応用力学研究所研究集会 No.16ME-S1
「非線形波動の物理と数理構造」(研究代表者 梶原 健司)

RIAM Symposium No.16ME-S1
Physics and Mathematical Structures of Nonlinear Waves

held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 15 - 17, 2004

プログラム (Program)

11月15日 (月)

10:30-11:00 **3波共鳴組多体系による弱乱流モデル**
成行 泰裕, 羽田 亨 (九州大・総合理工)

11:00-11:30 **Amplification of two-dimensional strain solitary waves**
A. V. Porubov (A. F. Ioffe Physical-Technical Institute of the RAS, Russia)

11:30-12:00 **Discrete soliton in a water wave problem**
丸野 健一 (九州大・数理)

13:00-14:00 **離散非線形系における局在状態} (特別講演)**
武野 正三 (長崎総合科学大)

14:15-14:45 **周期境界のため起こる非線形方程式の解の分岐に関する研究**
大澤 一人 (九州大・応力研) , 上野 拓朗 (九州大・総理工) , 蔵元 英一 (九州大・応力研)

14:45-15:15 **伸縮性を持つ渦糸方程式とそのヒエラルキー**
紺野 公明 (日本大・理工) , 角畠 浩 (富山大・工)

15:30-16:00 **ソリトン方程式の解に付随したコルモゴロフの方程式**
矢嶋 徹 (宇都宮大・工) , 宇治野 秀晃 (群馬高専)

16:00-16:30 **交通流の確率モデルについて**
金井 政宏 (東京大・数理科学) , 西成 活裕 (龍谷大・理工) , 時弘 哲治 (東京大・数理科学)

16:30-17:00 **箱玉系の Euler-Lagrange 対応**
松木平 淳太, 西成 活裕 (龍谷大・理工)

17:15-17:45 **周期的ソリトン方程式の超離散化**
広田 良吾, 高橋 大輔 (早稲田大・理工)

17:45-18:15 **生物における渋滞現象とモデル化**
西成 活裕 (龍谷大・理工)

11月16日 (火)

9:30-10:00 **一般化された周期箱玉系の保存量の経路による表現**
間田 潤, 時弘 哲治 (東京大・数理科学) , 泉 誠 (島根大・教育)

10:00-11:00 **Dynamics of pulse solutions in reaction-diffusion systems (特別講演)**
栄 伸一郎 (九州大・数理)

11:15-11:45 **CAに類似したパターンを解に持つ偏微分方程式の逆超離散化による導出**
田中 宏志, 西山 了允 (島根大・総合理工) , 時弘 哲治 (東京大・数理科学)

11:45-12:15 **Variety of the patterns in the case of a magnetic convection**
Elizabeta Fornalik[1,2], Piotr Filar[2], Toshio Tagawa[2], Hiroyuki Ozoe[2], Jansz S. Szmyd[1]
([1]AGH University of Science and Technology, Poland, [2]九州大・先導物質化学研)

13:15-14:15 **ボーズーアインシュタイン凝縮体中の非線形波動 (特別講演)**
佐々 成正 (日本原子力研究所)

14:30-15:00 **Sine-Gordon方程式のBenjamin-Feir型不安定性とLamé方程式の帯構造**
大宮 眞弓, 斉藤 大爾, 柴 孝史 (同志社大・工)

15:00-15:30 **非局所的ソリトン方程式の多重周期解および多重ソリトン解の新しい表式**
松野 好雅 (山口大・工)

15:30-16:00 **ソリトン理論・可積分系の非可換空間への拡張**
浜中 真志 (名古屋大・多元数理)

16:15-18:00 **ポスターセッション (後述)**

11月17日 (水)

9:30-10:00 **退化ガルニエ系の古典解とその退化構造**
鈴木 貴雄 (京都大・数理解析研)

10:00-10:30 **$E_7^{(1)}$型 q-差分 Painlevé方程式の Riccati 解のτ-函数**
増田 哲 (神戸大・自然)

10:30-11:00 **普遍指標とKP階層の拡張**
津田 照久 (神戸大・自然)

11:15-12:15 **Γとζ・・・ゼータの行列式表示に向けて (特別講演)**
若山 正人 (九州大・数理)

