

研究集会報告 14ME-S7

非線形波動および非線形力学系に
関する最近の話題



九州大学応用力学研究所

2003 年 4 月

Reports of RIAM Symposium

No.14ME-S7

Recent Topics on Nonlinear Waves and Nonlinear Dynamics

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 6 - 8, 2002

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

April, 2003

研究集会「非線形波動および非線形力学系に関する最近の話題」報告集

2002年11月6日～8日

研究代表者 東京大学数理科学研究科 時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)

目 次

1. $2M$ 階線形常微分方程式コーシー問題の解の満たす倍角公式 1
大阪大学基礎工学研究科 永井 敦 (NAGAI Atsushi)
大阪大学基礎工学研究科 亀高 惟倫 (KAMETAKA Yoshinori)
2. 異方的複素ギンツブルグーランダウ方程式のパルス解 7
九州大学総合理工学研究院 坂口 英継 (SAKAGUCHI Hidetsugu)
3. 複素 Swift-Hohenberg 方程式の局在解 11
九州大学応用力学研究所 丸野 健一 (MARUNO Ken-ichi)
Australian National Univ. A. Ankiewicz
Australian National Univ. N. Akhmediev
4. On the robustness of solitons 17
東京大学生産技術研究所 S. V. Dmitriev
電気通信大学電気通信学部 重成 武 (SHIGENARI Takeshi)
5. 光ソリトン通信の実用化について 23
関西電力株式会社総合技術研究所 下浦 一宏 (SHIMOURA Kazuhiro)
6. photonic crystal における非線形局在モードと光通信への応用 29
長崎総合科学大学新技術創生研究所 武野 正三 (TAKENO Shozo)
7. 同心回転する渦糸対に関する実験 36
横浜国立大学工学府 干場 英輝 (HOSHIBA Hideki)
横浜国立大学工学研究院 渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
8. 渦輪の周方向に伝播する波の時間発展に関する実験 42
横浜国立大学工学府 秦 武史 (SHIN Takeshi)
横浜国立大学工学研究院 渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
9. 円筒 KdV 方程式の $(2+1)$ 次元化とその周辺 48
京都大学情報学研究科 小林 匡 (KOBAYASHI Tadashi)
富山県立大学工学部 戸田 晃一 (TODA Kouichi)

10. A construction of Soliton equations on Noncommutative spaces	58
富山県立大学工学部	戸田 晃一 (TODA Kouichi)	
東京大学理学系研究科	浜中 真志 (HAMANAKA Masashi)	
11. 摂動的 Lie symmetry による銀河間磁場の時間発展の解析	62
名古屋大学理学研究科	村田 宗一 (MURATA Souichi)	
12. Dynamics and Bistability in a Reduced Model of the lac Operon : Comparison with Experimental Data	66
早稲田大学理工学研究科	堀家 大裕 (HORIKE Daisuke)	
13. 可換な Lie 代数構造を持つ可積分な Lotka-Volterra 系	72
大同工業大学教養部	今井 健二 (IMAI Kenji)	
名古屋大学人間情報学研究科	平田 吉博 (HIRATA Yoshihiro)	
14. The extended Lotka-Volterra lattice and affine Jacobi varieties of spectral curves	78
東京大学総合文化研究科	井上 玲 (INOUE Rei)	
15. ラプラス変換の連分数展開とパルヴェ方程式	83
京都大学情報学研究科	大平 倫宏 (OHIRA Norihiro)	
京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
16. Garnier 系の Poisson 構造	89
神戸大学自然科学研究科	鈴木 貴雄 (SUZUKI Takao)	
17. 周期的 Darboux 鎖と周期的戸田格子の類似性	95
京都大学総合人間学部	高崎 金久 (TAKASAKI Kanehisa)	
18. 流体の不安定による擾乱発達の上限值問題	101
東京大学数理科学研究科	石岡 圭一 (ISHIOKA Keiichi)	
19. Davey-Stewartson 方程式系での平面波の安定性	107
宇都宮大学工学部	矢嶋 徹 (YAJIMA Tetsu)	
竜谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)	
20. cKP 方程式の "spider-web solution" について	112
東京大学数理科学研究科	磯島 伸 (ISOJIMA Shin)	
東京大学数理科学研究科	ウィロックス・ラルフ (Wilcox Ralph)	
東京大学数理科学研究科	薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)	
21. Discretization of the coupled nonlinear Schrödinger equations	120
早稲田大学名誉教授	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	

