

研究集会報告 15 ME-S3

非線形波動および非線形力学系の
数理とその応用



九州大学応用力学研究所

2004 年 4 月

Reports of RIAM Symposium

No.15ME-S3

*Mathematical Theories and Applications of Nonlinear Waves
and Nonlinear Dynamics*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 12 - 14, 2003

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

April, 2004

研究集会「非線形波動および非線形力学系の数理とその応用」報告集

2003年11月12日～14日

研究代表者 龍谷大学理工学部 松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)

目 次

1. KPZ 成長界面におけるノイズ項の修正と多重アフィン解析 1
九州大学総合理工学研究院 桂木 洋光 (KATSURAGI Hiroaki)
九州大学総合理工学研究院 本庄 春雄 (HONJO Haruo)
2. 鉄-硝酸化学振動反応とその相互作用 7
横浜国立大学工学府 小松 隆明 (KOMATSU Takaaki)
横浜国立大学工学研究院 石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)
3. 時系列データの短時間フラクタル次元解析 13
同志社大学工学研究科 林 順 (HAYASHI Sunao)
4. シア一流れ下での結晶成長における固液界面の形態不安定性 19
九州大学応用力学研究所 上之 和人 (UENO Kazuto)
5. 周期ポテンシャル項をもつ非線形シュレディンガー方程式のソリトン 26
九州大学総合理工学研究院 坂口 英継 (SAKAGUCHI Hidetsugu)
6. ボーズアインシュタイン凝縮系に対する3次元GP方程式の数値解法 31
日本原子力研究所計算科学 佐々 成正 (SASA Narimasa)
日本原子力研究所計算科学 町田 昌彦 (MACHIDA Masahiko)
筑波大学物理学系 松本 秀樹 (MATSUMOTO Hideki)
7. 二次元非線形はしご型回路に関する実験 37
横浜国立大学工学府 岸 寛之 (KISHI Hiroyuki)
横浜国立大学工学研究院 渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
8. プラズマを媒質としたカオス現象の観測と応用実験 43
九州大学総合理工学府 福山 隆雄 (FUKUYAMA Takao)
九州大学総合理工学研究院 河合 良信 (KAWAI Yoshinobu)
9. Fibonacci 多項式の q -類似 49
立教大学理学部 青木 俊一郎 (AOKI Shun-ichirou)
立教大学理学部 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

10. 一般化固有値問題に付随した離散可積分系の行列式構造について	55
京都大学情報学研究科	向平 敦史 (MUKAIHIRA Atsushi)
京都大学情報学研究科	辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)
11. 戸田方程式の変数分離解と組合せ論的数	58
京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)
Donetsk Inst. Phys. Tech.	Alexei ZHEDANOV
京都大学情報学研究科	大平 倫宏 (OHIRA Norihiro)
12. Biorthogonal rational functions and explicit Padé interpolation tables	64
Donetsk Inst. Phys. Tech.	Alexei ZHEDANOV
13. マックス・プラス型写像力学系 I	70
早稲田大学理工学研究科	矢吹 学 (YABUKI Manabu)
早稲田大学理工学研究科	渡部 浩幸 (WATANABE Hiroyuki)
早稲田大学理工学研究科	助迫 昌樹 (SUKESAKO Masaki)
早稲田大学理工学研究科	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
14. マックス・プラス型写像力学系 II	76
早稲田大学理工学研究科	渡部 浩幸 (WATANABE Hiroyuki)
早稲田大学理工学研究科	矢吹 学 (YABUKI Manabu)
早稲田大学理工学研究科	助迫 昌樹 (SUKESAKO Masaki)
早稲田大学理工学研究科	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
15. 周期境界をもつセルオートマトンの可逆性について	82
東京大学数理科学研究科	野邊 厚 (NOBE Atsushi)
16. Sine-Gordon 方程式のある超離散化	88
東京大学数理科学研究科	磯島 伸 (ISOJIMA Shin)
東京大学数理科学研究科	村田 実貴生 (MURATA Mikio)
東京大学数理科学研究科	野邊 厚 (NOBE Atsushi)
東京大学数理科学研究科	薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)
17. 一般化された箱玉系の粒子・反粒子的アルゴリズム	94
東京大学総合文化研究科	竹野内 晃 (TAKENOUCI Akira)
東京大学総合文化研究科	国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)
防衛大学校応用物理学科	高木 太一郎 (TAKAGI Taichiro)
18. 周期箱玉系と ndKP 方程式	100
東京大学数理科学研究科	間田 潤 (MADA Jun)
東京大学数理科学研究科	時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)
島根大学教育学部	泉 誠 (IDZUMI Makoto)

