研究集会報告 13ME-S4

非線形波動現象の理論と応用

九州大学応用力学研究所

2002年 4月

Reports of RIAM Symposium

No.11ME-S4

Nonlinear Wave Phenomena and Mathematical Structure of their Models

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy, Kasuga, Fukuoka, Japan, November 8 - 10, 1999

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

March, 2000

研究集会「非線形波動現象の理論と応用」報告集

２００１年１１月１４日～１６日

研究代表者　早稲田大学理工学部　高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

目　次

再帰方程式とは

早稲田大学大学院理工学研究科　志田 篤彦　(SHIDA Atsuhiko)
早稲田大学理工学部　岩尾 昌央　(IWAO Masataka)
早稲田大学理工学部　高橋 大輔　(TAKAHASHI Daisuke)
早稲田大学理工学部　廣田 良吾　(HIROTA Ryogo)

概要

任意の初期値に対し一定周期を持つ方程式を再帰方程式と呼ぶ．ここでは，ある可積分方程式から特殊化によって再帰方程式を構成し，その再帰方程式の保存量について議論する．

1　はじめに

再帰方程式を，任意の初期値に対し一定周期を持つ時間発展型の差分方程式と定義する．たとえば差分方程式を

$$x_{x+k} = f(x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+k\square 2}, x_{n+k\square 1}) \tag{1}$$

とするとき，任意の初期値に対して定数 m が存在し，常に $x_{n+m} = x_n$ となるような場合のことをいう．

差分方程式

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + a}{x_n} \qquad (a \geq 0) \tag{2}$$

は，保存量

$$\frac{a + (a+1+x_n x_{n+1})(x_n + x_{n+1}) + x_{n+1}^2 + x_n^2}{x_n x_{n+1}} \tag{3}$$

を有しているので，可積分である．また，$x_n = e^{\frac{X_n}{\varepsilon}}, a = e^{\frac{A}{\varepsilon}}$，$\varepsilon \to +0$ として (2) を超離散化することによって得られる超離散方程式

$$X_{n+2} = \max(X_{n+1}, A) \square X_n \tag{4}$$

も，保存量

$$\begin{aligned}&\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n, \square X_{n+1} + A,\\ &\quad \square X_n + A, \square X_{n+1} \square X_n + A, X_{n+1} \square X_n, X_n \square X_{n+1})\end{aligned}$$

を有しているので，やはり可積分となる．

ここで，(4) の A の値を変え，その再帰性を調べると以下のようになる．

1) $A < 0$ の場合

$$\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n, X_{n+1} \square X_n, X_n \square X_{n+1}) < \square A$$

の領域で周期 6 の再帰性を示した．それ以外の領域では再帰性は見られない．

2) $A = 0$ の場合

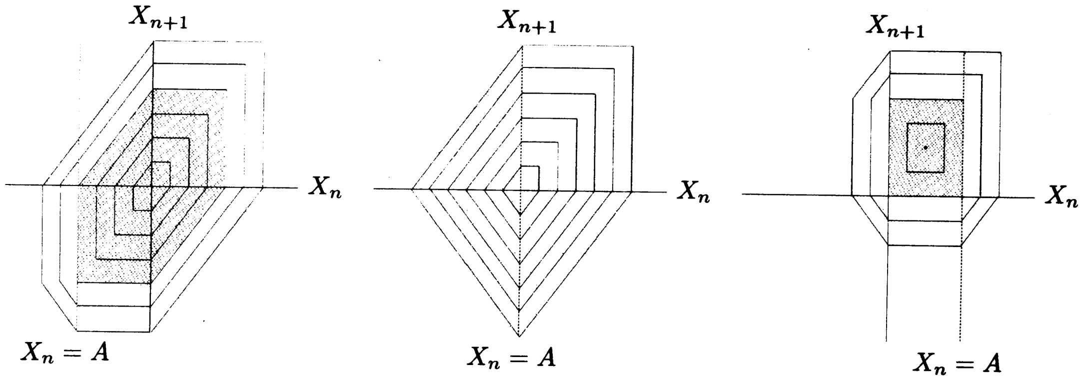
$$\begin{aligned}x_{n+2} &= \max(x_{n+1}, 0) \square x_n\\ x_{n+3} &= \max(x_n, x_{n+1}, 0) \square x_n \square x_{n+1}\\ x_{n+4} &= \max(x_n, 0) \square x_{n+1}\\ x_{n+5} &= x_n, x_{n+6} = x_{n+1}\end{aligned}$$