2 2 . 可積分同次ポテンシャル系の Modified KP 層の簡約としての解釈と差分化	125
神戸大学自然科学研究科 木村 欣司 (KIMURA Kinji)	
2 3 . 非局所的非線形シュレディンガー方程式の逆散乱法：厳密に解ける固有値問題	131
山口大学工学部 松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	
2 4 . 変形矢嶋-及川方程式の相似簡約とパンルベ方程式	138
東北大学理学研究科 菊地 哲也 (KIKUCHI Tetsuya)	
2 5 . 離散パンルヴェ方程式の理論：現状と展望	144
九州大学数理学研究院 梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
2 6 . $A_5^{(1)}$ 型 Noumi-Yamada 系に付随する特殊多項式	155
神戸大学自然科学研究科 増田 哲 (MASUDA Tetsu)	
2 7 . R_{II} 有理関数系と R_{II} chain について	159
京都大学情報学研究科 向平 敦史 (MUKAIHIRA Atsushi)	
京都大学情報学研究科 辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)	
2 8 . 超離散 QRT 系と扇について	165
東京大学数理科学研究科 野邊 厚 (NOBE Atsushi)	
2 9 . 区分線形写像力学系に対する可積分系理論からのアプローチ I	171
早稲田大学理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
早稲田大学理工学部 岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学名誉教授 広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
3 0 . 区分線形写像力学系に対する可積分系理論からのアプローチ II	177
早稲田大学理工学部 岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
早稲田大学名誉教授 広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	

区分線形写像力学系に対する 可積分系理論からのアプローチ I

早稲田大学 理工学部 数理科学科
高橋大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
岩尾昌央 (IWAO Masataka)
広田良吾 (HIROTA Ryogo)

1 はじめに

天体運動に端を発する力学系理論は長い歴史があり、微分方程式の基礎理論をベースに可積分系やカオス系などの非線形力学系と関連しながら発展してきた。その中でも区分線形写像力学系は、状態変数の値の範囲に応じて写像が変わるが個々の範囲においては線形であるという一見単純な構成を持っている。このため、いろいろな非線形系のプロトタイプとして、また、系の本質を捉えるベースモデルとして重要な役割を果たしている。

一方、可積分系理論において超離散化手法が開発されたことにより、非線形差分系のある種のものには \max 演算と \pm 演算による単純な構成の系に書き換えが可能であることが解明された [1-3]。 \max 演算と \pm 演算で構成される系というのは、まさに区分線形写像力学系の範疇に属するものである。

そこで、区分線形写像力学系について可積分系理論の立場から理論の再構築を行おうというのが我々の最終的な目的である。しかしながら、目的はまだ遠く、手近なところから順に経験を蓄積していくしか手がないのが現状である。そこで本稿では、再帰系を題材にしてどのようなアプローチがありうるか探ってみることにする。

2 線形写像と非線形写像

まず、最も簡単な力学系のひとつとして、 $-2\pi/5$ の回転を表す線形写像

$$\begin{bmatrix} U_{n+1} \\ V_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{5} & \sin \frac{2\pi}{5} \\ -\sin \frac{2\pi}{5} & \cos \frac{2\pi}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ V_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考えよう. この写像は, 図 1 のように相平面を 5 つの扇に等分し, 各扇を

$$0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

のように写像する線形写像であると言い換えてもいい. ただし, 原点周りの純粋な回転だけの写像であって動径方向に伸縮がないので, 図中の黒丸は隣の黒丸に写像されることも指定しておこう.