19.	蟻の巣の形成に関するシミュレーション		107
	横浜国立大学工学府	小田 充志 (ODA Atsushi)	
	横浜国立大学工学研究院	石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)	
20.	セルオートマトンによる人と蟻の集団行動の解析		113
	龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)	
21.	カオス現象研究黎明期の一実録		119
	はこだて未来大学システム情報科学部	上田 暁亮 (UEDA Yoshisuke)	
22.	Analytical study of integrable-nonintegrable transition of shifted KdV map		126
	東京都立大学理学研究科	小野澤 祥 (ONOZAWA Show)	
	東京都立大学理学研究科	齋藤 暁 (SAITO Satoru)	
	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
23.	超楕円関数を解とする南部-ハミルトン方程式について		132
	横浜国立大学工学研究院	齋藤 革子 (SAITO Noriko)	
	東京都立大学理学研究科	齋藤 暁 (SAITO Satoru)	
	北里大学理学部	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
24.	リーマン幾何的アプローチによるヤンミルズ場方程式のカオス構造		138
	九州大学芸術工学研究院	河辺 哲次 (KAWABE Tetsuji)	
	九州大学芸術工学研究院	小柳 慎一郎 (KOYANAGI Shin-ichiro)	
25.	完全流体の運動のゲージ理論と変分原理		144
	南開数学研究所	神部 勉 (KAMBE Tsutomu)	
26.	Pfaffian による行列式の恒等式の統一化		148
	早稲田大学名誉教授	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
27.	Dynamics of gas sphere under self-gravity		157
	名古屋大学理学研究科	村田 宗一 (MURATA Souichi)	
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
28.	非自励な高次元可積分系について		163
	京都大学情報学研究科	小林 匡 (KOBAYASHI Tadashi)	
	富山県立大学工学部	戸田 晃一 (TODA Kouichi)	
29.	可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 Buegers 方程式		169
	富山県立大学工学部	戸田 晃一 (TODA Kouichi)	
	京都大学情報学研究科	小林 匡 (KOBAYASHI Tadashi)	

30. Exact vortex solution of the Faddeev model	176
富山大学理学部	平山 実 (HIRAYAMA Minoru)	
富山大学理学部	石 長光 (SHI Chang-Guang)	
31. Meron 解を実現するアイソベクトル スカラー場	182
富山大学理学部	山下 淳 (YAMASHITA Jun)	
富山大学理学部	平山 実 (HIRAYAMA Minoru)	
32. 連立非分散方程式の 2 ソリトン相互作用	188
富山大学工学部	角島 浩 (KAKUHATA Hiroshi)	
日本大学理工学部	紺野 公明 (KONNO Kimiaki)	
33. 非線形代数方程式系による多重ソリトン解の構成	194
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	
34. 非衝突ランダムウォーク、シューア関数、多層行列模	202
中央大学理工学部	香取 眞理 (KATORI Makoto)	
35. Schur measure の一般化と Tracy-Widom 分布	208
九州大学数理学府	松本 詔 (MATSUMOTO Sho)	
36. 可解格子模型と離散 Euler-Top	214
立教大学理学部	鈴木 敏之 (SUZUKI Toshiyuki)	
立教大学理学部	笥 三郎 (KAKEI Saburo)	
37. Okamoto 多項式の Hankel 行列式表示に付随する母関数	220
九州大学数理学府	後藤 弘道 (GOTO Hiromichi)	
九州大学数理学府	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
38. Pole expansion method for the elliptic Calogero system	227
同志社大学工学部	大宮 眞弓 (OHMIYA Mayumi)	
大阪産業大学教養	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
39. Beylkin 法によるウェーブレット変換を用いた数値シミュレーション	233
同志社大学工学研究科	宮川 昌也 (MIYAKAWA Masaya)	
同志社大学工学研究科	近藤 弘一 (KONDO Koichi)	
40. 確率微分方程式の非線形問題への応用	239
同志社大学工学部	増田 和己 (MASUDA Kazuki)	

マックスプラス型写像力学系 I

早稲田大学理工学研究科 矢吹学 (YABUKI Manabu)
早稲田大学理工学研究科 渡部浩幸 (WATABE Hiroyuki)
早稲田大学理工学研究科 助迫昌樹 (SUKESAKO Masaki)
早稲田大学理工学研究科 高橋大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

2 階の max 型の区分線型写像のうち、途中の時刻から周期解が現れるタイプについて特に取り上げ、解の挙動に関する解析結果を述べる。この際にリャプノフ関数を定義し、それが時間とともに広義単調減少であることを示す。証明はマックスプラス代数の基本的な計算公式を利用することで可能である。またリャプノフ関数によって、相平面における解の挙動を追跡することができる。さらに、相平面内には可積分領域と呼ぶ閉領域が存在し、領域外の解はすべて領域の境界に落ち込むことを写像の性質から明らかにする。なお、リャプノフ関数は内側の可積分領域では保存量になっている。さらに、まだ数値計算の段階であるが、2 階の max 型の区分線型写像において、カオスが現れるタイプについての解析を行った。これについても同様の仕掛けでカオス領域の境界に落ち込むことがわかった。

