数理解析研究所講究録1302

短期共同研究

可積分系研究の新展開
——連続・離散・超離散

京都大学数理解析研究所

2003年2月

可積分系研究の新展開 — 連続・離散・超離散
New Developments in the Research of Integrable Systems —
Continuous, Discrete, Ultra-discrete
短期共同研究報告集

２００２年７月３１日～８月２日
研究代表者　永井　敦(Atsushi Nagai)

目　次

超離散 KP 方程式、超離散 BKP 方程式の Backlund 変換方程式

早稲田大学 数理科学研究科 新沢 信彦 (Nobuhiko Shinzawa)
広田 良吾 (Hirota Ryogo)

1 はじめに

可積分方程式の研究で、無矛盾条件の計算は重要な役割を果たす。初期値問題を解こうとする際には、Lax pair の無矛盾条件が必要であるし、Bäcklund 変換方程式の無矛盾条件は、Bäcklund 変換が元の方程式の解を同じ方程式の別の解に移す事を保証している。元の可積分方程式は、この無矛盾条件から得る事が出来る。

一方、ここ十数年の研究で、セルオートマトンの中にも厳密な N ソリトン解を持つモデルがある事が発見された。[4],[3] これらのセルオートマトンモデルの殆んどは、差分可積分方程式の特別な極限 (超離散極限) を取る事で得る事ができるので、超差分可積分方程式、又は、ソリトンセルオートマトンモデルなどと呼ばれている。たいていの場合、これらの極限操作でかけ算は足し算に置き換えられ、足し算は Max 演算に置き換えられる。このような対応関係があるにも係わらず、差分方程式と対応するセルオートマトンモデルで全ての計算を同様に行える訳ではなく、超離散極限を取る事で難しくなる点もある。例えば、$x+a=y+a$ という方程式から a を消去する事は簡単だが、
$\mathrm{Max}(x,a)=\mathrm{Max}(y,a)$
という方程式から a を消去する事は不可能である。ソリトンセルオートマトンモデルでは、この様な難しさが災いして、Lax pair や 2 個の線形方程式からなる Bäcklund 変換方程式の無矛盾条件を計算する事が出来ない。

この研究では、超離散 KP 方程式と超離散 BKP 方程式の場合を例に取り、差分方程式の段階で Bäcklund 変換方程式に工夫をすることにより、ソリトンセルオートマトンモデルの無矛盾条件を計算する。

2 Bäcklund 変換方程式の行列表示

はじめに、離散 KP 方程式を与えることから始める。離散 KP 方程式は以下の様な 3 次元の差分方程式である。

$$z_p z_{qr} f_p f_{qr} - z_q z_{pr} f_q f_r + z_r z_{pq} f_r f_{pq} = 0 \tag{1}$$

ここで、$z_i, (i=p,q,r)$ は任意の複素定数で、$z_{ij}=(z_i-z_j)$ である。f は 3 個の差分的な変数 (p,q,r) による従属変数で、f の下にある添字は、対応する変数を 1 つ増やす、という記号である。

$$f_p = f(p+1,q,r) \tag{2}$$
$$f_{qr} = f(p,q+1,r+1) \tag{3}$$

この方程式は、簡潔な形をしているにも係わらず、物理や数学に現れる多くの可積分方程式を、特別な場合として含んでいる重要な方程式である。[5],[6]

離散 KP 方程式の Bäcklund 変換方程式は、以下のような方程式である。

$$\begin{aligned} z_r f_r g_q + z_p f_p g_r + z_{qr} f_{qr} g = 0 \\ z_r f_r g_p + z_p f_p g_r + z_{pr} f_{pr} g = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

この方程式は、f が離散 KP 方程式の解である時に、g について解く事が可能で、得られた g も又、離散 KP 方程式の解になる。従って、既に分かっている離散 KP 方程式の解をこの方程式の f に代入する事により、別の離散 KP 方程式の解を得る事が出来る。しかしながら、この方程式を直接超離散化して、無矛盾条件を計算しようとしても、先に述べた難しさに直面して、うまく超離散 KP 方程式を導出することができない。

