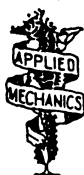


研究集会報告 13ME-S4

非線形波動現象の理論と応用



九州大学応用力学研究所

2002年 4月

Reports of RIAM Symposium

No.11ME-S4

*Nonlinear Wave Phenomena and Mathematical Structure of
their Models*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 8 - 10, 1999

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

March, 2000

研究集会「非線形波動現象の理論と応用」報告集

2001年11月14日～16日

研究代表者 早稲田大学工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

目 次

1. 交通流セルオートマトンモデルにおける Euler-Lagrange 対応 1
 龍谷大学工学部 松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)
 龍谷大学工学部 西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiko)
2. 信号機付き Burgers Cellular Automaton 6
 早稲田大学工学部 橋詰 真美 (HASHIZUME Mami)
 早稲田大学理工学研究科 志田 篤彦 (SHIDA Atsuhiko)
 早稲田大学工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
3. 周期離散戸田方程式と周期箱玉系 12
 東京大学数理科学研究科 君嶋 妙子 (KIMIJIMA Taeko)
 東京大学数理科学研究科 時弘 哲治 (TOKIHIRO Tetsuji)
4. 結合型 KP ヒエラルキーから導かれた結合型戸田格子とその簡約 18
 東京大学数理科学研究科 ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)
5. cKP 方程式系のさまざまな解について 24
 東京大学数理科学研究科 磯島 伸 (ISOJIMA Shin)
 東京大学数理科学研究科 ウィロックス ラルフ (WILLOX Ralph)
 東京大学数理科学研究科 薩摩 順吉 (SATSUMA Junkichi)
6. Bilinear Forms of Relativistic Deformation of Integrable Lattices 30
 九州大学応用力学研究所 丸野 健一 (MARUNO Ken-ichi)
 Dep. Math, Univ. South Florida Wen-Xiu Ma
7. Supersymmetric Soliton Equations 36
 CTP, Ecole Polytechnique, France A. Ramani
 Inst. Phys. and Nucl. Eng., Romania A. S. Carstea
 GMPIB, Univ. Paris VII, France B. Grammaticos
8. 拡大 Weyl 群 $\widetilde{W}(A_1^{(1)} \times A_3^{(1)})$ の KNY 双有理表現の拡張として得られる $\widetilde{W}(D_5^{(1)})$ 43
 東京大学数理科学研究科 竹縄 知之 (TAKENAWA Tomoyuki)

9. q -Painlevé III 方程式: 導出・対称性・特殊解	53
九州大学数理学研究院	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
神戸大学自然科学研究科	木村 欣司 (KIMURA Kinji)	
10. q -Painlevé V 方程式の有理解	61
神戸大学自然科学研究科	増田 哲 (MASUDA Tetsu)	
11. トロイダル対称性に基づくソリトン方程式の(2+1)次元化	69
立教大学理学部	笈 三郎 (KAKEI Saburo)	
12. 非一様性をもつ光ファイバー中のソリトン伝播	75
九州大学理学府	久保田 陽二 (KUBOTA Yoji)	
九州大学理学研究院	小田垣 孝 (ODAGAKI Takashi)	
13. 離散非線形シュレーディンガー方程式における変調不安定解の相空間構造	81
名古屋大学理学研究科	後藤 振一郎 (GOTO Shin-itiro)	
名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
名古屋大学理学研究科	山田 裕康 (YAMADA Hiroyasu)	
14. 非局所的な非線形シュレーディンガー方程式の多重ソリトン解とその性質	87
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	
15. 微分型非線形シュレーディンガー方程式の拡張について	94
東京大学数理科学研究科	土田 隆之 (TSUCHIDA Takayuki)	
16. 高温超伝導体で見られる非線形局在現象	100
日本原子力研究所	町田 昌彦 (MACHIDA Masahiko)	
日本原子力研究所	佐々 成正 (SASA Narimasa)	
17. 斜面上の粉体流の不安定性	107
九州大学理学府	御手洗 菜美子 (MITARAI Namiko)	
京都大学人間・環境学研究科	早川 尚男 (HAYAKAWA Hisao)	
九州大学理学研究院	中西 秀 (NAKANISHI Hiizu)	
18. 湾曲境界面下における渦糸の運動に関する実験	113
横浜国立大学工学研究科	舟久保 悠子 (FUNAKUBO Yuko)	
横浜国立大学工学研究院	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)	
19. 回転するループソリトン	120
富山大学工学部	角島 浩 (KAKUHATA Hiroshi)	
日本大学理工学部	紺野 公明 (KONNO Kimiaki)	

