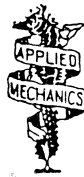


研究集会報告 15 ME-S3

非線形波動および非線形力学系の
数理とその応用



九州大学応用力学研究所

2004 年 4 月

Reports of RIAM Symposium

No.15ME-S3

Mathematical Theories and Applications of Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamics

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 12 - 14, 2003

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

April, 2004

研究集会「非線形波動および非線形力学系の数理とその応用」報告集

2003年11月12日～14日

研究代表者 龍谷大学理工学部 松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)

目 次

1. KPZ 成長界面におけるノイズ項の修正と多重アフィン解析 1
九州大学総合理工学研究院 桂木 洋光 (KATSURAGI Hiroaki)
九州大学総合理工学研究院 本庄 春雄 (HONJO Haruo)
2. 鉄-硝酸化学振動反応とその相互作用 7
横浜国立大学工学府 小松 隆明 (KOMATSU Takaaki)
横浜国立大学工学研究院 石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)
3. 時系列データの短時間フラクタル次元解析 13
同志社大学工学研究科 林 順 (HAYASHI Sunao)
4. シア一流れ下での結晶成長における固液界面の形態不安定性 19
九州大学応用力学研究所 上之 和人 (UENO Kazuto)
5. 周期ポテンシャル項をもつ非線形シュレディンガー方程式のソリトン 26
九州大学総合理工学研究院 坂口 英継 (SAKAGUCHI Hidetsugu)
6. ボーズアインシュタイン凝縮系に対する3次元GP方程式の数値解法 31
日本原子力研究所計算科学 佐々 成正 (SASA Narimasa)
日本原子力研究所計算科学 町田 昌彦 (MACHIDA Masahiko)
筑波大学物理学系 松本 秀樹 (MATSUMOTO Hideki)
7. 二次元非線形はしご型回路に関する実験 37
横浜国立大学工学府 岸 寛之 (KISHI Hiroyuki)
横浜国立大学工学研究院 渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
8. プラズマを媒質としたカオス現象の観測と応用実験 43
九州大学総合理工学府 福山 隆雄 (FUKUYAMA Takao)
九州大学総合理工学研究院 河合 良信 (KAWAI Yoshinobu)
9. Fibonacci 多項式の q -類似 49
立教大学理学部 青木 俊一郎 (AOKI Shun-ichirou)
立教大学理学部 笥 三郎 (KAKEI Saburo)

10. 一般化固有値問題に付随した離散可積分系の行列式構造について	55
京都大学情報学研究科	向平 敦史 (MUKAIHIRA Atsushi)
京都大学情報学研究科	辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)
11. 戸田方程式の変数分離解と組合せ論的数	58
京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)
Donetsk Inst. Phys. Tech.	Alexei ZHEDANOV
京都大学情報学研究科	大平 倫宏 (OHIRA Norihiro)
12. Biorthogonal rational functions and explicit Padé interpolation tables	64
Donetsk Inst. Phys. Tech.	Alexei ZHEDANOV
13. マックス・プラス型写像力学系 I	70
早稲田大学理工学研究科	矢吹 学 (YABUKI Manabu)
早稲田大学理工学研究科	渡部 浩幸 (WATANABE Hiroyuki)
早稲田大学理工学研究科	助迫 昌樹 (SUKESAKO Masaki)
早稲田大学理工学研究科	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
14. マックス・プラス型写像力学系 II	76
早稲田大学理工学研究科	渡部 浩幸 (WATANABE Hiroyuki)
早稲田大学理工学研究科	矢吹 学 (YABUKI Manabu)
早稲田大学理工学研究科	助迫 昌樹 (SUKESAKO Masaki)
早稲田大学理工学研究科	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
15. 周期境界をもつセルオートマトンの可逆性について	82
東京大学数理科学研究科	野邊 厚 (NOBE Atsushi)
16. Sine-Gordon 方程式のある超離散化	88
東京大学数理科学研究科	磯島 伸 (ISOJIMA Shin)
東京大学数理科学研究科	村田 実貴生 (MURATA Mikio)
東京大学数理科学研究科	野邊 厚 (NOBE Atsushi)
東京大学数理科学研究科	薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)
17. 一般化された箱玉系の粒子・反粒子的アルゴリズム	94
東京大学総合文化研究科	竹野内 晃 (TAKENOUCI Akira)
東京大学総合文化研究科	国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)
防衛大学校応用物理学科	高木 太一郎 (TAKAGI Taichiro)
18. 周期箱玉系と ndKP 方程式	100
東京大学数理科学研究科	間田 潤 (MADA Jun)
東京大学数理科学研究科	時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)
島根大学教育学部	泉 誠 (IDZUMI Makoto)