ここでは、f と g が離散 KP 方程式を満たしている事を仮定し、(4) 式から、補助的な線形方程式が得られないかを考えてみる。[1] まず Backlund 変換方程式 (4) の両方の式に添字なしの g が現れている事に着目し、これらの式を以下のように書き換える。

$$f_{qr} = \frac{z_r f_r g_q + z_q f_q g_r}{z_{qr} g}$$
$$f_{pr} = \frac{-z_r f_r g_p + z_p f_p g_r}{z_{pr} g} \tag{5}$$

この式の左辺の f_{qr}、f_{pr} を離散 KP 方程式 (1) に代入すると、1 つめの補助的な双線形方程式が得られる。

$$z_p f_p g_q + z_q f_q g_p - z_{pq} f_{pq} = 0 \tag{6}$$

同様に Bäcklund 変換方程式 (4) の両式に、g_r が現れる事に着目して、(4) 式の f_q, f_p を離散 KP 方程式に代入する事で、2 番目の補助方程式が得られる。

$$z_{pq} f_{pq} g_r + z_{qr} f_{qr} g_p - z_{pr} f_{pr} g_q = 0 \tag{7}$$

Bäcklund 変換方程式 (4) に現れる、4 個の g (g_p, g_q, g_r, g) の満たす双線形方程式はこれで全てである。

これら 4 個の双線形方程式を一つにまとめると、以下のように行列×ベクトル=0 と表せる、Bäcklund 変換方程式を得る事が出来る。

$$\begin{bmatrix} 0 & -z_r f_r & z_q f_q & z_{rq} f_{rq} \\ z_r f_r & 0 & -z_p f_p & z_{pr} f_{pr} \\ -z_q f_q & z_p f_p & 0 & z_{qp} f_{pq} \\ z_{qr} f_{qr} & z_{rp} f_{pr} & z_{pq} f_{pq} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_p \\ g_q \\ g_r \\ g \end{bmatrix} = 0 \tag{8}$$

これらの方程式が 0 でない解を持つためには、この行列の行列式が 0 でなければならない。今の場合、この行列は反対称行列になっているので、反対称行列の行列式が Pfaffian の 2 乗になる事を使って、以下の無矛盾条件が得られる。

$$(z_1 z_{23} f_p f_{qr} - z_2 z_{13} f_q f_r + z_3 z_{12} f_r f_{pq})^2 = 0 \tag{9}$$

これは離散 KP 方程式の 2 乗である。

この無矛盾条件は、元の Bäcklund 変換方程式の無矛盾条件と異なる為、Max 演算子の難しさを回避出来る可能性がある。次の章では、これらの超離散化した Bäcklund 変換方程式を考えるのに先だって、Max Plus 方程式での" 線形方程式" が解ける為の条件を考える。

3 Max Plus 方程式での可解条件

Max Plus 方程式で無矛盾条件を考える際、大小関係に場合分けする事で Max 演算子を消去する事も出来る。しかしながら、そうする事は個別の考察を必要とし、複雑である。ここではそうする代わりに、Max 演算子に対して" 線形" な方程式から変数を消去する一般的な方法を考えてみる。

3.1 2元線形方程式の例

一般的な線形方程式を扱う前に、次のような2つの例を考えてみたい。

- **例 1**

最初の例は、次のような連立方程式である。

$$\begin{aligned}\tilde{a}+x&=\mathrm{Max}(a+x,b+y)\\ \tilde{c}+x&=\mathrm{Max}(c+x,d+y)\end{aligned}\tag{10}$$

ここで、$a,b,c,d,\tilde{a},\tilde{c}$ は定数係数で、x,y はこの方程式の変数である。この場合、次のような自明な恒等式を考える事で、全ての変数を消去する事が出来る。

$$\mathrm{Max}(\mathrm{Max}(a+x,b+y)+d,c+b+x)=\mathrm{Max}(a+d+x,\mathrm{Max}(c+x,d+y)+b)\tag{11}$$