1 2 階の max 型の区分線型写像

2 階の max 型の区分線型写像

$$X_{n+1} = \max(a_0 X_n + b_0 X_{n-1} + c_0, a_1 X_n + b_1 X_{n-1} + c_1, \dots) \quad a_j, b_j, c_j \in \{-1, 0, 1\}$$

について、max 内の項が 2, 3 個の場合に解を相平面にプロットして方程式を分類し、それぞれを解析した。この結果、方程式を以下の 5 つのタイプに分類することができた。すなわち、

- 再帰方程式
- 可積分方程式
- 途中の時刻から周期解が現れる
- 発散解が現れる
- カオスが現れる

再帰方程式タイプ、可積分方程式タイプ、発散解が現れるタイプについては今回は省略する。以下では、途中の時刻から周期解が現れるタイプ、カオスが現れるタイプについて順に研究結果をまとめる。

2 周期解に落ち込むタイプ

途中から周期解に落ち込むタイプの式はたくさんあり、以下に例を示す。

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, -X_n - 1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, -1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} + 1, -X_n - 1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} + 1, -1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} + 1, -X_n - 1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} + 1, -1)$$

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1}, -X_n - 1)$$

⋮

この中から以下の式をとりあげる.

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, -X_n - 1)$$

適当な初期値から計算して順に並べると, 初期値 $X_0 = 6, X_1 = 5$ のとき

$$6, 5, -5, 4, 6, -3, 2, 4, \underline{-1, 0}, 2, 1, -1, 1, 2, 0, -1, 2, 2, \underline{-1, 0}, 2, 1, -1, 1, 2, \dots$$

また, 初期値 $X_0 = -8, X_1 = 7$ のとき

$$-8, 7, 9, -6, 5, 7, -4, 3, 5, -2, 1, 3, \underline{0, -1}, 2, 2, -1, 0, 2, 1, -1, 1, 2, \underline{0, -1}, 2, \dots$$

となり, とともに途中から周期 11 の周期解となる.

2.1 リャプノフ関数

次のリャプノフ関数を定義する.

$$F_n = \max(-X_{n-1}, -X_n, X_{n-1} - 1, X_n - 1, -X_{n-1} - X_n)$$

F_n は以下の計算により広義単調減少であることがわかる.

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= \max(-X_n, -X_{n+1}, X_n - 1, X_{n+1} - 1, -X_n - X_{n+1}) \\ &\quad - \max(-X_{n-1}, -X_n, X_{n-1} - 1, X_n - 1, -X_{n-1} - X_n) \end{aligned}$$

ここで, 元の式 $X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, -X_n - 1)$ を代入し, $\max(A, B, \frac{A+B}{2}) = \max(A, B)$ の公式を用いて式変形すると, さらに

$$\begin{aligned} F_{n+1} - F_n &= \max(\underline{0, -X_n, X_n - X_{n-1}, -2X_{n-1} + 1, -2X_n - 1, -2X_n - 2X_{n-1} + 1,} \\ &\quad \underline{-2X_n - X_{n-1} + 1, -X_n - X_{n-1} + 1}) \\ &\quad - \max(\underline{0, -X_n, X_n - X_{n-1}, -2X_{n-1} + 1, -2X_n - 1, -2X_n - 2X_{n-1} + 1,} \\ &\quad \underline{-2X_n - X_{n-1} + 1, -X_n - X_{n-1} + 1, -X_n + X_{n+1} - 2}) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

が得られる. よって, F_n は n について広義単調減少である.

2.2 相平面による解析

つぎに, 相平面による解析を行った結果について述べる. 図 1 は, 初期値を変えて相平面に解をプロットした結果である.

周期解に落ち込むメカニズムの典型例は以下の通りである. 図 2 は相平面上で P_1 を初期値にとったときの解の変遷を点の移動で表している. すなわち, 初期値 $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow P_{19}$ の順に移動して, 最終的に $P_9 \sim P_{19}$ の周期 11 の周期解に落ち込んでいる.

解の挙動を順に追ってみると, まず初期値 P_1 から P_4 までは, ある多角形上によって移動していることがわかる. 実はこの多角形は, 上で述べた広義単調減少なリャプノフ関数 $F_n = \text{const.}$ の等高線で表されている.

網掛け領域以外の白い領域では $F_{n+1} = F_n$ となり, F_n が n によって変わらない領域である. つまり, 解の点は次の時刻も同じ多角形上を移動する. 移動先はマッピングを忠実に調べれば見当がつき, 数ステップ後に写像点が網掛け領域に必ず入ることが確かめられる. この例では P_5 で網掛け領域に点が入ってくる. すると, 次の時刻 P_6 では内側の多角形上へ移動する. その理由は, この網掛け領域は $F_{n+1} < F_n$ となる領域であり, 次の時刻でのリャプノフ関数が減少するので, 今