19.	蟻の巣の形成に関するシミュレーション	107
	横浜国立大学工学府	小田 充志 (ODA Atsushi)	
	横浜国立大学工学研究院	石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)	
20.	セルオートマトンによる人と蟻の集団行動の解析	113
	龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)	
21.	カオス現象研究黎明期の一実録	119
	はこだて未来大学システム情報科学部	上田 暁亮 (UEDA Yoshisuke)	
22.	Analytical study of integrable-nonintegrable transition of shifted KdV map	126
	東京都立大学理学研究科	小野澤 祥 (ONOZAWA Show)	
	東京都立大学理学研究科	齋藤 暁 (SAITO Satoru)	
	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
23.	超楕円関数を解とする南部-ハミルトン方程式について	132
	横浜国立大学工学研究院	齋藤 革子 (SAITO Noriko)	
	東京都立大学理学研究科	齋藤 暁 (SAITO Satoru)	
	北里大学理学部	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
24.	リーマン幾何的アプローチによるヤンミルズ場方程式のカオス構造	138
	九州大学芸術工学研究院	河辺 哲次 (KAWABE Tetsuji)	
	九州大学芸術工学研究院	小柳 慎一郎 (KOYANAGI Shin-ichiro)	
25.	完全流体の運動のゲージ理論と変分原理	144
	南開数学研究所	神部 勉 (KAMBE Tsutomu)	
26.	Pfaffian による行列式の恒等式の統一化	148
	早稲田大学名誉教授	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
27.	Dynamics of gas sphere under self-gravity	157
	名古屋大学理学研究科	村田 宗一 (MURATA Souichi)	
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
28.	非自励な高次元可積分系について	163
	京都大学情報学研究科	小林 匡 (KOBAYASHI Tadashi)	
	富山県立大学工学部	戸田 晃一 (TODA Kouichi)	
29.	可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 Buegers 方程式	169
	富山県立大学工学部	戸田 晃一 (TODA Kouichi)	
	京都大学情報学研究科	小林 匡 (KOBAYASHI Tadashi)	

3 0. Exact vortex solution of the Faddeev model	176
富山大学理学部	平山 実 (HIRAYAMA Minoru)	
富山大学理学部	石 長光 (SHI Chang-Guang)	
3 1. Meron 解を実現するアイソベクトル スカラー場	182
富山大学理学部	山下 淳 (YAMASHITA Jun)	
富山大学理学部	平山 実 (HIRAYAMA Minoru)	
3 2. 連立非分散方程式の 2 ソリトン相互作用	188
富山大学工学部	角島 浩 (KAKUHATA Hiroshi)	
日本大学理工学部	紺野 公明 (KONNO Kimiaki)	
3 3. 非線形代数方程式系による多重ソリトン解の構成	194
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	
3 4. 非衝突ランダムウォーク、シューア関数、多層行列模	202
中央大学理工学部	香取 眞理 (KATORI Makoto)	
3 5. Schur measure の一般化と Tracy-Widom 分布	208
九州大学数理学府	松本 詔 (MATSUMOTO Sho)	
3 6. 可解格子模型と離散 Euler-Top	214
立教大学理学部	鈴木 敏之 (SUZUKI Toshiyuki)	
立教大学理学部	笥 三郎 (KAKEI Saburo)	
3 7. Okamoto 多項式の Hankel 行列式表示に付随する母関数	220
九州大学数理学府	後藤 弘道 (GOTO Hiromichi)	
九州大学数理学府	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
3 8. Pole expansion method for the elliptic Calogero system	227
同志社大学工学部	大宮 眞弓 (OHMIYA Mayumi)	
大阪産業大学教養	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
3 9. Beylkin 法によるウェーブレット変換を用いた数値シミュレーション	233
同志社大学工学研究科	宮川 昌也 (MIYAKAWA Masaya)	
同志社大学工学研究科	近藤 弘一 (KONDO Koichi)	
4 0. 確率微分方程式の非線形問題への応用	239
同志社大学工学部	増田 和己 (MASUDA Kazuki)	