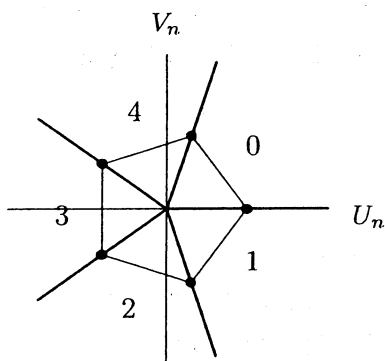


図 1: $-2\pi/5$ の回転写像

今度は図 2 のような写像力学系を考えよう. 各扇は $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 0$ のように扇ごとに定まる線形写像で写像され, 黒丸は隣の黒丸に移ることとする. (この扇という概念は代数幾何学で出てくる概念である [4].) このとき, 相平面

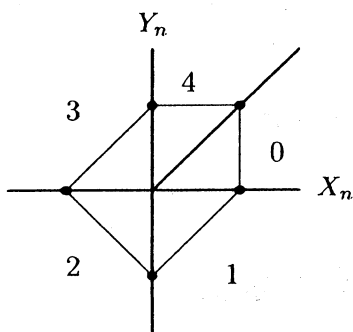


図 2: 非線形力学系

全体の写像を, それぞれの扇の写像 (j から $j+1 \pmod{5}$) ごとに場合分けして記述するのはたやすい. しかしながらそれをひとまとめにして

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = G(X_n, Y_n) \end{cases}$$

の形に表すにはどうすればよいであろうか。素朴にこれを行うには、とりあえず $F(X_n, Y_n)$, $G(X_n, Y_n)$ をグラフで観察すればよい。すると図 3 のような形であることがわかる。このグラフは \max 関数を用いれば簡単に表すことができ、結局

$$\begin{cases} X_{n+1} = Y_n \\ Y_{n+1} = \max(0, Y_n) - X_n \end{cases} \quad (2)$$

すなわち

$$X_{n+1} = \max(0, X_n) - X_{n-1} \quad (3)$$

であることがわかる。また、相平面での写像の様子を考えると、この方程式は任

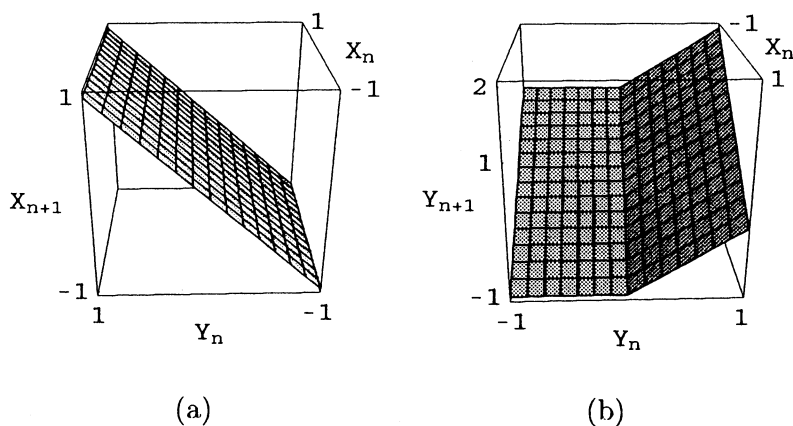


図 3: (a) $F(X_n, Y_n)$, (b) $G(X_n, Y_n)$ のグラフ

意の初期値からの解が常に周期 5 の周期解になる再帰方程式であることがすぐにわかる [3, 5].

ところで、図 1 の写像を少し歪めれば図 2 の写像になる。もし相平面において (U_n, V_n) と (X_n, Y_n) とを結ぶ座標変換が存在すれば、(1) と (2) を変換で結ぶことができる。この変換も、素朴に 2 つの相平面での点の対応関係を考え $X_n = f(U_n, V_n)$ の形のグラフを描けばすぐにわかる。グラフは図 4 のようになり、これより直ちに

$$X_n = \max\left(\sin \frac{2\pi}{5} U_n + (1 - \cos \frac{2\pi}{5}) V_n, \sin \frac{\pi}{5} U_n + \cos \frac{\pi}{5} V_n, \sin \frac{2\pi}{5} U_n + \cos \frac{2\pi}{5} V_n\right) \quad (4)$$

となる。もちろん U_n, V_n の一般解は回転写像なのですぐに n の式で表すことができ、これより (3) の一般解は r, θ_0 を任意定数として次式で与えられる。

$$X_n = r \cdot \max\left(-\sin\left(\theta_0 - \frac{2n+2}{5}\pi\right) + \sin\left(\theta_0 - \frac{2n}{5}\pi\right), \right. \\ \left. -\sin\left(\theta_0 - \frac{2n+4}{5}\pi\right), \sin\left(\theta_0 - \frac{2n+8}{5}\pi\right)\right)$$