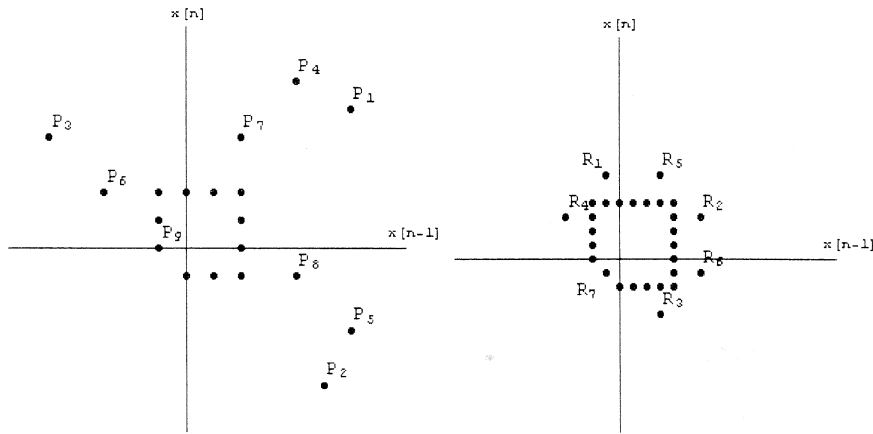


図 1: 初期値 6, 5 と初期値 $-\frac{1}{2}, 3$

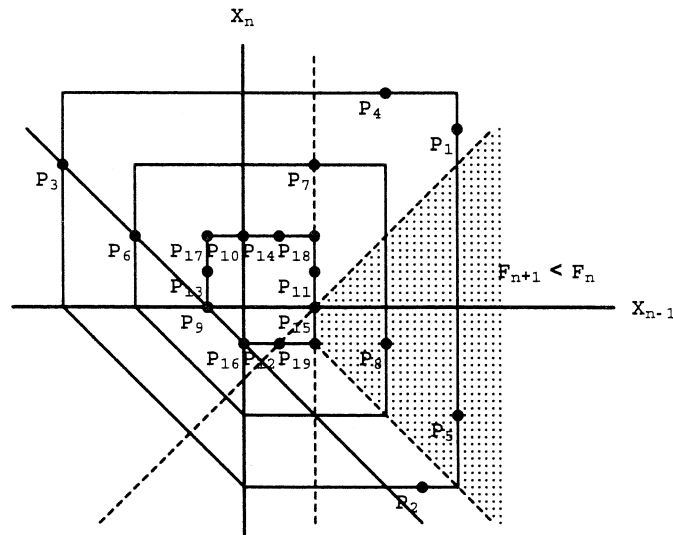


図 2: 周期解に落ち込むメカニズム

いる多角形上にいらなくなって内側の多角形上へ移動するわけである。なお、網掛け領域は開集合であり、境界は網掛け領域には含まれない。

以降 $P_6 \sim P_8$ は P_6 と同じ多角形上を移動し、 P_8 で再び網掛け領域に入るので、 P_9 はさらに内側の多角形へと移動する。そして、 $P_9, \dots, P_{19}, P_9, \dots, P_{19}$ の順に周期 11 で同じ多角形上を回り続ける。このとき網掛け領域は開集合であり、この多角形とは共有点を持たない。したがって、永遠に同じ多角形上にいつづける。なお、多角形上の任意の点が周期 11 の周期解になることも容易に示せる。

このメカニズムは、 $P_9 \sim P_{19}$ がのっている多角形よりも外側の領域の任意の点について同様であり、それらは写像を繰り返すことによって同じ多角形上にいつづけることはなく、必ず $P_9 \sim P_{19}$ がのっている多角形に落ち込んで周期 11 の周期解となる。

以上のことは、広義単調減少なリアプノフ関数を発見することで容易に解析ができたが、周期 11 の多角形よりも内側の領域ではこのリアプノフ関数は異なる役割を果たす。これについて次に述べる。

2.3 保存量

周期 11 の多角形よりも外側の領域ではすべて周期 11 の多角形に落ち込むが、その多角形よりもさらに内側の領域はどうなっているのか。実は、元の方程式の \max 中の項のうち効かない項がひとつあり、方程式自体が可積分方程式となる。したがって、内側の領域が可積分領域であることがわかる。すなわち、内部領域では

$$-X_n - X_{n-1} + 1 > -X_n - 1$$

が常に成り立ち、よって

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, -X_n - 1) \\ &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1) \end{aligned}$$

となる。これは可積分方程式である。詳しくは文献 [1] を参照してほしい。

このとき、外側の領域では広義単調減少のリアプノフ関数 F_n は、保存量に変わっている。つまり任意の時刻で $F_{n+1} = F_n$ となる。この結果から、前の節で述べた周期 11 で回る多角形というのは可積分領域の縁にあたるのがわかる。それよりも外側の領域は可積分領域の一番外側の境界に落ち込んでいたのである。