となり，常に周期 5 の再帰性を示した．

3) $A > 0$ の場合

$$\max(X_{n+1}, X_n, \square X_{n+1}, \square X_n) < A \tag{5}$$

の領域で周期 4 の再帰性を示した．



$A < 0$　　　$A = 0$　　　$A > 0$

したがって，$A = 0$, $A = \square\infty$ で再帰方程式となることがわかった．以下では，$A = 0$ のときの再帰方程式の保存量について調べる．

2　再帰方程式の保存量

$A = 0$ として，(2), (4) をそれぞれ

$$x_{n+2} = \frac{x_{n+1} + 1}{x_n} \tag{6}$$

$$X_{n+2} = \max(X_{n+1}, 0) \square X_n \tag{7}$$

とし，それらの保存量を調べる．

まず，(6) の保存量を調べる．(6) は再帰方程式であるので x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, x_{n+4} の基本対称式は保存量となる．したがって，

$$
\begin{aligned}
f_1 &= x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3} + x_{n+4} \\
f_2 &= x_n x_{n+1} + x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+2} x_{n+3} + x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+4} x_n \\
f_3 &= x_n x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+3} + x_{n+2} x_{n+4} + x_{n+3} x_n + x_{n+4} x_{n+1} \\
f_4 &= x_n x_{n+1} x_{n+2} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} + x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+3} x_{n+4} x_n + x_{n+4} x_n x_{n+1} \\
f_5 &= x_n x_{n+1} x_{n+3} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+4} + x_{n+2} x_{n+3} x_n + x_{n+3} x_{n+4} x_{n+1} + x_{n+4} x_n x_{n+2} \\
f_6 &= x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} + x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+4} \\
&\qquad + x_n x_{n+1} x_{n+3} x_{n+4} + x_n x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} + x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4} \\
f_7 &= x_n x_{n+1} x_{n+2} x_{n+3} x_{n+4}
\end{aligned}
$$

は，全て保存量となる．しかしこの 7 個の保存量は，互いに以下の関係で結びついているので，独

立な保存量は結局 2 個となる．

$$
\begin{aligned}
f_3 &= f_1 + 5 \\
f_4 &= f_1^2 \square f_1 \square 2f_2 \square 10 \\
f_5 &= 2f_1 + 5 \\
f_6 &= 2f_1 + f_2 + 5 \\
f_7 &= f_1 + 3
\end{aligned}
$$

次に (7) の保存量を調べる．(7) は，(6) を超離散化した式である，ゆえに (6) の保存量自体を超離散化したものが保存量となりえるので，

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \max(X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4}) \\
F_2 &= \max(X_n + X_{n+1}, X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+2} + X_{n+3}, X_{n+3} + X_{n+4}, X_{n+4} + X_n) \\
F_3 &= \max(X_n + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+3}, X_{n+2} + X_{n+4}, X_{n+3} + X_n, X_{n+4} + X_{n+1}) \\
F_4 &= \max(X_n + X_{n+1} + X_{n+2}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}, X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, \\
&\qquad X_n + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+1} + X_{n+4}) \\
F_5 &= \max(X_n + X_{n+1} + X_{n+3}, X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+3}, \\
&\qquad X_{n+1} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+4}) \\
F_6 &= \max(X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}, \\
&\qquad X_n + X_{n+1} + X_{n+3} + X_{n+4}, X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+4}, \\
&\qquad X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3}) \\
F_7 &= X_n + X_{n+1} + X_{n+2} + X_{n+3} + X_{n+4}
\end{aligned}
$$