つまり (3) は (4) を通じて (1) の形に線形化できる非線形力学系である。

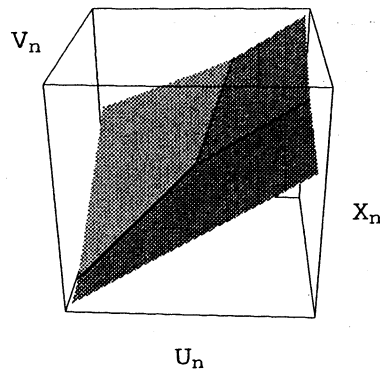


図 4: $X_n = f(U_n, V_n)$ のグラフ

3 再帰方程式の幾何的構成

前節のような仕掛けはどれくらい汎用性があるだろうか。相平面を原点を中心に扇に分け、ある扇から別の扇へは線形写像で写像され、そのような写像を繰り返せば元の扇に戻るような力学系を考えよう。ただし、原点は原点に写像され、扇の各点は一定の写像の後に自分自身に戻るとし、相平面全体の写像としては連続写像であることを要請する。すると相平面内の任意の点からの解は一定周期で元に戻るので、時間発展は再帰方程式で記述される。しかも前節の結論を敷衍すると、詳しい議論は省略するが、その種の再帰方程式は \max で表せる区分線形型であり、やはり \max で表せる変数変換を通じて線形化可能になる。

このことを具体的に確かめてみるため、周期3の再帰方程式に関して、相平面で写像を幾何的に定義することだけから方程式を記述してみよう。まず、図5で示すような一般的な周期3の再帰系を考える。P, Q, Rは扇同士の境界となる半

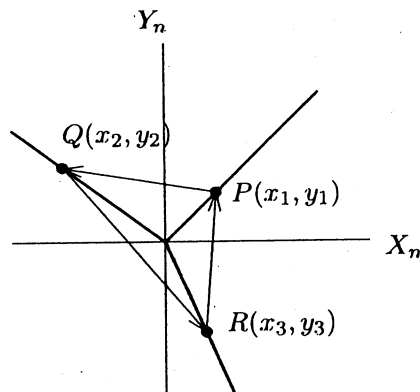


図 5: 周期3の再帰系

直線上にあるとし、 P は Q に、 Q は R に、 R は P に写像されるとする。実は、この P, Q, R の座標を決めてしまえば写像が定まる。なぜならば、扇から扇への写像はそれぞれ線形であるので、たとえば線分 PQ は線分 QR に写像され、 PQ 上の任意の内分点は同じ内分比で QR に写像され、原点を中心に P, Q, R を任意に r 倍だけ拡大縮小した点 P', Q', R' も同様の写像に従うからである。

このとき X_n, Y_n に関する写像を

$$\begin{cases} X_{n+1} = F(X_n, Y_n) \\ Y_{n+1} = G(X_n, Y_n) \end{cases}$$

とし、 XYZ 空間に描いた $Z = F(X, Y)$ のグラフを考える。すると、図5のそれぞれの扇の領域では $F(X, Y)$ が線形写像なので、 $Z = F(X, Y)$ のグラフは扇の各領域に対しては平面でなければならない。ということは以下のようにして $F(X, Y)$ を構成できる。まず、 XYZ 空間内の点 $P_1 \sim P_3$ を

$$P_1(x_1, y_1, x_2), \quad P_2(x_2, y_2, x_3), \quad P_3(x_3, y_3, x_1)$$

と定義し、 P_j の位置ベクトルを t_j とする。 $Z = F(X, Y)$ のグラフは、原点を O とすると、 O, P_1, P_2 を通る平面、 O, P_2, P_3 を通る平面、 O, P_3, P_1 を通る平面の3つが合わさった形をしている。そこで

$$n_{12} = t_1 \times t_2, \quad n_{23} = t_2 \times t_3, \quad n_{31} = t_3 \times t_1$$

とすると、 $n_{12} \cdot t_3 > 0$ ならば

$$F(X, Y) = \max \left(-\frac{1}{n_{12,z}}(n_{12,x}X + n_{12,y}Y), -\frac{1}{n_{23,z}}(n_{23,x}X + n_{23,y}Y), -\frac{1}{n_{31,z}}(n_{31,x}X + n_{31,y}Y) \right)$$

