研究集会報告 15ME-S3

非線形波動および非線形力学系の数理とその応用

九州大学応用力学研究所

2004 年 4月

Reports of RIAM Symposium

No.15ME-S3

Mathematical Theories and Aplications of Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamics

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 12 - 14, 2003

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
April, 2004

研究集会「非線形波動および非線形力学系の数理とその応用」報告集

２００３年１１月１２日～１４日

研究代表者　　龍谷大学理工学部　　松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)

目　次

Pfaffianによる行列式の恒等式の一般化

早稲田大学 名誉教授　広田良吾 (HIROTA Ryogo)

1　概要

Pfaffianの基本的恒等式 (Ohta's identity) より

1) Plüker's relation

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}|\mathbf{a}_1\ldots\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{b}_j||\mathbf{a}_1\ldots\mathbf{a}_{N-n+1}\mathbf{b}_1\ldots\mathbf{b}_{j-1}\mathbf{b}_{j+1}\ldots\mathbf{b}_n|=0$$

2) Sylvester theorem (ⅰ),(ⅱ),(ⅲ)

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{i}) & |\Delta_{j,k}|_{1\le j,k\le m-n} &= C_m(C_n)^{m-n-1}\\
&(\mathrm{ii}) & |D_{j,k}|_{n+1\le j,k\le m} &= A_n(A_m)^{m-n-1},\\
&(\mathrm{iii}) & |G(j,k)|_{1\le j,k\le n} &= (-1)^{(m-n)n}\,B_{m,n}(B_m)^{n-1}
\end{aligned}$$

が生成される。

2　行列式とパフィアンの恒等式

行列式の恒等式としてよく知られているヤコビの等式, プリュッカー の関係式 や シルベスターの定理 1,2 などがある。これらの恒等式はすべて パフィアン の恒等式 (Ohta's identity) から統一的にしかも簡明に導かれることを示す。

2.1　ヤコビ の等式

n 次の行列式 D から j 行、 k 列を除いて作った $n-1$ 次の行列式を $D\binom{j}{k}$ で表す。同じように n 次の行列式 D から i,j 行、 k,l 列を除いて作った $n-2$ 次の行列式を $D\binom{i,j}{k,l}$ で表す. このとき 次の恒等式が成り立つ。

$$D\,D\binom{i,j}{k,l}=D\binom{i}{k}\,D\binom{j}{l}-D\binom{i}{l}\,D\binom{j}{k},\quad i<j,\ k<l \tag{1}$$

これをヤコビ の等式という。

2.2 プリュッカー の関係式

プリュッカー の関係式とは N 次の行列式の間で成り立つ次の関係式である。

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}|\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{b}_j||\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_{N-n+1}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_{j-1}\mathbf{b}_{j+1}\cdots\mathbf{b}_n|=0, \tag{2}$$

ここで $\mathbf{a}_j, \mathbf{b}_j$ は列ベクトル

$$\mathbf{a}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{Nj})^T,\quad \mathbf{b}_j=(b_{1j},b_{2j},\cdots,b_{Nj})^T$$

である。たとえば $n=3$ のとき

$$\begin{aligned}&|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{a}_{N-1},\mathbf{b}_1|\ |\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3|\\ &-|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{a}_{N-1},\mathbf{b}_2|\ |\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_3|\\ &+|\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{a}_{N-1},\mathbf{b}_3|\ |\mathbf{a}_1,\cdots,\mathbf{a}_{N-2},\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2|=0\end{aligned}$$

となる。

2.3 行列式に対するシルベスターの定理1

小行列式を成分とする行列式を考える。
C_m を m 次の行列式 $C_m=|c_{j,k}|_{1\le j,k\le m}$ とする。$m>n$ として，C_n を n 次の行列式 $C_n=\det|c_{j,k}|_{1\le j,k\le n}$ とする。さらに $n+1$ 次の小行列式 $\Delta_{j,k}$ をつぎのように導入する。$\Delta_{j,k}$ は C_n より1つだけ大きい行列式で、n 次の行列式 C に第 $n+j$ 行と第 $n+k$ 列で縁をつけた $n+1$ 次の行列式である。

$$\Delta_{j,k}=\begin{vmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \cdots & c_{1,n} & c_{1,n+k}\\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,n} & c_{2,n+k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n,1} & c_{n,2} & \cdots & c_{n,n} & c_{n,n+k}\\ c_{n+j,1} & c_{n+j,2} & \cdots & c_{n+j,n} & c_{n+j,n+k}\end{vmatrix}$$