Pfaffianによる行列式の恒等式の一般化

早稲田大学 名誉教授 広田良吾 (HIROTA Ryogo)

1 概要

Pfaffian の基本的恒等式 (Ohta's identity) より

1) Plücker's relation

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} |\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{N-1} \mathbf{b}_j| |\mathbf{a}_1 \dots \mathbf{a}_{N-n+1} \mathbf{b}_1 \dots \mathbf{b}_{j-1} \mathbf{b}_{j+1} \dots \mathbf{b}_n| = 0$$

2) Sylvester theorem (i), (ii), (iii)

$$\begin{aligned} \text{(i) } \quad & |\Delta_{j,k}|_{1 \leq j, k \leq m-n} = C_m (C_n)^{m-n-1} \\ \text{(ii) } \quad & |D_{j,k}|_{n+1 \leq j, k \leq m} = A_n (A_m)^{m-n-1}, \\ \text{(iii) } \quad & |G(j, k)|_{1 \leq j, k \leq n} = (-1)^{(m-n)n} B_{m,n} (B_m)^{n-1} \end{aligned}$$

が生成される。

2 行列式とパフィアンの恒等式

行列式の恒等式としてよく知られているヤコビの等式, プリュッカーの関係式やシルベスターの定理 1, 2 などがある。これらの恒等式はすべてパフィアンの恒等式 (Ohta's identity) から統一的にしかも簡明に導かれることを示す。

2.1 ヤコビの等式

n 次の行列式 D から j 行、 k 列を除いて作った $n-1$ 次の行列式を $D \binom{j}{k}$ で表す。同じように n 次の行列式 D から i, j 行、 k, l 列を除いて作った $n-2$ 次の行列式を $D \binom{i, j}{k, l}$ で表す。このとき次の恒等式が成り立つ。

$$D D \binom{i, j}{k, l} = D \binom{i}{k} D \binom{j}{l} - D \binom{i}{l} D \binom{j}{k}, \quad i < j, k < l \quad (1)$$

これをヤコビの等式という。

2.2 プリュッカーの関係式

プリュッカーの関係式とは N 次の行列式の間で成り立つ次の関係式である。

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{N-1} \mathbf{b}_j| |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{N-n+1} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{j-1} \mathbf{b}_{j+1} \cdots \mathbf{b}_n| = 0, \quad (2)$$

ここで $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ は列ベクトル

$$\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{Nj})^T, \quad \mathbf{b}_j = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{Nj})^T$$

である。たとえば $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} & |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{b}_1| |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3| \\ & - |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{b}_2| |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_3| \\ & + |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{b}_3| |\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-2}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2| = 0 \end{aligned}$$

となる。

2.3 行列式に対するシルベスターの定理 1

小行列式を成分とする行列式を考える。

C_m を m 次の行列式 $C_m = |c_{j,k}|_{1 \leq j,k \leq m}$ とする。 $m > n$ として、 C_n を n 次の行列式 $C_n = \det |c_{j,k}|_{1 \leq j,k \leq n}$ とする。さらに $n+1$ 次の小行列式 $\Delta_{j,k}$ をつぎのように導入する。 $\Delta_{j,k}$ は C_n より 1 つだけ大きい行列式で、 n 次の行列式 C に第 $n+j$ 行と第 $n+k$ 列で縁をつけた $n+1$ 次の行列式である。

$$\Delta_{j,k} = \begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} & c_{1,n+k} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} & c_{2,n+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} & c_{n,n+k} \\ c_{n+j,1} & c_{n+j,2} & \cdots & c_{n+j,n} & c_{n+j,n+k} \end{vmatrix}$$