となり、逆に $n_{12} \cdot t_3 < 0$ ならば上式の \max を \min に変えたものを $F(X, Y)$ とすればよい。 $G(X, Y)$ も同様にして作ることができる。以下に、このようにして導いた周期3の再帰方程式のうちシンプルな形をしているものを2例示す。

a) $P(1, 0), Q(0, 1), R(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ の場合

$$\begin{cases} X_{n+1} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \min(Y_n, 2Y_n, X_n + Y_n) \\ Y_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \max(\sqrt{2}(X_n - Y_n), X_n - Y_n, \sqrt{2}X_n - Y_n) \end{cases}$$

b) $P(3, -1), Q(-1, 3), R(-1, -1)$ の場合

$$\begin{cases} X_{n+1} = -\min(X_n + 2Y_n, 2X_n + Y_n, \frac{1}{2}(X_n + Y_n)) \\ Y_{n+1} = X_n \end{cases}$$

周期がもっと大きい再帰系も同様の手続きで作ることができるが、周期3よりも場合分けが多く面倒である。

4 おわりに

区分線形写像力学系のうち、再帰系になるものについて2次元の力学系に焦点を絞って説明をしてきた。再帰系に限って言えば、より高次元の力学系についても同様の解析が可能であるのは明らかである。重要な結論としては、区分線形型の再帰系は、線形化可能な非線形系に属するということである。これを出発点として、もっと複雑な解の挙動を示す系、楽なところではいわゆる可積分力学系、そしてさらに極限軌道のある系やカオティックな系について、保存量・厳密解・双線形化等の可積分理論的道具立てを駆使した力学系理論を展開したいと思う。

参考文献

- [1] “特集 超離散”, 数理科学 435 (1999)
- [2] 中村佳正編, 『可積分系の応用数理』(裳華房, 2000)
- [3] 広田良吾・高橋大輔, 『差分と超離散』(共立出版, 2003)
- [4] 石田正典, 『すうがうの風景2 トーリック多様体入門』(朝倉書店, 2000)
- [5] R.Hirota and H.Yahagi, “Recurrence Equations, An Integrable System”, J. Phys. Soc. Jpn. 71 (2002) 2867–2872

区分線形写像力学系に対する可積分系理論からのアプローチ II

早稲田大学 理工学部 岩尾 昌央 (IWAO Masataka)

早稲田大学 理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

早稲田大学 理工学部 広田 良吾 (HIROTA Ryogo)

区分線形写像力学系における再帰型の方程式について、可積分系理論から統一的な視点を与える。まず、ある形の自由度1の古典ハミルトン系に対し、その一般解を完全に共有するような、離散力学系を構成する手法を与える。次にこの離散力学系に関して、超離散化の手続きを適用することにより、再帰型の区分線形力学系が系統的に得られることを検証する。

1 離散化・超離散化の方針

正準方程式

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial P}, \\ \frac{dP}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial Q}.\end{aligned}$$

おける一般解が、そのまま離散方程式の解にもなるように、離散化する。ここで、超離散化が行えることを前提にするため、ハミルトニアンとしては次のような特殊な形を想定する。 $\epsilon > 0$ はパラメータとして

$$H(Q, P) = \epsilon \log \left(\sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} \exp \left[\frac{jQ + kP}{\epsilon} \right] \right)$$

ただし有限集合 $\Lambda \subset \{\text{整数}\} \times \{\text{整数}\}$ で、定数 $\alpha_{(j,k)}$ は、具体的な例を計算する際に適当に与えるものとする。

2 離散化の概略

シフト演算子 E_δ を

$$E_\delta \phi(t) = \phi(t + \delta)$$

として、離散方程式

$$\begin{aligned}E_\delta Q &= \epsilon \log \left\{ f \left(\exp \left[\frac{Q}{\epsilon} \right], \exp \left[\frac{P}{\epsilon} \right] \right) \right\}, \\ E_\delta P &= \epsilon \log \left\{ g \left(\exp \left[\frac{Q}{\epsilon} \right], \exp \left[\frac{P}{\epsilon} \right] \right) \right\},\end{aligned}$$