小行列式 $\Delta_{j,k}$ を成分とする $m-n$ 次の行列式 を考える. このとき次の恒等式が成り立つ。

$$|\Delta_{j,k}|_{1\le j,k\le m-n}=C_m(C_n)^{m-n-1}$$

これが行列式に対するシルベスターの定理1である。
シルベスターの定理1で $m=n+2$ の場合、

$$C_{n+2}=|c_{j,k}|_{1\le j,k\le n+2}\equiv D$$

と置くと、

$$C_n = D\binom{n+1,n+2}{n+1,n+2}, \quad \Delta_{1,1} = D\binom{n+2}{n+2}, \quad \Delta_{1,2} = D\binom{n+2}{n+1},$$
$$\Delta_{2,1} = D\binom{n+1}{n+2}, \quad \Delta_{2,2} = D\binom{n+1}{n+1}$$

と表せるので, シルベスターの定理 1 は ヤコビ の等式 (1)

$$D\binom{n+1}{n+1}D\binom{n+2}{n+2} - D\binom{n+1}{n+1}D\binom{n+2}{n+1} = D\,D\binom{n+1,n+2}{n+1,n+2}$$

になる。

2.4 行列式に対するシルベスターの定理 2

行列式の余因子を成分とする行列式を考える。
A_m を m 次の行列式とする。

$$A_m = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} \end{vmatrix}$$

行列式 A_m の余因子 $D_{j,k}$ ($n+1 \le j,k \le m$) を成分とする $m-n$ 次の行列式を考える. このとき次の恒等式が成り立つ.

$$|D_{j,k}|_{n+1\le j,k\le m} = A_n(A_m)^{m-n-1}, \quad m > n$$

これをシルベスターの定理 2 と呼ぶ。
シルベスターの定理 2 も $m = n+2$ の場合, $A_{n+2} = \det|a_{j,k}|_{1\le j,k\le n+2} \equiv D$ と置くとヤコビ の等式 (1) になる。

2.5 行列式に対するシルベスターの定理 3

B_m を m 次の行列式とする。

$$B_m = |b(j,k)|_{1\le j,k\le m} = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_m|$$

ここで $\mathbf{b}_j$ は列ベクトル $\mathbf{b}_j = (b_{1,j}, b_{2,j}, \cdots, b_{m,j})^T$ である。m 次の行列式 $B_m = |b_{j,k}|_{1\le j,k\le m}$ で行の番号 k を $k+n$ に置き換えた行列式を $B_{m,n}$, (n は自然数) とする、すなわち

$$B_{m,n} = |\mathbf{b}_{1+n}, \mathbf{b}_{2+n}, \cdots, \mathbf{b}_{m+n}|$$

である。次に行列式 B_m で j 列を $m+k$ 列に置き換えた新しい行列式 $G(j,k)$

$$G(j,k) = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_{m+k}, \mathbf{b}_{j+1}, \cdots, \mathbf{b}_m|$$

を考え, 行列式 $G(j,k)$ を成分とする n 次の行列式を作る. このとき次の恒等式が成り立つ.

$$|G(j,k)|_{1\le j,k\le n} = (-1)^{(m-n)n}\, B_{m,n}(B_m)^{n-1}$$

これをシルベスターの定理 3 と呼ぶ。$n=2$ の場合、各行列式は次のように表せる .

$$\begin{aligned}
&G(1,1) = |\mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m|, \quad G(1,2) = |\mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m| \\
&G(2,1) = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m|, \quad G(2,2) = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m|, \\
&B_{m,2} = |\mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}|, \quad B_m = |\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m|
\end{aligned}$$

ので, シルベスターの定理 3 は

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m||\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m| \\
&\quad -|\mathbf{b}_{m+2}, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m||\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m| \\
&\qquad -|\mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}||\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m| = 0
\end{aligned}$$

となる。ここで共通な文字列 $\{\mathbf{b}_3, \cdots, \mathbf{b}_m\}$ を $\{----\}$ で表し並べ替えると、上式は

$$\begin{aligned}
&|\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, ----||----, \mathbf{b}_{m+1}, \mathbf{b}_{m+2}| \\
&\quad -|\mathbf{b}_1, ----, \mathbf{b}_{m+1}|\mathbf{b}_2, ----, \mathbf{b}_{m+2}| \\
&\qquad +|\mathbf{b}_1, ----, \mathbf{b}_{m+2}||\mathbf{b}_2, ----, \mathbf{b}_{m+1}| = 0
\end{aligned}$$