20. ソリトンの斜め相互作用について	九州大学応用力学研究所	辻 英一 (TSUJI Hidekazu)	128
	九州大学応用力学研究所	及川 正行 (OIKAWA Masayuki)	
21. ギンツブルグ・ランダウ方程式とパターン形成・ダイナミクス	龍谷大学理工学部	森田 善久 (MORITA Yashihisa)	134
22. 興奮性反応拡散方程式におけるパルスの分裂理論	九州大学理学研究院	早瀬 友美乃 (HAYASE Yumino)	144
	広島大学理学研究科	太田 隆夫 (OHTA Takao)	
23. 進行パターンの変調を記述する拡散弱不安定な位相方程式	名古屋大学理学研究科	増富 祐司 (MASUTOMI Yuji)	149
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
24. 離散ミッタークレフラー関数	大阪大学基礎工学研究科	永井 敦 (NAGAI Atsushi)	156
25. 離散可積分特異値計算法の高速化とその数値安定性	大阪大学基礎工学研究科	岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi)	163
	京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
	京都大学情報学研究科	辻本 諭 (TSUJIMOTO Satoshi)	
26. 離散可積分系のある性質について	東京都立大学理学研究科	山本 純一 (YAMAMOTO Jun-ichi)	168
	東京都立大学理学研究科	斉藤 暁 (Saito Satoru)	
	横浜国立大学工学研究院	斉藤 革子 (Saito Noriko)	
	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
27. 離散写像に伴う Hamiltonian Flow	北里大学一般教育	吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	174
	東京都立大学理学研究科	斉藤 暁 (Saito Satoru)	
	東京都立大学理学研究科	首藤 啓 (SHUDO Akira)	
	東京都立大学理学研究科	山本 純一 (YAMAMOTO Jun-ichi)	
28. Lie symmetry による境界値問題の厳密解の構成	名古屋大学理学研究科	村田 宗一 (MURATA Souichi)	180
	名古屋大学理学研究科	野崎 一洋 (NOZAKI Kazuhiro)	
29. 標準形理論による摂動 KdV 方程式の解析	大阪大学基礎工学研究科	平岡 裕章 (HIRAOKA Yasuaki)	186
	オハイオ州立大数学科	児玉 裕治 (KODAMA Yuji)	

30. Role of Nonlinear Rotating Modes in Establishing Normal Heat Conduction in One-Dimensional Nonlinear Lattices	190
Inst. Phys. and Tech., Russia	A. V. Savin	
大阪工業大学情報科学部	武野 正三 (TAKENO Shozo)	
31. ハミルトン系の全保存量を保つ差分化	196
大阪大学基礎工学研究科	峯崎 征隆 (MINESAKI Yukitaka)	
京都大学情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
32. 形式的に完全可積分な4階連立発展方程式の数え上げ	202
同志社大学工学部	渡邊 芳英 (WATANABE Yoshihide)	
広島大学工学研究科	伊藤 雅明 (ITO Masaaki)	
33. Darboux-Lamé Equations and Iso-Monodromic Deformation	209
同志社大学工学部	大宮 真弓 (OHMIYA Mayumi)	
	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
34. 古典微分幾何における可積分系 (非線型ダランベール公式の観点から)	215
福岡大学理学部	井ノ口 順一 (INOBUCHI Jun-ichi)	
35. 可積分系の幾何学的理論	222
力学系研究所	神部 勉 (KAMBE Tsutomu)	
36. 再帰方程式とは	228
早稲田大学理工学研究科	志田 篤彦 (SIDA Atsuhiko)	
早稲田大学理工学部	岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
37. 超離散化可能な再帰方程式系	233
早稲田大学理工学部	岩尾 昌央 (IWAO Masataka)	
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
38. 再帰方程式 I, II	239
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
早稲田大学理工学研究科	矢作 秀之 (YAHAGI Hideyuki)	