実際、左辺の内側の Max 演算子の所に (10) の第1式を、右辺に (10) の第2式を代入すると、次の関係を得る。

$$\mathrm{Max}(\tilde{a}+d,c+b)=\mathrm{Max}(a+d,\tilde{c}+b)\tag{12}$$

(10) 式を満たす x,y があるならば、$a,b,c,d,\tilde{a},\tilde{c}$ は、この関係式を満たさなければならない。したがってこの場合、Max 演算子を大小関係に場合分けせずに消去する事が出来た。

- **例 2**

2番目の例は、次の連立方程式である。

$$\begin{aligned}\tilde{a}+x&=\mathrm{Max}(a+x,b+y)\\ \tilde{d}+y&=\mathrm{Max}(c+x,d+y)\end{aligned}\tag{13}$$

この場合、2つの式を足し合わせ、さらにそれぞれの式を一回ずつ使う事で、次の式を得る。

$$\begin{aligned}&\tilde{a}+\tilde{d}+x+y\\ =&\ \mathrm{Max}(a+c+2x,a+d+x+y,b+c+x+y,b+d+2y)\\ =&\ \mathrm{Max}(a+\tilde{d}+x+y,\tilde{a}+d+x+y,b+c+x+y)\end{aligned}\tag{14}$$

一番左側の式と、一番右側の式から $x+y$ をひくと、全ての変数を消去する事が出来て、次の式を得る。

$$\mathrm{Max}(\tilde{a}+d,a+\tilde{d},b+c)=\tilde{a}+\tilde{d}\tag{15}$$

従ってこの場合にも、大小関係で場合分けする事無く、全ての変数を消去する事が出来た。

3.2 一般的な2元線形方程式

最も一般的な2つの方程式からなる連立線形方程式は、次のものである。

$$\begin{aligned}\mathrm{Max}(\tilde{a}+x,\tilde{b}+y)&=\mathrm{Max}(a+x,b+y)\\ \mathrm{Max}(\tilde{c}+x,\tilde{d}+y)&=\mathrm{Max}(c+x,d+y)\end{aligned}\tag{16}$$

この場合、場合分けをせずに全ての変数を消去する方法を見付ける事は出来なかったが、前の2つの例での結果を使う事が出来る。例えば (16) の1つめの式の左辺で、$\tilde{a}+x>\tilde{b}+y$、2つめの式で、$\tilde{c}+x>\tilde{d}+y$ を仮定すると、左辺の Max は計算できて、(16) 式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\tilde{a}+x&=\mathrm{Max}(a+x,b+y)\\ \tilde{c}+x&=\mathrm{Max}(c+x,d+y)\end{aligned}\tag{17}$$

これは、最初の例その物なので、その結果を利用する事が出来て、関係式

$$\mathrm{Max}(\tilde{a}+d, c+b) = \mathrm{Max}(a+d, \tilde{c}+b) \tag{18}$$

が得られる。それ以外の場合にも同じような議論を適用する事ができて、次のような結果が得られた。

$$\begin{aligned}
\tilde{a}+x > \tilde{b}+y \text{ and } \tilde{c}+x > \tilde{d}+y \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Max}(\tilde{a}+d, c+b) = \mathrm{Max}(a+d, \tilde{c}+b) \\
\tilde{a}+x < \tilde{b}+y \text{ and } \tilde{c}+x < \tilde{d}+y \quad &\Rightarrow \quad \mathrm{Max}(\tilde{b}+c, d+a) = \mathrm{Max}(b+c, \tilde{d}+a) \\
\tilde{a}+x > \tilde{b}+y \text{ and } \tilde{c}+x < \tilde{d}+y \quad &\Rightarrow \quad \tilde{a}+\tilde{d} = \mathrm{Max}(\tilde{a}+d, a+\tilde{d}, b+c) \\
\tilde{a}+x < \tilde{b}+y \text{ and } \tilde{c}+x > \tilde{d}+y \quad &\Rightarrow \quad \tilde{b}+\tilde{c} = \mathrm{Max}(\tilde{b}+c, b+\tilde{a}, a+d) \quad ,
\end{aligned} \tag{19}$$

これらの結果を同時に満たす関係式を探すと、次の式が得られる。

$$\mathrm{Max}(a+d, \tilde{a}+\tilde{d}, \tilde{c}+d, d+\tilde{c}) = \mathrm{Max}(\tilde{a}+d, a+\tilde{d}, c+d, \tilde{c}+\tilde{d}) \tag{20}$$

