006) L27–L34