再帰方程式とは

早稲田大学大学院理工学研究科 志田 篤彦 (SHIDA Atsuhiko)
早稲田大学理工学部 岩尾 昌央 (IWAO Masataka)
早稲田大学理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)
早稲田大学理工学部 廣田 良吾 (HIROTA Ryogo)

概要

任意の初期値に対し一定周期を持つ方程式を再帰方程式と呼ぶ。ここでは、ある可積分方程式から特殊化によって再帰方程式を構成し、その再帰方程式の保存量について議論する。

1 はじめに

再帰方程式を、任意の初期値に対し一定周期を持つ時間発展型の差分方程式と定義する。たとえば差分方程式を

$$x_{n+k} = f(x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-2}, x_{n+k-1}) \quad (1)$$

とすると、任意の初期値に対して定数 m が存在し、常に $x_{n+m} = x_n$ となるような場合のことをいう。

差分方程式

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + a}{x_n} \quad (a \geq 0) \quad (2)$$

は、保存量

$$\frac{a + (a + 1 + x_n x_{n+1})(x_n + x_{n+1}) + x_{n+1}^2 + x_n^2}{x_n x_{n+1}} \quad (3)$$

を有しているので、可積分である。また、 $x_n = e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}$, $a = e^{\frac{A}{\varepsilon}}$, $\varepsilon \rightarrow +0$ として (2) を超離散化することによって得られる超離散方程式

$$X_{n+2} = \max(X_{n+1}, A) \square X_n \quad (4)$$

も、保存量

$$\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n, \square X_{n+1} + A, \square X_n + A, \square X_{n+1} \square X_n + A, X_{n+1} \square X_n, X_n \square X_{n+1})$$

を有しているので、やはり可積分となる。

ここで、(4) の A の値を変え、その再帰性を調べると以下ようになる。

1) $A < 0$ の場合

$$\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n, X_{n+1} \square X_n, X_n \square X_{n+1}) < \square A$$

の領域で周期 6 の再帰性を示した。それ以外の領域では再帰性は見られない。

2) $A = 0$ の場合

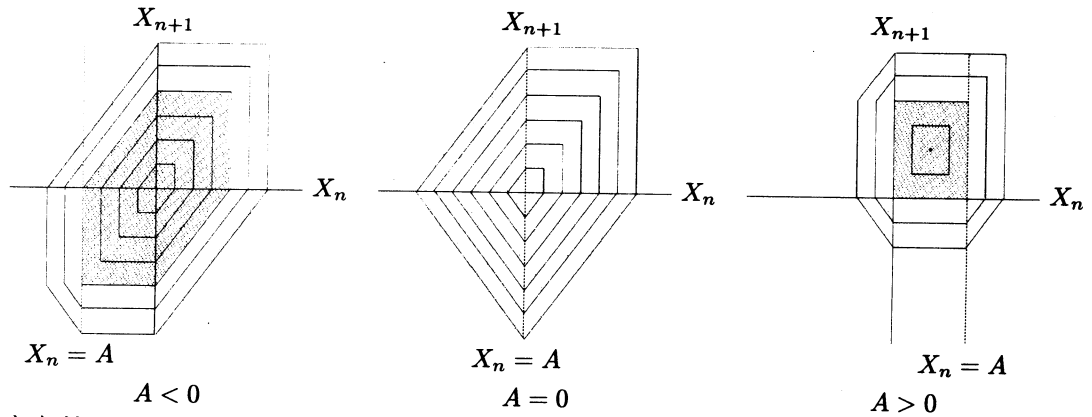
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= \max(x_{n+1}, 0) \square x_n \\ x_{n+3} &= \max(x_n, x_{n+1}, 0) \square x_n \square x_{n+1} \\ x_{n+4} &= \max(x_n, 0) \square x_{n+1} \\ x_{n+5} &= x_n, x_{n+6} = x_{n+1} \end{aligned}$$

となり、常に周期 5 の再帰性を示した。

3) $A > 0$ の場合

$$\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n) < A \quad (5)$$

の領域で周期 4 の再帰性を示した。



したがって、 $A = 0$, $A = \square\infty$ で再帰方程式となることがわかった。以下では、 $A = 0$ のときの再帰方程式の保存量について調べる。