これが、一般的な 2 元線形方程式が解を持っている時に、係数が満たすべき関係式である。

3.3 一般的な N 元線形方程式の場合

このようにして、(16) 式から変数を消去する事で、2 元線形方程式が解ける為の条件が見付かった訳であるが、同じ方程式を使って、N 個の線形方程式から N 個の変数を消去できる事を示す事が出来る。実際、(16) 式の全体から y を引き、$z = x - y$ と置くと、次の式が得られる。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Max}(\tilde{a}+z, \tilde{b}) &= \mathrm{Max}(a+z, b) \\
\mathrm{Max}(\tilde{c}+z, \tilde{d}) &= \mathrm{Max}(c+z, d)
\end{aligned} \tag{21}$$

この式から、z を消去する事は (16) 式から x, y を消去する事と同じなので、そうする事で得られる関係式は (20) 式である。一方で、$a, b, c, d, \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$ は任意だったので、N 個の変数を含む 2 個の線形方程式から、一個の変数を消去する事が可能である。これを繰り返していくと、最終的に 2 元の線形方程式が得られるが、これから全ての変数を消去できる事は、すでに示した。この様にして、結局 N 元の線形方程式から全ての変数を消去出来る事が分かった。

4 超離散 KP 方程式の Bäcklund 変換方程式

離散 KP 方程式は以下のような方程式であった。

$$z_p z_{qr} f_p f_{qr} + z_r z_{pq} f_r f_{pq} = z_q z_{pr} f_q f_{pr} \tag{22}$$

もとの離散 KP 方程式では f は複素数値関数であったが、ここでは超離散極限を取るために f は 0 よりも大きい実数値関数であると仮定する。更に、$z_p \le z_q \le z_r$ も仮定する。このように仮定しても、一般性を失う事はない。このとき、(22) 式は右辺、左辺共に正になることに注意して欲しい。

従属変数変換、

$$f = exp(\frac{F}{\epsilon}) \ , \ z_i = exp(\frac{Z_i}{\epsilon}) \ , \ z_{ij} = exp(\frac{Z_{ij}}{\epsilon}) \tag{23}$$

を施し、 $\log \epsilon$ を掛けた上で、$\epsilon \to +0$ 極限を取ると、(22) 式から、超離散 KP 方程式

$$Z_q + Z_{pr} + F_q + F_{pr} = \mathrm{Max}(Z_p + Z_{qr} + F_p + F_{qr}, Z_r + Z_{pq} + F_r + F_{pq}) \tag{24}$$

を得る事ができる。[3]

同様に、離散 KP 方程式の Bäcklund 変換方程式で、従属変数変換 (23) と

$$g = \exp(\frac{G}{\epsilon}), \tag{25}$$

を施し、$\epsilon \to +0$ 極限を取ると、超離散 KP 方程式の Bäcklund 変換方程式、

$$\begin{aligned}
Z_q + F_q + G_r &= \mathrm{Max}[Z_r + F_r + G_q, Z_{qr} + F_{qr} + G] \\
Z_p + F_p + G_r &= \mathrm{Max}[Z_r + F_r + G_p, Z_{pr} + F_{pr} + G] \\
Z_p + F_p + G_q &= \mathrm{Max}[Z_q + F_q + G_p, Z_{pq} + F_{pq} + G] \\
Z_{pr} + F_{pr} + G_q &= \mathrm{Max}[Z_{qr} + F_{qr} + G_p, Z_{pq} + F_{pq} + G_r]
\end{aligned} \tag{26}$$