となる。これは プリュッカー の関係式 (2) である。
シルベスターの定理 3 は新しく発見したものであるが、行列式の歴史は古いので、ほんとうに新しい定理である可能性は非常に少ない。

3 パフィアン の恒等式

パフィアンにはいろいろな恒等式がある。これらの恒等式を使ってプリュッカー の関係式シルベスター の定理 1,2,3 が証明される。

3.1 基本的恒等式

次の恒等式

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M)\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N) \\
&= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N) \qquad (3)
\end{aligned}$$

は太田泰広氏（神戸大学）によって発見された[1]。この恒等式はほとんど自明で、左辺の $\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N)$ を最初の文字 b_j について展開し、右辺の $\mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, c_k)$ を最後の文字 c_k について展開すると、式 (3) は

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M) \times \mathrm{pf}(b_j, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N)\\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \sum_{j=0}^{M}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M) \times \mathrm{pf}(b_j, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N)\end{aligned}$$

となる。この式は和の順序を入れ替えただけなので確かに恒等式である。

3.2 Ohta's identity

基本的恒等式は任意の文字列 $1, 2, \cdots, 2n$ を同次的に追加しても成り立つ。

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{M}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M, 1, 2, \cdots, 2n)\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n)\\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, 1, 2, \cdots, 2n, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n) \quad (4)\end{aligned}$$

この恒等式を Ohta's identity と呼ぶ。証明は簡単で基本的恒等式で、$M \to M+2n, N \to N+2n$ と置き換えると、

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{M+2n}(-1)^j \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, \hat{b}_j, \ldots, b_M, b_{M+1}, \cdots, b_{M+2n})\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, c_{N+1}, \cdots, c_{N+2n})\\ &= \sum_{k=0}^{N+2n}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, b_{M+1}, \cdots, b_{M+2n}, c_k)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \ldots, c_N, c_{N+1}, \cdots, b_{N+2n})\end{aligned}$$

となる。ここで $b_{M+k} = c_{N+k} = k, (k = 1, 2, \cdots, 2n)$ と置くと、$j = M+1, M+2, \cdots, M+2n$ のとき、文字が重複するので、$\mathrm{pf}(b_j, c_0, c_1, \ldots, c_N, c_{N+1}, \cdots, c_{N+2n}) = 0$ である。どうようにして $k = N+1, N+2, \cdots, N+2n$ のとき $\mathrm{pf}(b_0, b_1, \ldots, b_M, b_{M+1}, \cdots, b_{M+2n}, c_k) = 0$ である。したがって式 (4) が成り立つ。
Ohta's identity は $M = 0$ のとき、恒等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{pf}(1, 2, \cdots, 2n)\mathrm{pf}(b_0, c_0, c_1, c_2, \cdots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n)\\ &= \sum_{k=0}^{N}(-1)^k \mathrm{pf}(b_0, c_k, 1, 2, \cdots, 2n)\mathrm{pf}(c_0, c_1, \ldots, \hat{c}_k, \cdots, c_N, 1, 2, \cdots, 2n) \qquad (5)\end{aligned}$$

を与える。

[1] 太田泰広:*Bilinear Theory of Soliton,* 博士論文（東京大学工学部 1992）

4　プリュッカーの関係式の証明

基本的恒等式で, $L=N-1,\ M=N+1$ と置き, 文字列 $1,2,\cdots,N$ を同次的に追加すると、Ohta's identity は

$$\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j \mathrm{pf}(a_1,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N)\mathrm{pf}(a_j,c_1,c_2,\ldots,c_{N+1},1,2,\cdots,N)$$
$$=\sum_{k=1}^{N+1}(-1)^k \mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N,c_k)\mathrm{pf}(c_1,c_2,\ldots,\hat{c}_k,\ldots,c_{N+1},1,2,\cdots,N)$$

となる。さらに $(N\geq n)$

$$c_j=a_j,\ (j=0,1,2,\cdots,N-n+1),\quad c_{N-n+1+k}=b_k,\ (k=1,2,\cdots,n)$$

と置くと、上式は

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N-1}(-1)^j \mathrm{pf}(a_1,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N)\\
&\qquad\times \mathrm{pf}(a_j,a_1,a_2,\ldots,a_{N-n+1},\cdots,b_1,b_2,\cdots,b_n,1,2,\cdots,N)\\
&=\sum_{k=1}^{N-n+1}(-1)^k \mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N,a_k)\\
&\qquad\times \mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,\hat{a}_k,\ldots,a_{N-n+1},b_1,b_2,\cdots,b_n,1,2,\cdots,N)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{N-n+1+k}\mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N,b_k)\\
&\qquad\times \mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-n+1},b_1,b_2,\cdots,\hat{b}_k,\cdots,b_n,1,2,\cdots,N)
\end{aligned}$$