小行列式 $\Delta_{j,k}$ を成分とする $m-n$ 次の行列式を考える。このとき次の恒等式が成り立つ。

$$|\Delta_{j,k}|_{1 \leq j,k \leq m-n} = C_m (C_n)^{m-n-1}$$

これが行列式に対するシルベスターの定理 1 である。

シルベスターの定理 1 で $m = n+2$ の場合、

$$C_{n+2} = |c_{j,k}|_{1 \leq j,k \leq n+2} \equiv D$$

と置くと、

$$C_n = D\begin{pmatrix} n+1, n+2 \\ n+1, n+2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{1,1} = D\begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{1,2} = D\begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{2,1} = D\begin{pmatrix} n+1 \\ n+2 \end{pmatrix}, \quad \Delta_{2,2} = D\begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}$$

と表せるので、シルベスターの定理 1 は ヤコビ の等式 (1)

$$D\begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n+2 \\ n+2 \end{pmatrix} - D\begin{pmatrix} n+1 \\ n+1 \end{pmatrix} D\begin{pmatrix} n+2 \\ n+1 \end{pmatrix} = D D\begin{pmatrix} n+1, n+2 \\ n+1, n+2 \end{pmatrix}$$

になる。

2.4 行列式に対するシルベスターの定理 2

行列式の余因子を成分とする行列式を考える。

A_m を m 次の行列式とする。

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

行列式 A_m の余因子 $D_{j,k}$ ($n+1 \leq j, k \leq m$) を成分とする $m-n$ 次の行列式を考える。
このとき次の恒等式が成り立つ。

$$|D_{j,k}|_{n+1 \leq j, k \leq m} = A_n (A_m)^{m-n-1}, \quad m > n$$

これをシルベスターの定理 2 と呼ぶ。

シルベスターの定理 2 も $m = n+2$ の場合, $A_{n+2} = \det |a_{j,k}|_{1 \leq j, k \leq n+2} \equiv D$ と置くとヤコビの等式 (1) になる。

2.5 行列式に対するシルベスターの定理 3

B_m を m 次の行列式とする。

$$B_m = |b(j, k)|_{1 \leq j, k \leq m} = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m|$$

ここで \mathbf{b}_j は列ベクトル $\mathbf{b}_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, \cdots, b_{m,j})^T$ である。 m 次の行列式 $B_m = |b_{j,k}|_{1 \leq j, k \leq m}$ で行の番号 k を $k+n$ に置き換えた行列式を $B_{m,n}$ (n は自然数) とする、すなわち

$$B_{m,n} = |\mathbf{b}_{1+n}, \mathbf{b}_{2+n}, \cdots, \mathbf{b}_{m+n}|$$

である。次に行列式 B_m で j 列を $m+k$ 列に置き換えた新しい行列式 $G(j, k)$

$$G(j, k) = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_{m+k}, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_m|$$

を考え、行列式 $G(j, k)$ を成分とする n 次の行列式を作る。このとき次の恒等式が成り立つ。

$$|G(j, k)|_{1 \leq j, k \leq n} = (-1)^{(m-n)n} B_{m,n} (B_m)^{n-1}$$

これをシルベスターの定理 3 と呼ぶ。 $n = 2$ の場合、各行列式は次のように表せる

$$\begin{aligned} G(1, 1) &= |\mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m|, & G(1, 2) &= |\mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| \\ G(2, 1) &= |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m|, & G(2, 2) &= |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m|, \\ B_{m,2} &= |\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}|, & B_m &= |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| \end{aligned}$$

ので、シルベスターの定理 3 は

$$\begin{aligned} &|\mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| \\ &- |\mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| \\ &- |\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}| |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m| = 0 \end{aligned}$$

となる。ここで共通な文字列 $\{\mathbf{b}_3, \dots, \mathbf{b}_m\}$ を $\{-----\}$ で表し並べ替えると、上式は

$$\begin{aligned} &|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, -----| |-----, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}| \\ &- |\mathbf{b}_1, -----, \mathbf{b}_{m+1}| |\mathbf{b}_2, -----, \mathbf{b}_{m+2}| \\ &+ |\mathbf{b}_1, -----, \mathbf{b}_{m+2}| |\mathbf{b}_2, -----, \mathbf{b}_{m+1}| = 0 \end{aligned}$$