を得る。この式の無矛盾条件が、実際に超離散 KP 方程式を導く事を示したい。

まず、(26) 式で、G_q, G_r は第 1 式と第 4 式を使う事で消去できる事に注意したい。第 1 式、第 4 式を残りの 2 式に代入すると、次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Max}(Z_{qr} + Z_r + F_{qr} + F_r + G_p, Z_q + Z_{qr} + F_q + F_{qr} + G) \\
&\quad = \mathrm{Max}(Z_r + Z_q + F_r + F_q + G_p, \\
&\qquad\qquad \mathrm{Max}(Z_r + Z_{pq} + F_r + F_{pq}, Z_{qr} + Z_p + F_{qr} + F_p) + G)) \\
&\mathrm{Max}(Z_{pr} + Z_q + F_{pr} + F_q + G_p, Z_{pr} + Z_{pq} + F_{pr} + F_{pq} + G) \\
&\quad = \mathrm{Max}(\mathrm{Max}(Z_{qr} + Z_p + F_{qr} + F_p, Z_{pq} + Z_r + F_{pq} + F_r) + G_p, Z_{pq} + Z_{pr} + F_{pq} + F_{pr} + G)
\end{aligned} \tag{27}$$

これは 2 つの変数 G, G_p を含む 2 個の線形方程式であるので、前章の結果をそのまま活用する事ができる。全ての変数を消去した上で式をまとめた結果、この場合には、Pfaffian の 2 乗のかわりに超離散 KP 方程式の絶対値、

$$\|Z_q + Z_{pr} + F_q + F_{pr} - \mathrm{Max}(Z_p + Z_{qr} + F_p + F_{qr}, Z_r + Z_{pq} + F_r + F_{pq}\| = 0 \tag{28}$$

が得られる事が分かった。

5 超離散 BKP 方程式の場合

超離散離散 BKP 方程式の場合にも、同様の方法を適用する事が出来る。

離散 BKP 方程式は、以下のような 3 次元の差分方程式である。[7]

$$a_{pq}b_{qr}a_{rp}f_pf_{qr} + b_{pq}a_{qr}a_{rp}f_rf_{pq} + = a_{pq}a_{qr}b_{pr}f_qf_{pr} + b_{pq}b_{qr}b_{pr}ff_{pqr} \tag{29}$$

$$\tag{30}$$

ここで、$a_{ij} = 1, b_{ij} = (z_i - z_j)$ で、z_i は離散 KP 方程式の場合と同様、任意の複素定数である。一般の場合 f は複素数値を取る従属変数であるが、ここでは超離散極限を取るために f は正の実数値を取ると仮定する。$z_p > z_q > z_r$ を仮定すると、右辺、左辺共に正である。以後、計算を簡単にするために、係数 a_{ij}, b_{ij} を全て 1 にする。

離散 BKP 方程式の行列表示の Bäcklund 変換方程式は以下の様になる [2]。

$$\begin{bmatrix} 0 & -f_r & f_q & f_{qr} & -f & 0 & 0 & 0 \\ f_r & 0 & -f_p & -f_{pr} & 0 & f & 0 & 0 \\ -f_q & f_p & 0 & f_{pq} & 0 & 0 & -f & 0 \\ f_{qr} & -f_{pr} & f_{pq} & 0 & 0 & 0 & 0 & -f \\ f_{pqr} & 0 & 0 & 0 & 0 & f_{pq} & -f_{pr} & -f \\ 0 & -f_{pqr} & 0 & 0 & -f_{pq} & 0 & f_{qr} & f_q \\ 0 & 0 & f_{pqr} & 0 & f_{pr} & -f_{qr} & 0 & -f_r \\ 0 & 0 & 0 & -f_{pqr} & f_p & -f_q & f_r & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g_p \\ g_q \\ g_r \\ g \\ g_{qr} \\ g_{pr} \\ g_{pq} \\ g_{pqr} \end{bmatrix} = 0 \tag{31}$$

この場合も、Bäcklund 変換方程式が g について解けるためには、(31) の行列の行列式が 0 にならなければならないが、実際に計算してみると、これは離散 BKP 方程式の 4 乗

$$(f_p f_{qr} + f_r f_{pq} - f_q f_{pr} - f f_{pqr})^4 = 0 \tag{32}$$

になることが分かる。

離散 BKP 方程式とその Bäcklund 変換方程式の超離散極限は、離散 KP 方程式の場合と同じ従属変数変換をする事で得る事ができ、それぞれ以下の様になる。

超離散 BKP 方程式：

$$\mathrm{Max}(F_p + F_{qr}, F_r + F_{pq}) = \mathrm{Max}(F_q + F_{pr}, F + F_{pqr}) \tag{33}$$