となる。上式で pf(− − −−) の中で同じ文字が現れる項は 0 となるので

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=N-n+2}^{N-1}(-1)^j \mathrm{pf}(a_1,\ldots,\hat{a}_j,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N)\\
&\qquad\times \mathrm{pf}(a_j,a_1,a_2,\ldots,a_{N-n+1},\cdots,b_1,b_2,\cdots,b_n,1,2,\cdots,N)\\
&=(-1)^{N-n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-1},1,2,\cdots,N,b_k)\\
&\qquad\times \mathrm{pf}(a_1,a_2,\ldots,a_{N-n+1},b_1,b_2,\cdots,\hat{b}_k,\cdots,b_n,1,2,\cdots,N)
\end{aligned}$$

を得る。ここでパフィアンの成分を

$$\mathrm{pf}(a_j,k)=a_{kj},\quad \mathrm{pf}(b_j,k)=b_{kj},\quad \mathrm{pf}(a_j,a_k)=\mathrm{pf}(b_j,b_k)=\mathrm{pf}(j,k)=0$$

と選んでパフィアンを行列式に変換する。。 上式の左辺をよく見ると、文字 a_j の数が数字 $1,2,\cdots,N$ の数より 2 つ少ないので、残された数字同志のパフィアンが 0 となるため、左辺は 0 となる。結局 Ohta's identity は プリュッカー の関係式 (2)

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}|\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{b}_j||\mathbf{a}_1\cdots\mathbf{a}_{N-n+1}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{b}_{j-1}\mathbf{b}_{j+1}\cdots\mathbf{b}_n|=0$$

に変換された。証明終り。

5　シルベスター の定理の証明

Ohata's identity から シルベスター の定理 1,2,3 が導かれることを示す。

5.1　補助定理

シルベスターの定理を証明するためには次の補助定理が必要となる。
任意の自然数 l, n に対して次の等式が成り立つ。

$$\mathrm{pf}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2l}) = \mathrm{pf}(b_1, b_2, \cdots, b_{2l}, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\ [\mathrm{pf}(c_1, c_2, \cdots, c_{2n})]^{l-1} \tag{6}$$

ここで $\mathrm{pf}(\beta_j, \beta_k) \equiv \mathrm{pf}(b_j, b_k, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})$ である。
証明は簡単で数学的帰納法を使う。$l = 2$ のとき パフィアン の恒等式 (5) より等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) &= \mathrm{pf}(b_1, b_2, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(b_3, b_4, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) \\
&\quad -\mathrm{pf}(b_1, b_3, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(b_2, b_4, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) \\
&\quad +\mathrm{pf}(b_1, b_4, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(b_2, b_3, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) \\
&= \mathrm{pf}(b_1, b_2, b_3, b_4, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(c_1, c_2, \cdots, c_{2n}).
\end{aligned}$$

等式が $l-1$ で成り立つと仮定する。

$$\mathrm{pf}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2(l-1)}) = \mathrm{pf}(b_1, b_2, \cdots, b_{2(l-1)}, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\ [\mathrm{pf}(c_1, c_2, \cdots, c_{2n})]^{l-2} \tag{7}$$

そのとき

$$\begin{aligned}
\mathrm{pf}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2l}) &= \sum_{j=2}^{l}(-1)^j \mathrm{pf}(\beta_1, \beta_j)\mathrm{pf}(\beta_2, \beta_3, \cdots, \hat{\beta}_j, \cdots, \beta_{2l}) \\
&= \sum_{j=2}^{l}(-1)^j \mathrm{pf}(b_1, b_j, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(b_2, b_3, \cdots, \hat{b}_j, \cdots, b_{2l}, c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) \\
&\qquad \times \mathrm{pf}(c_1, c_2, \cdots, c_{2n})^{l-2}
\end{aligned}$$

となるが、ここで展開式

$$\mathrm{pf}(b_1, b_2, \cdots, b_{2l}) = \sum_{j=2}^{2l}(-1)^j \mathrm{pf}(b_1, b_j)\mathrm{pf}(b_2, \cdots, b_j, \cdots, b_{2l})$$