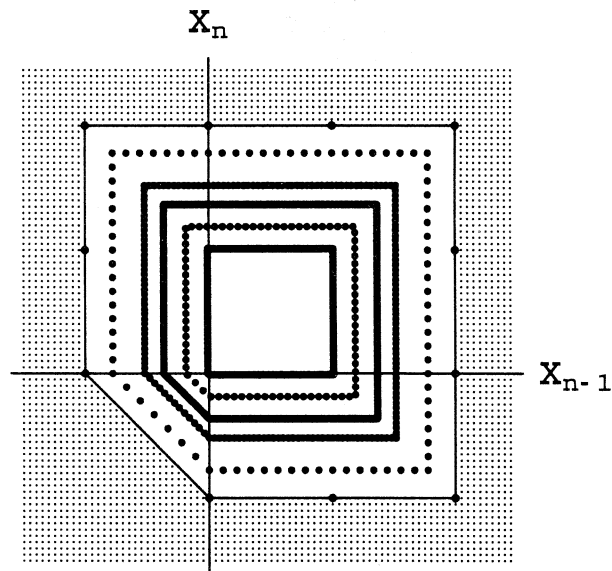


図 3: 内部の可積分領域

以上が、途中の時刻から周期解が現れるタイプの解析結果である。

3 カオスが現れるタイプ

カオスが現れるタイプについても、周期解が現れるタイプと同様にして解析を行った。ただし、以下は数値計算によって得られた結果であり、厳密な解析は今後の課題である。

カオスが現れる方程式のリストの一部を以下に示す。

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1}, -X_n - 1) \\ X_{n+1} &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} - 1) \\ X_{n+1} &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1}) \\ X_{n+1} &= \max(-X_n - X_{n-1} + 1, -X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1}) \\ &\vdots \end{aligned}$$

相平面による数値計算結果を以下に示す。ただし、初期値の点を適当に 10 個選び、得られた解を重ね合わせて描いている。

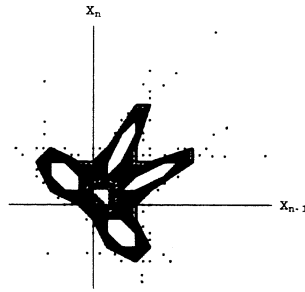


図 4: $X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1}, -X_n - 1)$ の相平面プロット

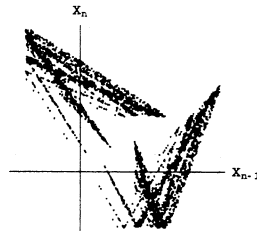


図 5: $X_{n+1} = \max(X_n - X_{n-1} - 1, -X_n + X_{n-1})$ の相平面プロット

上の方程式リストから、ここでは図 4 で取り上げた方程式

$$X_{n+1} = \max(-X_n - X_{n-1} + 1, X_n - X_{n-1}, -X_n - 1)$$

を取り上げる。途中から周期解が現れるタイプと同様のメカニズムで、カオスになっている内部領域よりも外側では、任意の点が内部領域の縁（のあたり）に落ち込むことが確かめられた。なお、今回の研究では、カオス領域自身についての解析は行わず、カオス領域の外側がどのようにカオス領域の縁に落ち込むかについてのみ解析した。

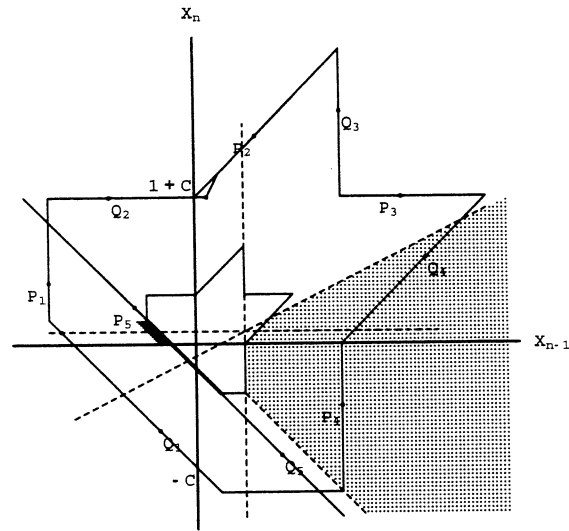


図 6: 内部領域の外側の縁に落ち込むメカニズム

図 6 に相平面の図がある。周期解に落ち込むメカニズムと同じ解析が行える。ただし、異なる特徴があり、カオス領域よりも外側の領域では、カオス領域を定義している境界の多角形にぴったりと落ち込むのではなく、2つの多角形に挟まれた領域に落ち込んでいる場合がある。以下の条件

$$0 < X_n < 1, \quad X_n > -X_{n-1} - 3/2, \quad X_n < -X_{n-1} - 1$$

を満たす領域は最終的にひとつの多角形上を動くのではなく、それより少しずれたところを移動して、最終的には図 7 に示す一番内側の多角形より少しだけ内側に入り込んだ面領域をとびとびに動き回る。