Bäcklund 変換方程式:

$$\begin{aligned} \mathrm{Max}(F_r + G_q, F + G_{qr}) &= \mathrm{Max}(F_q + G_r, F_{qr} + G) \\ \mathrm{Max}(F_r + G_p, F + G_{pr}) &= \mathrm{Max}(F_p + G_r, F_{pr} + G) \\ \mathrm{Max}(F_q + G_p, F + G_{pq}) &= \mathrm{Max}(F_p + G_q, F_{pq} + G) \\ \mathrm{Max}(F_{qr} + G_p, F_{pq} + G_r) &= \mathrm{Max}(F_{pr} + G_q, F + G_{pqr}) \\ \mathrm{Max}(F_{pr} + G_{pq}, F_p + G_{pqr}) &= \mathrm{Max}(F_{pq} + G_{pr}, F_{pqr} + G_p) \\ \mathrm{Max}(F_{qr} + G_{pq}, F_q + G_{pqr}) &= \mathrm{Max}(F_{pq} + G_{qr}, F_{pqr} + G_q) \\ \mathrm{Max}(F_{qr} + G_{pr}, F_r + G_{pqr}) &= \mathrm{Max}(F_{pr} + G_{qr}, F_{pqr} + G_r) \\ \mathrm{Max}(F_{pqr} + G, F_q + G_{pr}) &= \mathrm{Max}(F_p + G_{qr}, F_r + G_{pq}) \end{aligned} \tag{34}$$

この Bäcklund 変換方程式に、3 章の変数を消去するアルゴリズムを適用すると、8 個の G $(G, G_p, G_q, G_r, G_{qr}, G_{pr}, G_{pq}, G_{pqr})$ を消去でき、最終的に、この場合にも超離散 BKP 方程式の絶対値が得られる事が分かった。

$$\|\mathrm{Max}(F_p + F_{qr}, F_r + F_{pq}) - \mathrm{Max}(F_q + F_{pr}, F + F_{pqr})\| = 0 \tag{35}$$

6 結論

超離散 KP 方程式と超離散 BKP 方程式の場合を例に取り、ソリトンセルオートマトンモデルでも、Bäcklund 変換方程式の無矛盾条件を計算できる事を示した。具体的には、

1. 差分方程式の段階で、行列×ベクトル=0 の形の Bäcklund 変換方程式を構成できる事を示し、

2. Max Plus 方程式でも、N 個の線形方程式から N 個の変数を消去できる事を示し、

3. Bäcklund 変換方程式の行列表示を超差分化したものに、この結果を適用する事で、これらのセルオートマトンモデルでも無矛盾条件を計算できる事を示した。超離散 KP 方程式、超離散 BKP 方程式のどちらの場合も、この無矛盾条件は、もとの方程式の絶対値を与える事を示した。

参考文献

[1] N. Shinzawa and S. Saito 1998 J. Phys. A: Math Gen. **31** 4533-4540
N. Shinzawa 2000 J. Phys. A: Math Gen. **33** 3957-3970

[2] 新澤 信彦、広田良吾 、数理解析研究所講究録 **1280** (2002) 71-75

[3] T Tokihiro, D Takahashi and J Matsukidaira, J. Phys. A **33** (2000) 607-619

[4] D. Takahashi and J. Satsuma, J. Phys. Soc. Jpn. **59** (1990) 3514
D. Takahashi and J. Matsukidaira 1995 Phys. Lett. A **209** 184
T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira, and J. Satsuma Phys. Rev. Lett. **76** 3247

[5] Hirota R 1981 J. Phys. Soc. Japan. **50** 3785-3791

[6] Kashiwara M, Miwa T 1981 Proc. Japan Acad., **57**,Ser. A
Date E, Jimbo M, Kashiwara M and Miwa T 1981 JPSJ **50**, 3806-4812
Date E, Jimbo M and Miwa T 1982, JPSJ **51**, 4125-4131

[7] Date E, Jimbo M, Kashiwara M and Miwa T 1981 JPSJ **50**, 3806-4812
Date E, Jimbo M, Kashiwara M and Miwa T 1982 Physica 4D 343-365