となる。これは プリュッカー の関係式 (2) である。

シルベスターの定理 3 は新しく発見したものであるが、行列式の歴史は古いので、ほんとうに新しい定理である可能性は非常に少ない。

3 パフィアンの恒等式

パフィアンにはいろいろな恒等式がある。これらの恒等式を使ってプリュッカー の関係式シルベスター の定理 1,2,3 が証明される。

3.1 基本的恒等式

次の恒等式

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^M (-1)^j \text{pf}(b_0, b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_M) \text{pf}(b_j, c_0, c_1, \dots, c_N) \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \text{pf}(b_0, b_1, \dots, b_M, c_k) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N) \end{aligned} \quad (3)$$

は太田泰広氏（神戸大学）によって発見された¹。この恒等式はほとんど自明で、左辺の $\text{pf}(b_j, c_0, c_1, \dots, c_N)$ を最初の文字 b_j について展開し、右辺の $\text{pf}(b_0, b_1, \dots, b_M, c_k)$ を最後の文字 c_k について展開すると、式 (3) は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^M (-1)^j \sum_{k=0}^N (-1)^k \text{pf}(b_0, b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_M) \times \text{pf}(b_j, c_k) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N) \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \sum_{j=0}^M (-1)^j \text{pf}(b_0, b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_M) \times \text{pf}(b_j, c_k) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N) \end{aligned}$$

となる。この式は和の順序を入れ替えただけなので確かに恒等式である。

3.2 Ohta's identity

基本的恒等式は任意の文字列 $1, 2, \dots, 2n$ を同次的に追加しても成り立つ。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^M (-1)^j \text{pf}(b_0, b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_M, 1, 2, \dots, 2n) \text{pf}(b_j, c_0, c_1, \dots, c_N, 1, 2, \dots, 2n) \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \text{pf}(b_0, b_1, \dots, b_M, 1, 2, \dots, 2n, c_k) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N, 1, 2, \dots, 2n) \quad (4) \end{aligned}$$

この恒等式を Ohta's identity と呼ぶ。証明は簡単で基本的恒等式で、 $M \rightarrow M + 2n, N \rightarrow N + 2n$ と置き換えると、

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{M+2n} (-1)^j \text{pf}(b_0, b_1, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_M, b_{M+1}, \dots, b_{M+2n}) \text{pf}(b_j, c_0, c_1, \dots, c_N, c_{N+1}, \dots, c_{N+2n}) \\ &= \sum_{k=0}^{N+2n} (-1)^k \text{pf}(b_0, b_1, \dots, b_M, b_{M+1}, \dots, b_{M+2n}, c_k) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N, c_{N+1}, \dots, c_{N+2n}) \end{aligned}$$

となる。ここで $b_{M+k} = c_{N+k} = k, (k = 1, 2, \dots, 2n)$ と置くと、 $j = M+1, M+2, \dots, M+2n$ のとき、文字が重複するので、 $\text{pf}(b_j, c_0, c_1, \dots, c_N, c_{N+1}, \dots, c_{N+2n}) = 0$ である。どうようにして $k = N+1, N+2, \dots, N+2n$ のとき $\text{pf}(b_0, b_1, \dots, b_M, b_{M+1}, \dots, b_{M+2n}, c_k) = 0$ である。したがって式 (4) が成り立つ。

Ohta's identity は $M = 0$ のとき、恒等式

$$\begin{aligned} & \text{pf}(1, 2, \dots, 2n) \text{pf}(b_0, c_0, c_1, c_2, \dots, c_N, 1, 2, \dots, 2n) \\ &= \sum_{k=0}^N (-1)^k \text{pf}(b_0, c_k, 1, 2, \dots, 2n) \text{pf}(c_0, c_1, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_N, 1, 2, \dots, 2n) \quad (5) \end{aligned}$$