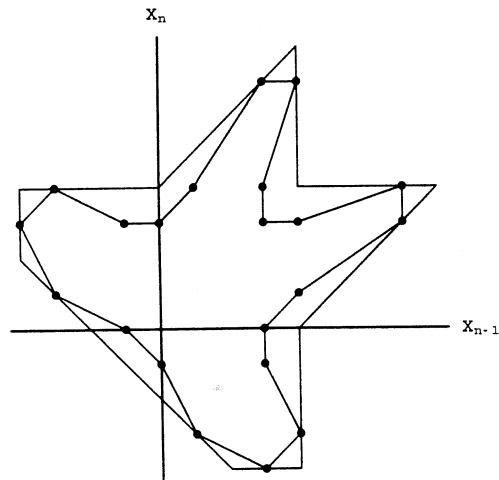


図 7: 2つの多角形に挟まれた領域に落ち込む

参考文献

- [1] 広田良吾・高橋大輔, “差分と超離散”, 共立出版 (2003)
- [2] 高橋大輔, “マッピングと多角形”, 数理科学 483 (2003) 29-34

マックス・プラス写像力学系 II

早稲田大学理工学部 渡部浩幸 (Watabe Hiroyuki)
矢吹学 (Yabuki Manabu)
助迫昌樹 (Sukesako Masaki)
高橋大輔 (Takahashi Daisuke)

1 はじめに

マックス・プラス写像力学系の解の構造について解説を行う. 方程式は

$$X_{n+1} = \max(\dots) - \max(\dots) \quad (1)$$

max 内の各項

$$\begin{cases} a_j X_n + b_j X_{n-1} + c_j \\ a_j, b_j, c_j \in \{-1, 0, 1\} \end{cases}$$

で与えられる. 今回, 特に任意の初期値から時間発展を行うと一定周期解に落ち込むタイプに着目して, その解構造について詳しく解析を行う.

2 途中から一定周期解に落ち込む系

式(1)の具体例として

$$X_{n+1} = \max(X_{n-1} + 1, X_n - 1) - \max(X_n - X_{n-1} - 1, X_n + X_{n-1}) \quad (2)$$

を取り上げる. 例えば適当な初期値から計算して順に並べると

$$7, 13, \underline{-8}, 9, -8, 9, -8, 9, -8, 9, -8, 9, \dots$$

$$-12, -10, -12, -6, -12, 2, \underline{-12}, 13, -12, 13, -12, 13, -12, 13, -12, \dots$$

となる. どちらの例でも下線を引いた所が繰り返しになるので, 途中の時刻から周期2の周期解に落ち込んでいることがわかる.

また最終的に落ち込む周期解の構造から, 最初から周期2であるための条件は

$$X_n + X_{n-1} - 1 = 0 \quad (3)$$

を満たしていることがわかる.

そこで式(3)の左辺に絶対値をつけたものを

$$F_n = |X_n + X_{n-1} - 1| \quad (4)$$

としたとき, F_n は式(2)より

$$F_n \geq F_{n+1}$$

となるので, 式(4)は式(2)のリアプノフ関数であることがわかる.

3 相平面上での解構造の解析

3.1 領域⑤, 領域⑥を除く各領域での写像

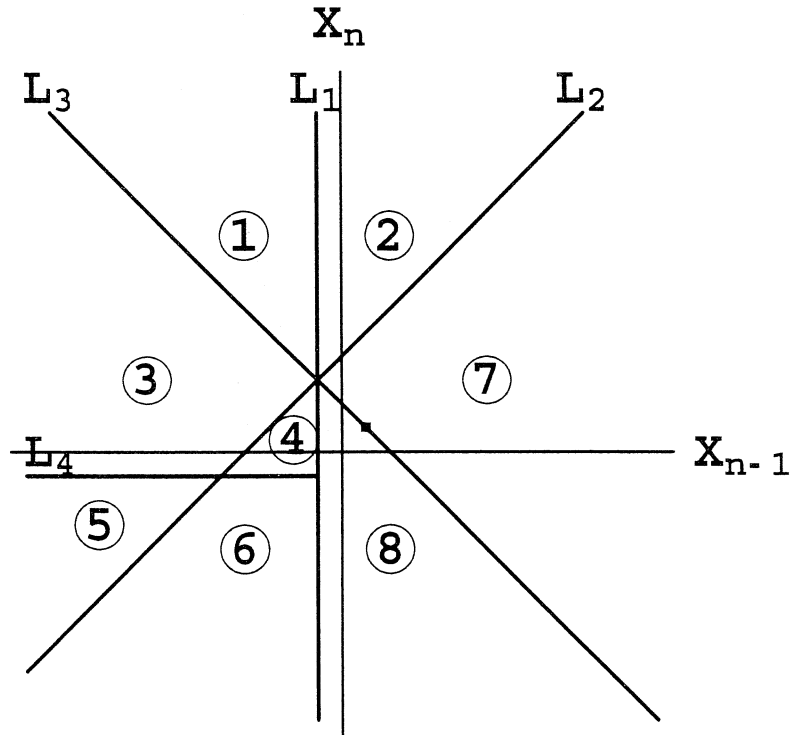


図 1: 相平面の分割

式 (2) について相平面上での解構造の解析を行う. 横軸を X_{n-1} , 縦軸を X_n とする. ここで

$$\begin{cases} L1 : X_{n-1} = -\frac{1}{2} \\ L2 : X_n = X_{n-1} + 2 \\ L3 : X_n + X_{n-1} - 1 = 0 \\ L4 : X_n = -\frac{1}{2} \quad (X_{n-1} \leq -\frac{1}{2}) \end{cases}$$