に文字 $c_1, c_2, \cdots, c_{2n}$ 同次的に付け加えた恒等式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{pf}(b_1, b_2, \cdots, b_{2l}, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(c_1, c_2, \cdots, c_{2n}) \\
&= \sum_{j=2}^{2l}(-1)^j \mathrm{pf}(b_1, b_j, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})\mathrm{pf}(b_2, \cdots, b_j, \cdots, b_{2l}, c_1, c_2, \cdots, c_{2n})
\end{aligned}$$

を使うと等式

$$\mathrm{pf}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2l}) = \mathrm{pf}(b_1,b_2,\cdots,b_{2l},c_1,c_2,\cdots,c_{2n})\ [\mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n})]^{l-1}$$

が得られる。証明終り。
この補助定理は文字列 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{2l}$ を文字列　$\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_l,\beta_l$ に置き換えると

$$\mathrm{pf}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_l,\beta_l) = \mathrm{pf}(a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_l,b_l,c_1,c_2,\cdots,c_{2n})\ [\mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n})]^{l-1} \quad (8)$$

となる。この補助定理 (8) から以下のようにシルベスター の定理 1,2,3 が導かれる。

5.2 シルベスター の定理 1,2,3

シルベスター の定理 1,2,3 を証明する。先ず定理1,2,3 に対応するパフィアン $\mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n})$ を次のように書き直す。

$$\text{(i)}\quad \mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n}) \to \mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_n,c*_n,\cdots,c*_2,c*_1) \equiv C_n \quad (9)$$

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n}) \to \mathrm{pf}(a_1,a_2,\cdots,a_n,a*_n,\cdots,a*_2,a*_1) \equiv A_n \quad (10)$$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_{2n}) \to \mathrm{pf}(b_1,b_2,\cdots,b_m,m,\cdots,2,1) \equiv B_m \quad (11)$$

シルベスター の定理 1,2,3 の違いは $\mathrm{pf}(\alpha_j,\beta_k)$ の違いである。対応する $\mathrm{pf}(\alpha_j,\beta_k)$ は次のようになる。

$$\text{(i)}\quad \mathrm{pf}(\alpha_j,\beta_k) \to \mathrm{pf}(c_{n+j},c*_{n+k},c_1,c_2,\cdots,c_n,c*_n,\cdots,c*_2,c*_1)$$

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{pf}(\alpha_j,\beta_k) \to \mathrm{pf}(d_j,d^*_k,a_1,a_2,\cdots,a_n,a*_n,\cdots,a*_2,a*_1)$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad \mathrm{pf}(\alpha_j,\beta_k) &\to \mathrm{pf}(d_j,b_{m+k},b_1,b_2,\cdots,b_m,m,\cdots,2,1)\\ &= -\mathrm{pf}(b_1,b_2,\cdots,b_{j-1},b_{m+k},b_{j+1},\cdots,b_m,m,\cdots,2,1)\end{aligned}$$

ここに現れた新しい文字 d_j,d^*_k を使ったパフィアンは今のところ任意である。後で定める。
このとき補助定理 (8) によって

$$\begin{aligned}\text{(i)}\quad &\mathrm{pf}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_{m-n},\beta_{m-n})\\ &= \mathrm{pf}(c_{n+1},c*_{n+1},c_{n+2},c*_{n+2},\cdots,c_m,c*_m,c_1,c_2,\cdots,c_n,c*_n,\cdots,c*_2,c*_1)\\ &\qquad \times[\mathrm{pf}(c_1,c_2,\cdots,c_n,c*_n,\cdots,c*_2,c*_1)]^{m-n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)}\quad &\mathrm{pf}(\alpha_{n+1},\beta_{n+1},\alpha_{n+2},\beta_{n+2},\cdots,\alpha_m,\beta_m)\\ &= \mathrm{pf}(d_{n+1},d*_{n+1},d_{n+2},d^*_{n+2},\cdots,d_m,d*_m,a_1,a_2,\cdots,a_n,a*_n,\cdots,a*_2,a*_1)\\ &\qquad \times[\mathrm{pf}(a_1,a_2,\cdots,a_n,a*_n,\cdots,a*_2,a*_1)]^{m-n-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad &\mathrm{pf}(\alpha_1,\beta_1,\alpha_2,\beta_2,\cdots,\alpha_n,\beta_n)\\ &= \mathrm{pf}(d_1,b_{1+m},d_2,b_{2+m},\cdots,d_n,b_{n+m},b_1,b_2,\cdots,b_m,m,\cdots,2,1)\\ &\qquad \times\{\mathrm{pf}(b_1,b_2,\cdots,b_m,m,\cdots,2,1)\}^{n-1}\end{aligned}$$