2 再帰方程式の保存量

$A = 0$ として、(2), (4) をそれぞれ

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + 1}{x_n} \quad (6)$$

$$X_{n+2} = \max(X_{n+1}, 0) \square X_n \quad (7)$$

とし、それらの保存量を調べる。

まず、(6) の保存量を調べる。(6) は再帰方程式であるので $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4}$ の基本対称式は保存量となる。したがって、

$$f_1 = x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4}$$

$$f_2 = x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+2} x_{n+3} + x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+4} x_n$$

$$f_3 = x_n x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+3} + x_{n+2} x_{n+4} + x_{n+3} x_n + x_{n+4} x_{n+1}$$

$$f_4 = x_n x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} + x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+3} x_{n+4} x_n + x_{n+4} x_n x_{n+1}$$

$$f_5 = x_n x_{n+1} x_{n+3} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+4} + x_{n+2} x_{n+3} x_n + x_{n+3} x_{n+4} x_{n+1} + x_{n+4} x_n x_{n+2}$$

$$f_6 = x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} + x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+4}$$

$$+ x_n x_{n+1} x_{n+3} x_{n+4} + x_n x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4}$$

$$f_7 = x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4}$$

は、全て保存量となる。しかしこの 7 個の保存量は、互いに以下の関係で結びついているので、独

立な保存量は結局 2 個となる.

$$f_3 = f_1 + 5$$

$$f_4 = f_1^2 \square f_1 \square 2f_2 \square 10$$

$$f_5 = 2f_1 + 5$$

$$f_6 = 2f_1 + f_2 + 5$$

$$f_7 = f_1 + 3$$

次に (7) の保存量を調べる. (7) は, (6) を超離散化した式である, ゆえに (6) の保存量自体を超離散化したものが保存量となりえるので,

$$F_1 = \max(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4})$$

$$F_2 = \max(X_n + X_{n+1}, X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3}, X_{n+3} + X_{n+4}, X_{n+4} + X_n)$$

$$F_3 = \max(X_n + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+3}, X_{n+2} + X_{n+4}, X_{n+3} + X_n, X_{n+4} + X_{n+1})$$

$$F_4 = \max(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, \\ X_n + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+1} + X_{n+4})$$

$$F_5 = \max(X_n + X_{n+1} + X_{n+3}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+3}, \\ X_{n+1} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+4})$$

$$F_6 = \max(X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, \\ X_n + X_{n+1} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+4}, \\ X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3})$$

$$F_7 = X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}$$

は全て保存量となっている.

また, $X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4}$ の基本対称式も当然保存量となるため,

$$F_8 = X_n X_{n+1} + X_{n+1} X_{n+2} + X_{n+2} X_{n+3} + X_{n+3} X_{n+4} + X_{n+4} X_n$$

$$F_9 = X_n X_{n+2} + X_{n+1} X_{n+3} + X_{n+2} X_{n+4} + X_{n+3} X_n + X_{n+4} X_{n+1}$$

$$F_{10} = X_n X_{n+1} X_{n+2} + X_{n+1} X_{n+2} X_{n+3} + X_{n+2} X_{n+3} X_{n+4} + X_{n+3} X_{n+4} X_n + X_{n+4} X_n X_{n+1}$$

$$F_{11} = X_n X_{n+1} X_{n+3} + X_{n+1} X_{n+2} X_{n+4} + X_{n+2} X_{n+3} X_n + X_{n+3} X_{n+4} X_{n+1} + X_{n+4} X_n X_{n+2}$$

$$F_{12} = X_n X_{n+1} X_{n+2} X_{n+3} + X_n X_{n+1} X_{n+2} X_{n+4} + X_n X_{n+1} X_{n+3} X_{n+4} \\ + X_n X_{n+2} X_{n+3} X_{n+4} + X_{n+1} X_{n+2} X_{n+3} X_{n+4}$$

$$F_{13} = X_n X_{n+1} X_{n+2} X_{n+3} X_{n+4}$$

も全て保存量である. ここで, 以上の 13 個の保存量の従属関係は以下のようになり, 独立な保存

量が 2 個であることがわかる。

$$F_3 = F_1$$

$$F_4 = 2F_1$$

$$F_5 = F_1$$

$$F_6 = F_2$$

$$F_7 = F_1$$

$$F_8 = 3F_1^2 \square 3F_1F_2 + F_2^2$$

$$F_9 = \square 8F_1^2 + 9F_1F_2 \square 3F_2^2$$

$$F_{10} = 0$$

$$F_{11} = \square 5F_1^3 + 6F_1^2F_2 \square 2F_1F_2^2$$

$$F_{12} = 4F_1^4 \square 12F_1^3F_2 + 13F_1^2F_2^2 \square 6F_1F_2^3 + F_2^4$$

$$F_{13} = 4F_1^5 \square 12F_1^4F_2 + 13F_1^3F_2^2 \square 6F_1^2F_2^3 + F_1F_2^4$$