を仮定して、ハミルトニアン $H(P, Q)$ に対して

$$H(E_\delta Q, E_\delta P) = H(Q, P)$$

となるような、関数 f, g を求める。

3 有理形への変数変換

変数変換

$$\begin{aligned} q &= \exp[Q/\epsilon], \\ p &= \exp[P/\epsilon], \\ h(q, p) &= \exp[H(Q, P)/\epsilon], \end{aligned}$$

によりハミルトニアンの定義式は次の形になる。

$$h(q, p) = \sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} q^j p^k.$$

今、これを保存するような離散系

$$\begin{aligned} E_\delta q &= f(q, p), \\ E_\delta p &= g(q, p), \end{aligned}$$

を求めようとしている。

4 時間発展の可換性

以上の準備のもと、

$$E_\delta \left(\frac{dQ}{dt} \right), \frac{d(E_\delta Q)}{dt}, E_\delta \left(\frac{dP}{dt} \right), \frac{d(E_\delta P)}{dt}$$

を計算すると次を得る：

$$\begin{aligned} E_\delta \left(\frac{dQ}{dt} \right) &= \frac{\xi(f(q, p), g(q, p))}{f(q, p)h(E_\delta q, E_\delta p)}, \\ \frac{d(E_\delta Q)}{dt} &= \frac{\xi(q, p) \frac{\partial f}{\partial q}(q, p) + \eta(q, p) \frac{\partial f}{\partial p}(q, p)}{f(q, p)h(q, p)}, \\ E_\delta \left(\frac{dP}{dt} \right) &= \frac{\eta(f(q, p), g(q, p))}{g(q, p)h(E_\delta q, E_\delta p)}, \\ \frac{d(E_\delta P)}{dt} &= \frac{\xi(q, p) \frac{\partial g}{\partial q}(q, p) + \eta(q, p) \frac{\partial g}{\partial p}(q, p)}{g(q, p)h(q, p)}, \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}\xi(q, p) &= \sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} k q^{j+1} p^k, \\ \eta(q, p) &= - \sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} j q^j p^{k+1},\end{aligned}$$

とおいた。

従って、下の述語 (A), (B), (C) において、命題

$$(A) \text{ and } (B) \Rightarrow (C),$$

$$(B) \text{ and } (C) \Rightarrow (A),$$

$$(C) \text{ and } (A) \Rightarrow (B),$$

が成り立つことがわかる。

- 述語 (A);

$$h(E_\delta q, E_\delta p) = h(q, p)$$

- 述語 (B);

$$E_\delta \left(\frac{dQ}{dt} \right) = \frac{d(E_\delta Q)}{dt}, \quad E_\delta \left(\frac{dP}{dt} \right) = \frac{d(E_\delta P)}{dt}.$$

- 述語 (C);

関数 $f = f(q, p)$ と $g = g(q, p)$ が偏微分方程式

$$\begin{aligned}\left[\xi(q, p) \frac{\partial}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial}{\partial p} \right] f &= \xi(f, g), \\ \left[\xi(q, p) \frac{\partial}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial}{\partial p} \right] g &= \eta(f, g),\end{aligned}$$

を満たす。ただし

$$\begin{aligned}\xi(q, p) &= \sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} k q^{j+1} p^k, \\ \eta(q, p) &= - \sum_{(j,k) \in \Lambda} \alpha_{(j,k)} j q^j p^{k+1}.\end{aligned}$$

5 命題の意味するところ

従って、次の二つは同値。

- f, g が上の偏微分方程式を満たし、 $h(f(q, p), g(q, p)) = h(q, p)$ を満たす。
- 正準方程式と離散方程式の時間発展が可換で、離散方程式がハミルトニアンを保存する。