を与える。

¹ 太田泰広: *Bilinear Theory of Soliton*, 博士論文（東京大学工学部 1992）

4 プリュッカーの関係式の証明

基本的恒等式で, $L = N - 1$, $M = N + 1$ と置き, 文字列 $1, 2, \dots, N$ を同次的に追加すると, Ohta's identity は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \text{pf}(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N) \text{pf}(a_j, c_1, c_2, \dots, c_{N+1}, 1, 2, \dots, N) \\ &= \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^k \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N, c_k) \text{pf}(c_1, c_2, \dots, \hat{c}_k, \dots, c_{N+1}, 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

となる。さらに ($N \geq n$)

$$c_j = a_j, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, N - n + 1), \quad c_{N-n+1+k} = b_k, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

と置くと, 上式は

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{N-1} (-1)^j \text{pf}(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N) \\ & \quad \times \text{pf}(a_j, a_1, a_2, \dots, a_{N-n+1}, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, 1, 2, \dots, N) \\ &= \sum_{k=1}^{N-n+1} (-1)^k \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N, a_k) \\ & \quad \times \text{pf}(a_1, a_2, \dots, \hat{a}_k, \dots, a_{N-n+1}, b_1, b_2, \dots, b_n, 1, 2, \dots, N) \\ & \quad + \sum_{k=1}^m (-1)^{N-n+1+k} \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N, b_k) \\ & \quad \times \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-n+1}, b_1, b_2, \dots, \hat{b}_k, \dots, b_n, 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

となる。上式で $\text{pf}(\dots)$ の中で同じ文字が現れる項は 0 となるので

$$\begin{aligned} & \sum_{j=N-n+2}^{N-1} (-1)^j \text{pf}(a_1, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N) \\ & \quad \times \text{pf}(a_j, a_1, a_2, \dots, a_{N-n+1}, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, 1, 2, \dots, N) \\ &= (-1)^{N-n} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, 1, 2, \dots, N, b_k) \\ & \quad \times \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_{N-n+1}, b_1, b_2, \dots, \hat{b}_k, \dots, b_n, 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

を得る。ここでパフィアンの成分を

$$\text{pf}(a_j, k) = a_{kj}, \quad \text{pf}(b_j, k) = b_{kj}, \quad \text{pf}(a_j, a_k) = \text{pf}(b_j, b_k) = \text{pf}(j, k) = 0$$

と選んでパフィアンを行列式に変換する。上式の左辺をよく見ると, 文字 a_j の数が数字 $1, 2, \dots, N$ の数より 2 つ少ないので, 残された数字同志のパフィアンが 0 となるため, 左辺は 0 となる。結局 Ohta's identity は プリュッカー の関係式 (2)

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{N-1} \mathbf{b}_j| |\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{a}_{N-n+1} \mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{b}_{j-1} \mathbf{b}_{j+1} \cdots \mathbf{b}_n| = 0$$

に変換された。証明終り。

5 シルベスターの定理の証明

Ohata's identity からシルベスターの定理 1,2,3 が導かれることを示す。

5.1 補助定理

シルベスターの定理を証明するためには次の補助定理が必要となる。
任意の自然数 l, n に対して次の等式が成り立つ。

$$\text{pf}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2l}) = \text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{2l}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) [\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})]^{l-1} \quad (6)$$

ここで $\text{pf}(\beta_j, \beta_k) \equiv \text{pf}(b_j, b_k, c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ である。

証明は簡単で数学的帰納法を使う。 $l = 2$ のときパフィアンの恒等式 (5) より等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \text{pf}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \text{pf}(b_1, b_2, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(b_3, b_4, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ &\quad - \text{pf}(b_1, b_3, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(b_2, b_4, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ &\quad + \text{pf}(b_1, b_4, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(b_2, b_3, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ &= \text{pf}(b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n}). \end{aligned}$$

等式が $l - 1$ で成り立つと仮定する。

$$\text{pf}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2(l-1)}) = \text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{2(l-1)}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) [\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})]^{l-2} \quad (7)$$

そのとき

$$\begin{aligned} \text{pf}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2l}) &= \sum_{j=2}^l (-1)^j \text{pf}(\beta_1, \beta_j) \text{pf}(\beta_2, \beta_3, \dots, \hat{\beta}_j, \dots, \beta_{2l}) \\ &= \sum_{j=2}^l (-1)^j \text{pf}(b_1, b_j, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(b_2, b_3, \dots, \hat{b}_j, \dots, b_{2l}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ &\quad \times \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})^{l-2} \end{aligned}$$