が得られる。これらがパフィアン版のシルベスター の定理 1,2,3 である。
ここで新しい文字 d_j, d_k^* を使ったパフィアンを次のように定める。

$$\mathrm{pf}(d_j, a_k) = \mathrm{pf}(d_j^*, a*_k) = \delta_{j,k},\ \mathrm{pf}(d_j, a*_k) = \mathrm{pf}(d_j^*, a_k) = 0,$$
$$\mathrm{pf}(d_j, d_k) = \mathrm{pf}(d_j^*, d_k^*) = 0$$

例えば $\mathrm{pf}(d_2, a_1, a_2, a*_2) = -\mathrm{pf}(a_1, a*_2)$, $\mathrm{pf}(d_2^*, a_1, a_2, a*_2) = \mathrm{pf}(a_1, a_2)$ となるので、符号を無視すると、文字 d_j は文字 b_j を, 文字 d_k^* は文字 $b*_k$ を消去する働きがある。また

$$\mathrm{pf}(d_j, b_k) = \delta_{j,k},\ \mathrm{pf}(d_j, k) = 0、$$

と定めると、$\mathrm{pf}(b_{1+n}, d_1, 1, 2, b_1, b_2) = \mathrm{pf}(1, 2, b_{1+n}, b_2)$ となるので, 文字 b_{j+n}, d_1 は 文字 b_1 を文字 b_{j+n} に置き換える働きをする。
このとき、定義式 (9), (10), (11) より

$$\text{(i)}\quad \mathrm{pf}(c_{n+1}, c*_{n+1}, c_{n+2}, c*_{n+2}, \cdots, c_m, c*_m, c_1, c_2, \cdots, c_n, c*_n, \cdots, c*_2, c*_1) = C_m$$
$$\begin{aligned}\text{(ii)}\quad & \mathrm{pf}(d_{n+1}, d*_{n+1}, d_{n+2}, d*_{n+2}, \cdots, d_m, d*_m, a_1, a_2, \cdots, a_m, a*_m, \cdots, a*_2, a*_1) \\ & = \mathrm{pf}(a_1, a_2, \cdots, a_n, a*_n, \cdots, a*_2, a*_1) = A_n\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad & \mathrm{pf}(d_1, b_{1+m}, d_2, b_{2+m}, \cdots, d_n, b_{n+m}, b_1, b_2, \cdots, b_m, m, \cdots, 2, 1) \\ & = (-1)^n \mathrm{pf}(b_{1+m}, b_{2+m}, \cdots, b_{n+m}, b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots, b_m, m, \cdots, 2, 1) \\ & = (-1)^{(m-n+1)n} \mathrm{pf}(b_{n+1}, b_{n+2}, \cdots, b_m, b_{1+m}, b_{2+m}, \cdots, b_{n+m}, m, \cdots, 2, 1) \\ & \equiv (-1)^{(m-n+1)n} B_{m,n}\end{aligned}$$

を得る。
ここでパフィアンを行列式に変換する. 即ち

$$\text{(i)}\quad \mathrm{pf}(c_j, c*_k) = c_{j,k},\ \mathrm{pf}(c_j, c_k) = \mathrm{pf}(c*_j, c*_k) = 0,$$
$$\text{(ii)}\quad \mathrm{pf}(a_j, a*_k) = a_{j,k},\ \mathrm{pf}(a_j, a_k) = \mathrm{pf}(a*_j, a*_k) = 0,$$
$$\text{(iii)}\quad \mathrm{pf}(j, b_k) = b_{j,k},\ \mathrm{pf}(j, k) = \mathrm{pf}(b_j, b_k) = 0$$

と置くと、上式はそれぞれ行列式に対するシルベスターの定理 1,2,3

$$\text{(i)}\quad |\Delta_{j,k}|_{1\le j,k\le m-n} = C_m (C_n)^{m-n-1}$$
$$\text{(ii)}\quad |D_{j,k}|_{n+1\le j,k\le m} = A_n (A_m)^{m-n-1},$$
$$\text{(iii)}\quad |G(j,k)|_{1\le j,k\le n} = (-1)^{(m-n)n}\, B_{m,n} (B_m)^{n-1}$$

に帰着する。証明終わり。

行列式の恒等式（ヤコビの等式, プリュッカー の関係式 、シルベスターの定理 1,2,3 ）はすべて パフィアン の恒等式 (Ohta's identity) から導かれることを示した。