ところがこれらの条件は、以下で扱う例では、実は次の条件とも同値になる（詳細略）。

- 正準方程式の一般解がまた離散方程式をも満たす。

そこで離散方程式を得るために、まず偏微分方程式の特殊解として f, g を得ることを考える。

6 例

Q と P に関して対称で、 $h(q, p)$ に関して、 q と p に関する次数が $-1, 0, 1$ の項のみを含んでいる場合を考える。

$$\begin{aligned}
 H(Q, P) = & \\
 \epsilon \log \{ & c_1(\exp[(Q + P)/\epsilon] \\
 & + c_2(\exp[Q/\epsilon] + \exp[P/\epsilon]) \\
 & + c_3(\exp[(Q - P)/\epsilon] + \exp[(-Q + P)/\epsilon]) \\
 & + c_4(\exp[-P/\epsilon] + \exp[-Q/\epsilon]) \\
 & + c_5 \exp[(-Q - P)/\epsilon] \}
 \end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}
 h(q, p) & \\
 = c_1 qp + c_2(q + p) + c_3\left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) + c_4\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{c_5}{qp}
 \end{aligned}$$

従って関数 ξ, η は

$$\begin{aligned}
 \xi(q, p) & \\
 = (c_1 q^2 + c_2 q + c_3)p - (c_3 q^2 + c_4 q + c_5)p^{-1}, & \\
 \eta(q, p) & \\
 = -q(c_1 p^2 + c_2 p + c_3) - q^{-1}(c_3 p^2 + c_4 p + c_5) &
 \end{aligned}$$

となる。このとき偏微分方程式

$$\begin{aligned}
 \left[\xi(q, p) \frac{\partial}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial}{\partial p} \right] f &= \xi(f, g), \\
 \left[\xi(q, p) \frac{\partial}{\partial q} + \eta(q, p) \frac{\partial}{\partial p} \right] g &= \eta(f, g),
 \end{aligned}$$

を解きたい。ハミルトニアンの特称性から、今求めようとしている

$$\begin{aligned}
 E_\delta q &= f(q, p), \\
 E_\delta p &= g(q, p),
 \end{aligned}$$

において

$$f(q, p) = p$$

となるものが考えられる。これを偏微分方程式の一番目の式に代入すると、

$$\eta(q, p) = \xi(p, g)$$

となり、 g に関する2次の代数方程式となってしまう。これにより

$$g = \frac{c_3 p^2 + c_4 p + c_5}{(c_1 p^2 + c_2 p + c_3)q} \text{ or } -q$$

が得られるが、後者は $h(q, p)$ を保存しないことが明らかなので、前者だけ調べると、確かにもう一方の偏微分方程式の解にもなっており、さらに保存則

$$h(E_\delta q, E_\delta p) = h(q, p)$$

も確かめられる。従って一つの離散方程式が得られたことになる。(この方程式は、QRT系[1,2,3]に帰着する)

7 超離散化

例として

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 1, \quad c_4 = 2, \quad c_5 = 1$$

と選ぶと、保存量は

$$\begin{aligned} h(q, p) &= (q + p) + \left(\frac{q}{p} + \frac{p}{q}\right) + 2\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) + \frac{1}{qp} \end{aligned}$$

で、 q, p に関する離散方程式は、分母・分子の共通因子 $(p+1)$ が打ち消しあって

$$\begin{aligned} E_\delta q &= p, \\ E_\delta p &= \frac{p+1}{q} \end{aligned}$$

となる。

超離散化($\epsilon \rightarrow +0$)により

$$H(Q, P) = \max\{Q, P, Q - P, P - Q, -Q - P\},$$

および

$$\begin{aligned} E_\delta Q &= P, \\ E_\delta P &= \max\{P, 0\} - Q \end{aligned}$$

が得られる[4]。

詳しく述べる余地がないが、この方程式は相空間 (Q, P) における任意領域の面積が時間発展で不変である。

8 まとめ

本報告では、特殊な形のハミルトニアンから、正準方程式の一般解を共有する離散方程式を導出する手法について述べ、実際に超離散化可能なハミルトニアンから離散方程式を導出して、超離散化の手続きを適用した例について述べた。

9 参考文献

1. G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson: Integrable Mappings and soliton equations, Phys. Lett. **A126**(1988) 419.
2. G. R. W. Quispel, J. A. G. Roberts and C. J. Thompson: Integrable Mappings and soliton equations II, Physica **D34**(1989) 183.
3. 中村佳正編「可積分系の応用数理」(裳華房) 第4章(梶原健司著) p.161.
4. 中村佳正編「可積分系の応用数理」(裳華房) 第3章(松木平淳太著) p.113.