として, 図 1 のように相平面を 8 個の領域に分割すると各領域の写像は

$$\begin{aligned} \text{領域 ①, 及び領域 ②} &\Rightarrow \text{領域 ⑦} \\ \text{領域 ③, 及び領域 ④} &\Rightarrow \text{領域 ⑧} \\ \text{領域 ⑦, 及び領域 ⑧} &\Rightarrow L_3 \end{aligned}$$

となり, 領域⑤, 領域⑥を除く各領域は最終的に L_3 に落ち込み, 周期 2 の周期解となることがわかる.

3.2 領域⑤での写像

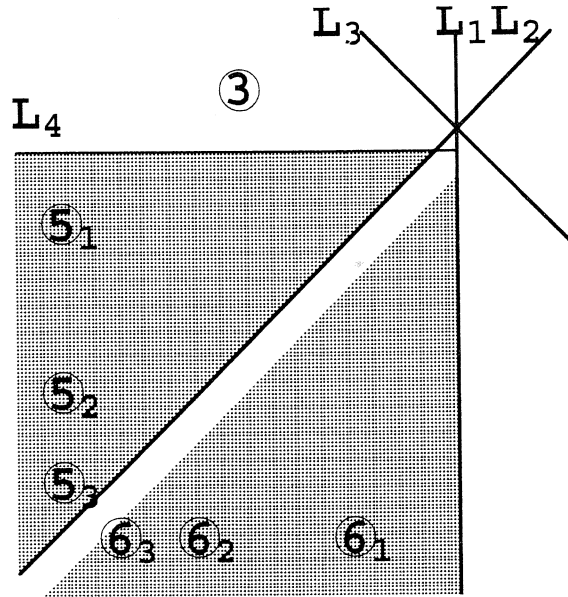


図 2: 領域⑤の分割

領域⑤の写像をたどるに差し当たって、まず L_2 上の点 $(-c, -c+2)$ を初期点として計算した X_n を順に並べると以下ようになる。

$$-c, -c+2, -c, -c+6, -c, -c+14, \dots, \\ -c, -c+2^{k+1}-2, \underline{-c, c+1}, -c, c+1, -c, c+1, -c, \dots$$

但し

$$\frac{5}{2} < c \leq 2^{k+1} - \frac{3}{2} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

となる最小の k とする。

この最小となる k を $k = K$ としたとき、領域⑤は次のように分割できる。

$$\textcircled{5} = \textcircled{5}_1 \cup \textcircled{5}_2 \cup \dots \cup \textcircled{5}_{K-2} \cup \textcircled{5}_{K-1}$$

分割された領域の写像は

$$\textcircled{5}_{K-1} \rightarrow \textcircled{6}_{K-1} \rightarrow \textcircled{5}_{K-2} \rightarrow \textcircled{6}_{K-2} \rightarrow \textcircled{5}_{K-3} \dots \\ \dots \textcircled{5}_3 \rightarrow \textcircled{6}_3 \rightarrow \textcircled{5}_2 \rightarrow \textcircled{6}_2 \rightarrow \textcircled{5}_1 \rightarrow \textcircled{6}_1 \rightarrow \textcircled{3}$$

となる。領域③は最終的に L_3 に落ち込むことがわかっているので、領域⑤も最終的に L_3 に落ち込み、周期 2 の周期解となる (図 2 参照)。

3.3 領域⑥での写像

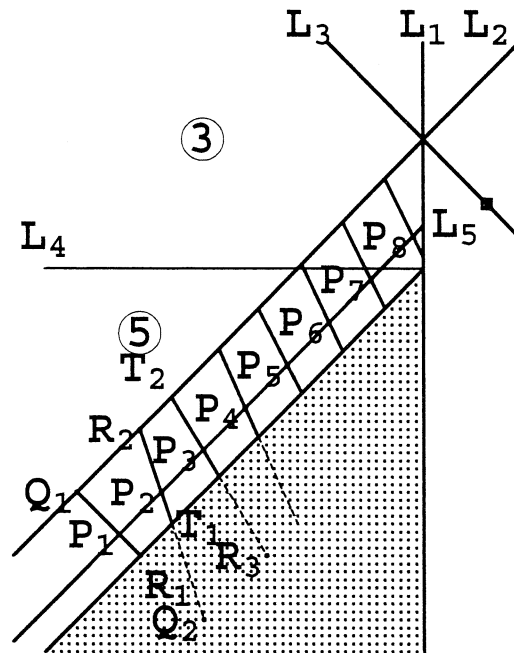


図 3: 領域⑥

領域⑥のなかで図3の斜線領域は領域⑤の写像などから、L3に落ち込むことが簡単にわかる。ここで新たに

$$L5: X_n = X_{n-1} + \frac{2}{3} \quad (X_{n-1} < -\frac{1}{2})$$

として、斜線領域を除いた領域の写像について解析を行う。L5上の点 $(-c, -c + 2/3)$ を初期点として計算した X_n を順に並べると以下ようになる。