13:30-14:00 **格子凸多角形の分類と離散ハミルトン系の周期における超離散極限による対応**
岩尾 昌央(早稲田大・理工)

14:00-14:30 **The Poncelet problem and related problems in mathematial physics**
Alexei Zhedanov (京都大・情報, Donetsk Inst. Phys. Tech., Ukraine)

14:45-15:15 **Bianchi-Bäcklund-Darboux変換について**
井ノ口 順一 (宇都宮大・教育) , 小林 真平 (神戸大・自然)

15:15-15:45 **Calogero模型の超可積分な離散化**
宇治野 秀晃 (群馬高専) , Luc Vinet(McGill Univ., Canada) , 吉田 春夫 (国立天文台)

15:45-16:15 **全保存量を保つコマの離散化**
峯崎 征隆 (京都大・情報)

ポスターセッション(11月16日 16:15-18:00)

(1) **可積分系と非可積分系の周期点の性質**
斎藤 革子 (横浜国大・工)

(2) **箱玉系のある二次元化について**
古井 充, 高橋 大輔 (早稲田大・理工)

(3) **Benney方程式の周期解---長く平らな底を持つパルス列について**
伊藤 裕子, 加藤 由紀, 藤村 薫 (鳥取大・工)

(4) **熱音響冷却システムの冷却部における作業流体とスタック間の熱交換についての数理モデル**
富樫 萌子, 坂本 眞一, 近藤 弘一 (同志社大・工)

(5) **KP方程式による孤立波相互作用とRogue Waveの関連について**
辻 英一, 及川 正行 (九州大・応力研) , Alexey V. Porubov (A.F.Ioffe Physical Technical Institute)

(6) **自己アファイン成長界面の動力学**
北村 隆行 (九州大・総合理工) , 佐藤 信一 (静岡大・理) , 本庄 春雄 (九州大・総合理工)

(7) **長距離力相互作用を有する非線形格子ハミルトン系におけるマクロ変数のカノニカル期待値への漸近的振舞**
後藤 振一郎 , 山口 義幸 (京都大・情報)

(8) **Numerical computations for the convection of a paramagnetic fluid in a cube placed in an inclined superconducting magnet**
Tomasz Bednarz[1], Elzbieta Fornalik[1,2], Toshio Tagawa[1],Hiroyuki Ozoe[1], Janusz S. Szmyd[2] ([1]:九州大・先導物質化学研, [2]:AGH University of Science and Technology, Poland)

(9) **浅い水の波の振幅増大機構とKP方程式の解の関係**

丸野 健一 (九州大・数理) , 辻 英一, 及川 正行 (九州大・応力研)

(10) **離散 Kepler 運動の時間補正**
中西 要介, 峯崎 征隆, 中村 佳正 (京都大・情報)

(11) **非線形格子系における移動型の離散ブリーザーの数値計算法**
土井 祐介 (京都大・工) , 吉村 和之 (NTTコミュニケーション科学基礎研究所)

(12) **非同次ポテンシャルを持つ非線形格子の積分不可能性**
吉村 和之 (NTTコミュニケーション科学基礎研究所) , 梅野 健 (株式会社カオスウェア)

(13) **Some q-orthogonal polynomial solutions to the qd-type Toda discrete equation}**
伊藤 道大, 辻本 諭 (京都大・情報)

(14) **固有値計算と非自励離散系の関係について**
松井 佑貴夫, 辻本 諭 (京都大・情報)

(15) **q-Painlevé II 方程式の超幾何解の行列式構造**
濱本 太郎, 梶原 健司 (九州大・数理)

(16) **Bessel方程式の差分化と2-orthogonal polynomials**
高田 智広 (京都大・理)

(17) **New class of symmetries for self-gravitating hydrodynamics equations**
村田 宗一, 野崎 一洋 (名古屋大・理)

(18) **二成分砂山崩しの縞構造の形成**
下川 倫子 (九州大・総理工) , 中原 明生 (日本大・理工) , 太田 正之輔 (九州大・総理工)

(19) **Camassa-Holm方程式のソリトン解:双線形化法によるアプローチ**
戸田 晃一 (富山県立大・工) , A. Parker, R. S. Johnson (Univ. of Newcastle upon-Tyne, UK)

応用力学研究所研究集会報告 No.16ME-S1
「非線形波動の物理と数理構造」(研究代表者　梶原 健司)