また, $F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}$ を逆超離散化すると

$$f_8 = \exp(\log x_n \log x_{n+1} + \log x_{n+1} \log x_{n+2} + \log x_{n+2} \log x_{n+3} \\ + \log x_{n+3} \log x_{n+4} + \log x_{n+4} \log x_n)$$

$$f_9 = \exp(\log x_n \log x_{n+2} + \log x_{n+1} \log x_{n+3} + \log x_{n+2} \log x_{n+4} \\ + \log x_{n+3} \log x_n + \log x_{n+4} \log x_{n+1})$$

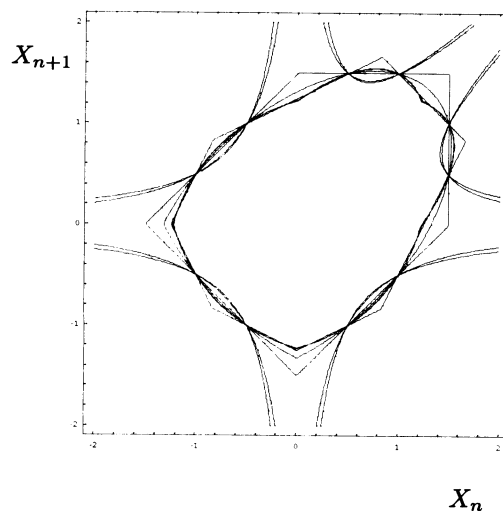
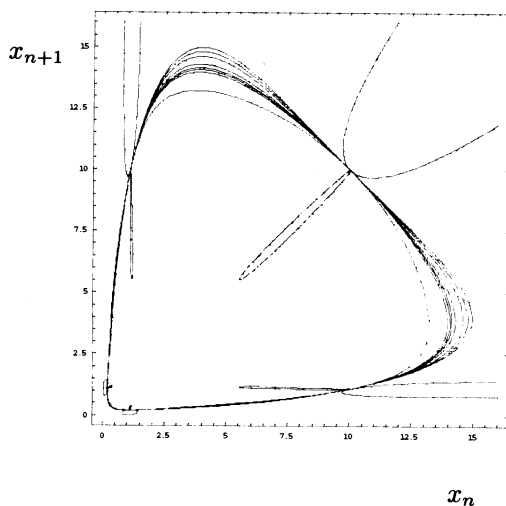
$$f_{10} = \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+1})$$

$$f_{11} = \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+3} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+2})$$

$$f_{12} = \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} \log x_{n+3} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2})$$

$$f_{13} = \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} \log x_{n+3} \log x_{n+4})$$

も f_1, f_2 に従属な保存量である。以下の図は、ある $(x_n, x_{n+1}), (X_n, X_{n+1})$ を通る (6), (7) それぞれの保存量の等高線を示したものである。



ここで、全ての保存量曲線に共通の交点は、それら交点自体が (6), (7) で計算される周期点であることを意味する。すなわち、独立な保存量を用いることによって全ての周期点を得ることができるので、保存量が解の表現そのものを与えている。

3 おわりに

本稿では、特別な方程式について、さらにパラメータが特別な場合についてのみ再帰性を検証した。さらに、その方程式を超離散化した場合でも差分方程式の場合と同じ構造で再帰性が成り立つことを確認した。取り扱った対象が特別なケースにすぎないが、そこで得られたことから次のような一般的予想を立てることはそれほど不自然とは思えない。

再帰方程式は一般の可積分方程式よりも保存量の個数は多いであろう。そして、独立な保存量は初期値の自由度と同じ数だけ存在し、その交点が解を与えるであろう。

今まで、可積分方程式の特殊な場合としてのみ取り扱われていた再帰方程式であるが、本稿で触れたように興味深い数理構造を有している。可積分中の可積分とも言える再帰性について調べることは、意外と面白い展開を見せるかもしれない。