となるが、ここで展開式

$$\text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{2l}) = \sum_{j=2}^{2l} (-1)^j \text{pf}(b_1, b_j) \text{pf}(b_2, \dots, b_j, \dots, b_{2l})$$

に文字 c_1, c_2, \dots, c_{2n} 同次的に付け加えた恒等式

$$\begin{aligned} &\text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{2l}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \\ &= \sum_{j=2}^{2l} (-1)^j \text{pf}(b_1, b_j, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \text{pf}(b_2, \dots, b_j, \dots, b_{2l}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \end{aligned}$$

を使うと等式

$$\text{pf}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2l}) = \text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{2l}, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) [\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})]^{l-1}$$

が得られる。証明終り。

この補助定理は文字列 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{2l}$ を文字列 $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_l, \beta_l$ に置き換えると

$$\text{pf}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_l, \beta_l) = \text{pf}(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_l, b_l, c_1, c_2, \dots, c_{2n}) [\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})]^{l-1} \quad (8)$$

となる。この補助定理 (8) から以下のようにシルベスターの定理 1,2,3 が導かれる。

5.2 シルベスターの定理 1,2,3

シルベスターの定理 1,2,3 を証明する。先ず定理 1,2,3 に対応するパフィアン $\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n})$ を次のように書き直す。

$$(i) \quad \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \rightarrow \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_n, c^*_n, \dots, c^*_2, c^*_1) \equiv C_n \quad (9)$$

$$(ii) \quad \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \rightarrow \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_n, a^*_n, \dots, a^*_2, a^*_1) \equiv A_n \quad (10)$$

$$(iii) \quad \text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_{2n}) \rightarrow \text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1) \equiv B_m \quad (11)$$

シルベスターの定理 1,2,3 の違いは $\text{pf}(\alpha_j, \beta_k)$ の違いである。対応する $\text{pf}(\alpha_j, \beta_k)$ は次のようになる。

$$(i) \quad \text{pf}(\alpha_j, \beta_k) \rightarrow \text{pf}(c_{n+j}, c^*_{n+k}, c_1, c_2, \dots, c_n, c^*_n, \dots, c^*_2, c^*_1)$$

$$(ii) \quad \text{pf}(\alpha_j, \beta_k) \rightarrow \text{pf}(d_j, d^*_k, a_1, a_2, \dots, a_n, a^*_n, \dots, a^*_2, a^*_1)$$

$$(iii) \quad \text{pf}(\alpha_j, \beta_k) \rightarrow \text{pf}(d_j, b_{m+k}, b_1, b_2, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1) \\ = -\text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_{m+k}, b_{j+1}, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1)$$

ここに現れた新しい文字 d_j, d^*_k を使ったパフィアンは今のところ任意である。後で定める。このとき補助定理 (8) によって

$$(i) \quad \text{pf}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_{m-n}, \beta_{m-n}) \\ = \text{pf}(c_{n+1}, c^*_{n+1}, c_{n+2}, c^*_{n+2}, \dots, c_m, c^*_m, c_1, c_2, \dots, c_n, c^*_n, \dots, c^*_2, c^*_1) \\ \times [\text{pf}(c_1, c_2, \dots, c_n, c^*_n, \dots, c^*_2, c^*_1)]^{m-n-1}$$

$$(ii) \quad \text{pf}(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \alpha_{n+2}, \beta_{n+2}, \dots, \alpha_m, \beta_m) \\ = \text{pf}(d_{n+1}, d^*_{n+1}, d_{n+2}, d^*_{n+2}, \dots, d_m, d^*_m, a_1, a_2, \dots, a_n, a^*_n, \dots, a^*_2, a^*_1) \\ \times [\text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_n, a^*_n, \dots, a^*_2, a^*_1)]^{m-n-1}$$

$$(iii) \quad \text{pf}(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_n, \beta_n) \\ = \text{pf}(d_1, b_{1+m}, d_2, b_{2+m}, \dots, d_n, b_{n+m}, b_1, b_2, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1) \\ \times \{\text{pf}(b_1, b_2, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1)\}^{n-1}$$