Reports of RIAM Symposium No.16ME-S1
Physics and Mathematical Structures of Nonlinear Waves

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 15 - 17, 2004

目　次(Contents)

浜中 真志(HAMANAKA Masashi)

19. 退化ガルニエ系の古典解とその退化構造
鈴木 貴雄(SUZUKI Takao)

20. $E_7^{(1)}$型 q-差分 Painlevé方程式の Riccati 解のτ-函数
増田 哲(MASUDA Tetsu)

21. 普遍指標に付随する無限可積分系とパンルヴェ方程式
津田 照久(TSUDA Teruhisa)

22. Γとζ・・・ゼータの行列式表示に向けて
若山 正人(WAKAYAMA Masato)

23. 格子凸多角形の分類と離散ハミルトン系の周期における超離散極限による対応
岩尾 昌央(IWAO Masataka)

24. The Dirichlet and the Poncelet problems
V. P. Burskii, A. S. Zhedanov

25. Bianchi-Bäcklund-Darboux変換について
井ノ口 順一(INOGUCHI Jun-ichi), 小林 真平(KOBAYASHI Shimpei)

26. Calogero模型の超可積分性を保つ離散化
宇治野 秀晃(UJINO Hideaki), Luc Vinet, 吉田 春夫(YOSHIDA Haruo)

27. 全保存量を保つコマの離散化
峯崎 征隆(MINESAKI Yukitaka)

28. 可積分系と非可積分系の周期点の性質
斎藤 革子(SAITOH Noriko)

29. 箱玉系のある二次元化について
古井 充(FURUI Mitsuru), 高橋 大輔(TAKAHASHI Daisuke)

30. Benney方程式の周期解---長く平らな底を持つパルス列について
伊藤 裕子(ITO Yuko), 加藤 由紀(KATO Yuki), 藤村 薫(FUJIMURA Kaoru)

31. 熱音響冷却システムの冷却部における作業流体とスタック間の熱交換についての数理モデル
富樫 萌子(TOGASHI Akiko), 坂本 眞一(SAKAMOTO Shinichi), 近藤 弘一(KONDO Koichi)¥¥

32. KP方程式による孤立波相互作用とRogue Waveの関連について
辻 英一(TSUJI Hidekazu), 及川 正行(OIKAWA Masayuki), A. V. Porubov

33. 長距離力相互作用を有する非線形格子ハミルトン系におけるマクロ変数のカノニカル期待値への漸近的振舞
後藤 振一郎(GOTO Shin-itiro), 山口 義幸(YAMAGUCHI Y. Yoshiyuki)

34. Numerical computations for the convection of a paramagnetic fluid in a cube placed in an inclined superconducting magnet
TTomasz Bednarz, Elzbieta Fornalik, Toshio Tagawa, Hiroyuki Ozoe, Janusz S. Szmyd

35. 浅い水の波の振幅増大機構とKP方程式の解の関係
丸野 健一(MARUNO Ken-ichi), 辻 英一(TSUJI Hidekazu), 及川 正行(OIKAWA Masayuki)

36. 離散 Kepler 運動の時間補正
中西 要介(NAKANISHI Yosuke), 峯崎 征隆(MINESAKI Yukitaka), 中村 佳正(NAKAMURA Yoshimasa)

37. 非線形格子系における移動型の離散ブリーザーの数値計算法
土井 祐介(DOI Yusuke), 吉村 和之(YOSHIMURA Kazuyuki)

38. 非同次ポテンシャルを持つ非線形格子の積分不可能性
吉村 和之(YOSHIMURA Kazuyuki), 梅野 健(UMENO Ken)

39. Some q-orthogonal polynomial solutions to the qd-type Toda discrete equation}
伊藤 道大(ITO Michio), 辻本 諭(TSUJIMOTO Satoshi)

40. 固有値計算と非自励離散系の関係について
松井 佑貴夫(MATSUI Yukio), 辻本 諭(TSUJIMOTO Satoshi)

41. q-Painlevé II および V 方程式の超幾何解
濱本 太郎(HAMAMOTO Taro), 梶原 健司(KAJIWARA Kenji)