$$-c, -c + \frac{2}{3}, -c + \frac{4}{3}, -c + 2, -c + \frac{8}{3}, \dots,$$

$$-c + \frac{2(k-1)}{3}, -c + \frac{2k}{3}, \underline{c - \frac{2k}{3} + 1}, -c + \frac{2k}{3}, c - \frac{2k}{3} + 1, -c + \frac{2k}{3}, \dots$$

但し

$$\frac{1}{2} < c \leq \frac{2k}{3} - \frac{1}{6} \quad (k = 2, 3, \dots)$$

となる最小の k とする。

例えばL5上に P_1 をとったとき、 P_1 の写像は

$$P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow \dots \rightarrow P_7 \rightarrow P_8 \text{ (領域④)}$$

となる。これは今まで示してきた落ち込む構造とは違ったものである。

このことを考慮して線分 Q_1R_1 の写像をみると線分 $Q_1R_1 \rightarrow$ 線分 Q_2R_2 となるが、線分 T_1Q_2 は斜線領域に入るので線分 T_1Q_2 はL3に落ち込むことがわかる。そこで新

たに線分 T_1R_2 の写像をみると線分 $T_1R_2 \rightarrow$ 線分 T_2R_3 となる. 先ほどと同じように線分 T_2R_3 の斜線領域に入った部分をカットして残りの線分の写像をみる. このことを繰り返していくことで, 残りの線分は最終的に領域 ④ にいくので, 線分 Q_1R_1 は最終的に L_3 に落ち込む (図 3 参照).

以上より, 領域 ⑥ も最終的に L_3 に落ち込むので, どの領域で初期点をとっても必ず周期 2 の周期解に落ち込むことがいえる.

4 逆超離散化

途中から周期 2 の周期解が現れるマックス・プラス方程式 (2) とそのリャプノフ関数 (4) のセットは以下のように逆超離散化することが可能である.

$$\begin{cases} X_{n+1} = \max(X_{n-1} + 1, X_n - 1) - \max(X_n - X_{n-1} - 1, X_n + X_{n-1}) \\ F_n = |X_n + X_{n-1} - 1| \end{cases}$$

$$\text{逆超離散化} \quad \Downarrow \quad x_n = e^{X_n/\varepsilon}, \quad c = e^{1/\varepsilon}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{cx_{n-1} + \frac{x_n}{c}}{\frac{x_n}{cx_{n-1}} + x_n x_{n-1}} \\ f_n = \frac{x_n x_{n-1}}{c} + \frac{c}{x_n x_{n-1}} \end{cases}$$

この f_n について逆超離散化された差分方程式を用いると

$$f_n - f_{n+1} = \frac{(c - x_n x_{n-1})^2 (c + x_n x_{n-1} + c^2 x_{n-1}^2)}{x_n (x_n + c^2 x_{n-1}) (1 + c x_{n-1}^2)}$$

となる. よって

$$f_n \geq f_{n+1} \quad (x_n > 0, c > 0)$$

となり, f_n が差分方程式のリャプノフ関数となっている. また f_n は $n \rightarrow \infty$ で最小値 2 に収束し, このとき

$$x_n = \frac{c}{x_{n-1}}$$

となり, これは周期 2 の再帰方程式となるので式 (3) ときれいに対応している.

以上から超離散の世界および差分の世界で並行的な漸近解構造を持つことがいえた.

5 結論

今回, 任意の初期値から時間発展を行うと途中から周期2の周期解に落ち込むマックス・プラス方程式をとりあげてその解構造について詳しく解析した. その際, 方程式から定まるいくつかの領域に相平面を分割し, どの領域がどの領域に写像されるかを忠実に調べることで, 初期値からの時間発展を把握することに成功した. さらに最終的に落ち込む周期解の構造からリアプノフ関数を推測し, 実際にそれが時間とともに広義単調減少であることを示した.

また, 方程式とリアプノフ関数の逆超離散化を行うことによって, 差分方程式およびそれに付随するリアプノフ関数を得ることができた. その差分方程式においても, 時間無限大の極限でマックス・プラス方程式と同様に周期2の周期解に漸近することがわかった. 以上のように, 超離散および差分で並行的な漸近解構造を持つことに成功した.

参考文献

- [1] 広田良吾・高橋大輔, 『差分と超離散』, (共立出版, 2003)
- [2] 高橋大輔, 超離散化された波, 数理科学 4月号 478(2003)35-40