が得られる。これらがパフィアン版のシルベスターの定理 1,2,3 である。
 ここで新しい文字 d_j, d_k^* を使ったパフィアンを次のように定める。

$$\begin{aligned} \text{pf}(d_j, a_k) &= \text{pf}(d_j^*, a^*_k) = \delta_{j,k}, \quad \text{pf}(d_j, a^*_k) = \text{pf}(d_j^*, a_k) = 0, \\ \text{pf}(d_j, d_k) &= \text{pf}(d_j^*, d_k^*) = 0 \end{aligned}$$

例えば $\text{pf}(d_2, a_1, a_2, a^*_2) = -\text{pf}(a_1, a^*_2)$, $\text{pf}(d_2^*, a_1, a_2, a^*_2) = \text{pf}(a_1, a_2)$ となるので、符号を無視すると、文字 d_j は文字 b_j を、文字 d_k^* は文字 b^*_k を消去する働きがある。また

$$\text{pf}(d_j, b_k) = \delta_{j,k}, \quad \text{pf}(d_j, k) = 0,$$

と定めると、 $\text{pf}(b_{1+n}, d_1, 1, 2, b_1, b_2) = \text{pf}(1, 2, b_{1+n}, b_2)$ となるので、文字 b_{j+n}, d_1 は文字 b_1 を文字 b_{j+n} に置き換える働きをする。

このとき、定義式 (9), (10), (11) より

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{pf}(c_{n+1}, c^*_{n+1}, c_{n+2}, c^*_{n+2}, \dots, c_m, c^*_m, c_1, c_2, \dots, c_n, c^*_n, \dots, c^*_2, c^*_1) = C_m \\ \text{(ii)} \quad & \text{pf}(d_{n+1}, d^*_{n+1}, d_{n+2}, d^*_{n+2}, \dots, d_m, d^*_m, a_1, a_2, \dots, a_m, a^*_m, \dots, a^*_2, a^*_1) \\ & = \text{pf}(a_1, a_2, \dots, a_n, a^*_n, \dots, a^*_2, a^*_1) = A_n \\ \text{(iii)} \quad & \text{pf}(d_1, b_{1+m}, d_2, b_{2+m}, \dots, d_n, b_{n+m}, b_1, b_2, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1) \\ & = (-1)^n \text{pf}(b_{1+m}, b_{2+m}, \dots, b_{n+m}, b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_m, m, \dots, 2, 1) \\ & = (-1)^{(m-n+1)n} \text{pf}(b_{n+1}, b_{n+2}, \dots, b_m, b_{1+m}, b_{2+m}, \dots, b_{n+m}, m, \dots, 2, 1) \\ & \equiv (-1)^{(m-n+1)n} B_{m,n} \end{aligned}$$

を得る。

ここでパフィアンを行列式に変換する。即ち

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \text{pf}(c_j, c^*_k) = c_{j,k}, \quad \text{pf}(c_j, c_k) = \text{pf}(c^*_j, c^*_k) = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \text{pf}(a_j, a^*_k) = a_{j,k}, \quad \text{pf}(a_j, a_k) = \text{pf}(a^*_j, a^*_k) = 0, \\ \text{(iii)} \quad & \text{pf}(j, b_k) = b_{j,k}, \quad \text{pf}(j, k) = \text{pf}(b_j, b_k) = 0 \end{aligned}$$

と置くと、上式はそれぞれ行列式に対するシルベスターの定理 1,2,3

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & |\Delta_{j,k}|_{1 \leq j,k \leq m-n} = C_m (C_n)^{m-n-1} \\ \text{(ii)} \quad & |D_{j,k}|_{n+1 \leq j,k \leq m} = A_n (A_m)^{m-n-1}, \\ \text{(iii)} \quad & |G(j,k)|_{1 \leq j,k \leq n} = (-1)^{(m-n)n} B_{m,n} (B_m)^{n-1} \end{aligned}$$

に帰着する。証明終わり。

行列式の恒等式 (ヤコビの等式, プリュッカーの関係式、シルベスターの定理 1,2,3) はすべてパフィアンの恒等式 (Ohta's identity) から導かれることを示した。