42. Bessel方程式の差分化と2-orthogonal polynomials

高田 智広（TAKADA Tomohiro）

43．　New class of symmetries for self-gravitating hydrodynamics equations
村田 宗一（MURATA Souichi），野崎 一洋（NOZAKI Kazuhiro）

44．　二成分砂山崩しの縞構造の形成
下川 倫子（SHIMOKAWA Michiko），西尾 悠（NISHIO Yu），中原 明生（NAKAHARA Akio），太田 正之輔（OHTA Shonosuke）¥

45．　Camassa-Holm方程式のsoliton解：双線形化法によるアプローチ
戸田 晃一（TODA Kouichi），A. Parker, R. S. Johnson

応用力学研究所研究集会報告 No.16ME-S1
「非線形波動の物理と数理構造」（研究代表者　梶原 健司）

Reports of RIAM Symposium No.16ME-S1
Physics and Mathematical Structures of Nonlinear Waves
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 15 - 17, 2004

Article No. 9

周期的ソリトン方程式の超離散化

広田 良吾（HIROTA Ryogo），高橋 大輔（TAKAHASHI Daisuke）

（Received February 23, 2005）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
April, 2005

周期的ソリトン方程式の超離散化

早稲田大学 広田良吾 (Ryogo Hirota), 高橋大輔 (Daisuke Takahashi)

概要

周期的ソリトン方程式を解くと従属変数に対する代数方程式が得られる。この代数方程式の厳密解を求めそれを超離散化する。この方法を新しく発見された『逆超離散箱玉系』

$$\frac{1}{u_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = -\delta(u_n^{m+1} - u_{n+1}^m)$$

に適用し次の結果がえられた。

a) 周期箱玉系で玉の数が空箱の数より多くなったとき、箱玉系は玉（電子）と逆方向に進む少数の空箱（空孔）の運動として理解できる。

b) 玉の数値として分数や負の数も許される。

ソリトン方程式を周期的境界条件の下で超離散化すると一般に implicit な方程式となる。しかし KdV 方程式, ロトカ・ボルテラ方程式、戸田方程式など KP 方程式系に属する周期的ソリトン方程式系では従属変数に対する２次代数方程式が得られる。

この代数方程式の厳密解を求めそれを超離散化すると explicit な方程式がえられる。

この方法を新しく発見された『逆超離散箱玉系』に適用しつぎの問題を議論する。

1. 逆超離散箱玉系とは何か？
2. 逆超離散箱玉系を周期的境界条件の下で解き、これを超離散化する。
3. 周期箱玉系で玉の数が空箱の数より多くなったとき玉はどう動くか？
4. 玉の数値として分数や負の数は許されるか？

これらの疑問に答える。

『逆超離散箱玉系』は次式で与えられる。整数 m, n に対して

$$\frac{1}{u_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = -\delta(u_n^{m+1} - u_{n+1}^m)$$

と表される。ここで δ は時間差分間隔である。この式を BBB 系 (Back ultradiscretized Box and Ball system) と呼ぶ。

この式は次の論文
Satoshi Tujimoto and Ryogo Hirota,“ Ultradiscrete KdV Equations”, J. Phys. Soc.Jpn. **67**(1998) pp.1809-1810
で議論された Discrete KdV equation

$$\frac{1}{u_n^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = -\delta(u_{n-1}^{m+1} - u_{n+1}^m)$$

を座標変換 $m + n \to n$ して得られた方程式である。

BBB 系

$$\frac{1}{u_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = -\delta(u_n^{m+1} - u_{n+1}^m)$$

は従属変数変換 $u_n^m = \frac{f_n^{m+1} f_{n+1}^m}{f_n^m f_{n+1}^{m+1}}$ によって双線形形式

$$f_{n+1}^{m+1} f_n^{m-1} - \delta f_n^{m+1} f_{n+1}^{m-1} - c_0 f_{n+1}^m f_n^m = 0$$

となる。ここで c_0 は境界条件によって定まる定数である。ソリトン解の場合には $c_0 = 1 - \delta$ である。
この双線形形式はゲージ変換

$$f_n^m \to f_n^m g(n), \quad g(n) \text{ は } n \text{ の任意関数}$$

によって不変であることに注意する。
ソリトン解は Discrete KdV の解を座標変換 $m + n \to n$ して得られる。しかしこの座標変換は空間座標 n に時間変数 m が入り込むので分散関係はいままでとは違ったものになる。たとえば２ーソリトン解は

$$\begin{aligned}
&f(m,n) = 1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + a_{12} e^{\xi_1 + \xi_2}, \\
&e^{\xi_j} = r_j p_j^n q_j^m, \\
&q_j = \frac{1 - \delta p_j}{p_j - \delta}, \quad \text{for } j = 1, 2, \\
&a_{12} = \frac{(p_1 - p_2)^2}{(p_1 p_2 - 1)^2}
\end{aligned}$$

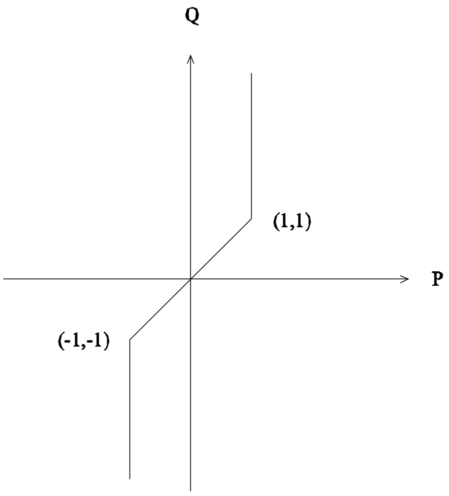
である。分散関係はこのままでは超離散化が難しいので、p_j を q_j の関数として求める。

$$p_j = \frac{1 + \delta q_j}{q_j + \delta}, \quad a_{12} = \frac{(q_1 - q_2)^2}{(q_1 q_2 - 1)^2}.$$

超離散化した２ーソリトン解、U_n^m は次式で与えられる。

$$
\begin{aligned}
U_n^m &= F_n^{m+1} + F_{n+1}^m - F_n^m - F_{n+1}^{m+1}, \\
F_n^m &= \max(0, \Xi_1, \Xi_1, A_{12} + \Xi_1 + \Xi_2), \\
\Xi_j &= P_j n - Q_j m - c_j, \quad \text{for } j = 1, 2.
\end{aligned}
$$

ここで $P_j = \max(Q_j, -1) - \max(0, Q_j - 1), \quad A_{12} = |Q_1 - Q_2| - |Q_1 + Q_2|.$ である。



分散関係　$P = \max(Q, -1) - \max(0, Q - 1)$

この２ーソリトン解を $Q_1 = 2,\ Q_2 = 1$ の場合、すなわち長さ２のソリトンと長さ１のソリトンの衝突を表す解をプロットすると

{0,0,1,1,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,1,1,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,0,0,0}

となり、箱玉系を再現している。

次に $Q_1 := 5/2,\ Q_2 := 1$ を選ぶと、数字 1/2 を含むソリトンの衝突が観測される。

```
{0,0,1/2,1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,1,1,1/2,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,1/2,1,1,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,1/2,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1/2,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1,1,1/2,0,0,0}

{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,1/2,1,1,0}
```

周期的境界条件の下で BBB 系を解く。式の表示を簡単にするために

$$u_n^{m+1} = x_n, \quad u_{n+1}^m + \frac{1}{\delta u_n^m} = a_n, \; \frac{1}{\delta} = b_j$$

と置くと、BBB 系は次のように書き換えられる。

$$x_j = a_j - \frac{b_{j+1}}{x_{j+1}}, \text{for } j = 0, 1, 2, \cdots.$$

この式は連分数の形をしている。

周期的境界条件 $(x_{j+N} = x_j, j = 0, 1, \cdots)$ より x_j に対する 2 次代数方程式が得られが、代数方程式の係数は非常に複雑である。
このために連分数の行列式表示を使う。
頁数がないので結果だけを書くと周期的 BBB 系の マッピングは次式

$$u_j^{m+1} = u_j^m \frac{u_{j-1}^m + \sum_{k-1}^{N-1}\{\prod_{s=1}^k \delta(u_{j-s}^m)^2\} u_{j-k-1}^m}{u_j^m + \sum_{k-1}^{N-1}\{\prod_{s=1}^k \delta(u_{j+1-s}^m)^2\} u_{j-k}^m} \quad \text{or} \quad u_n^{m+1} = \frac{1}{\delta u_{n+1}^m}$$

で与えられる。このマッピングは超離散可能である。

以下に周期的 (周期 10) 境界条件での箱玉系で玉の数と空箱の数の割合を変化させた計算結果をしめす。

玉の数３—空箱の数７

{0,0,0,0,1,0,0,0,1,1}

{1,1,0,0,0,1,0,0,0,0}

{0,0,1,1,0,0,1,0,0,0}

{0,0,0,0,1,1,0,1,0,0}

{0,0,0,0,0,0,1,0,1,1}

{1,1,0,0,0,0,0,1,0,0}

{0,0,1,1,0,0,0,0,1,0}

{0,0,0,0,1,1,0,0,0,1}

{1,0,0,0,0,0,1,1,0,0}

玉の数４—空箱の数６

{1,0,0,1,1,1,0,0,0,0}

{0,1,0,0,0,0,1,1,1,0}

{1,0,1,1,0,0,0,0,0,1}

{0,1,0,0,1,1,1,0,0,0}

{0,0,1,0,0,0,0,1,1,1}

{1,1,0,1,1,0,0,0,0,0}

{0,0,1,0,0,1,1,1,0,0}

{1,0,0,1,0,0,0,0,1,1}

{0,1,1,0,1,1,0,0,0,0}

{0,0,0,1,0,0,1,1,1,0}

玉の数７—空箱の数３

{1,1,1,0,0,1,1,0,1,1}

{1,0,0,1,1,1,0,1,1,1}

{0,1,1,1,1,0,1,1,1,0}

{1,1,1,1,0,1,1,0,0,1}

{1,1,1,0,1,0,0,1,1,1}

{1,0,0,1,0,1,1,1,1,1}

{0,1,1,0,1,1,1,1,1,0}

{1,1,0,1,1,1,1,0,0,1}

{1,0,1,1,1,0,0,1,1,1}

{0,1,1,0,0,1,1,1,1,1}

玉の数９—空箱の数１

{1,0,1,1,1,1,1,1,1,1}

{0,1,1,1,1,1,1,1,1,1}

{1,1,1,1,1,1,1,1,1,0}

{1,1,1,1,1,1,1,1,0,1}

{1,1,1,1,1,1,1,0,1,1}

{1,1,1,1,1,1,0,1,1,1}

{1,1,1,1,1,0,1,1,1,1}

{1,1,1,1,0,1,1,1,1,1}

{1,1,1,0,1,1,1,1,1,1}

周期的 (周期 10) 境界条件での箱玉系 6
初期値で玉の数値が負数 (-1) を含むとき

```
{0,0,1,1,0,0,0,-1,0,0,1,0,0,0,0}
{0,0,0,0,1,1,0,0,-1,0,0,1,0,0,0}
{0,0,0,0,0,0,1,1,0,-1,0,0,1,0,0}
{0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,-1,0,0,1,0}
{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,2,-1,0,0,1}
{1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,2,0,0,0}
{0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,1,1,0}
{1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0,1}
{0,1,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,-1,0}
```

周期的 (周期 12) 境界条件での箱玉系 6
初期値で玉の数値が負数 (-2) を含むとき

```
{0,0,1,1,0,0,-2,0,0,1,0,0}
{0,0,0,0,1,1,0,-2,0,0,1,0}
{0,0,0,0,0,0,1,1,-2,0,0,1}
{1,0,0,0,0,0,0,0,2,-2,0,0}
{0,1,0,0,0,0,0,0,-1,3,-2,0}
{0,0,1,0,0,0,0,0,0,-2,3,-1}
{0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,-2,2}
{1,1,0,0,1,0,0,0,0,0,0,-2}
{-2,0,1,1,0,1,0,0,0,0,0,0}
```

まとめ

1. 逆超離散箱玉系とは何か？
   次の方程式である。

$$\frac{1}{u_{n+1}^{m+1}} - \frac{1}{u_n^m} = -\delta(u_n^{m+1} - u_{n+1}^m)$$

2. 周期箱玉系で玉の数が空箱の数より多くなったとき玉はどう動くか？

   箱玉系の玉と空箱との関係は電子と空孔の関係である。玉の数が空き箱より多いときは電子（玉）と逆方向に動く空孔（空き箱）の運動で記述される。

3. 玉の数値として分数や負の数は許されるか？

   Yes,!