は全て保存量となっている．

また，X_n, X_{n+1}, X_{n+2}, X_{n+3}, X_{n+4} の基本対称式も当然保存量となるため，

$$
\begin{aligned}
F_8 &= X_nX_{n+1} + X_{n+1}X_{n+2} + X_{n+2}X_{n+3} + X_{n+3}X_{n+4} + X_{n+4}X_n \\
F_9 &= X_nX_{n+2} + X_{n+1}X_{n+3} + X_{n+2}X_{n+4} + X_{n+3}X_n + X_{n+4}X_{n+1} \\
F_{10} &= X_nX_{n+1}X_{n+2} + X_{n+1}X_{n+2}X_{n+3} + X_{n+2}X_{n+3}X_{n+4} + X_{n+3}X_{n+4}X_n + X_{n+4}X_nX_{n+1} \\
F_{11} &= X_nX_{n+1}X_{n+3} + X_{n+1}X_{n+2}X_{n+4} + X_{n+2}X_{n+3}X_n + X_{n+3}X_{n+4}X_{n+1} + X_{n+4}X_nX_{n+2} \\
F_{12} &= X_nX_{n+1}X_{n+2}X_{n+3} + X_nX_{n+1}X_{n+2}X_{n+4} + X_nX_{n+1}X_{n+3}X_{n+4} \\
&\quad + X_nX_{n+2}X_{n+3}X_{n+4} + X_{n+1}X_{n+2}X_{n+3}X_{n+4} \\
F_{13} &= X_nX_{n+1}X_{n+2}X_{n+3}X_{n+4}
\end{aligned}
$$

も全て保存量である．ここで，以上の 13 個の保存量の従属関係は以下のようになり，独立な保存

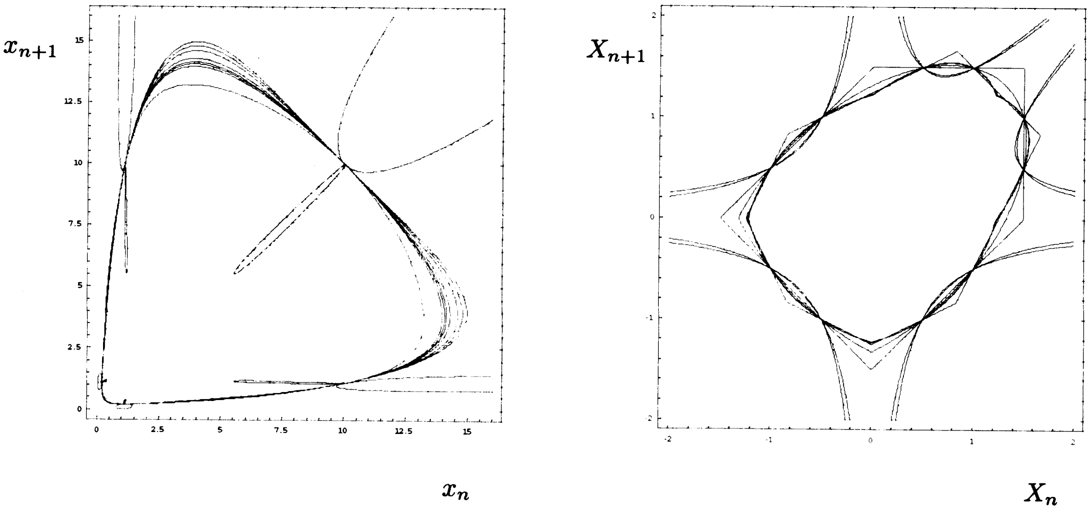
量が 2 個であることがわかる．

$$
\begin{aligned}
F_3 &= F_1 \\
F_4 &= 2F_1 \\
F_5 &= F_1 \\
F_6 &= F_2 \\
F_7 &= F_1 \\
F_8 &= 3F_1^2 \square 3F_1F_2 + F_2^2 \\
F_9 &= \square 8F_1^2 + 9F_1F_2 \square 3F_2^2 \\
F_{10} &= 0 \\
F_{11} &= \square 5F_1^3 + 6F_1^2F_2 \square 2F_1F_2^2 \\
F_{12} &= 4F_1^4 \square 12F_1^3F_2 + 13F_1^2F_2^2 \square 6F_1F_2^3 + F_2^4 \\
F_{13} &= 4F_1^5 \square 12F_1^4F_2 + 13F_1^3F_2^2 \square 6F_1^2F_2^3 + F_1F_2^4
\end{aligned}
$$

また，$F_8, F_9, F_{10}, F_{11}, F_{12}, F_{13}$ を逆超離散化すると

$$
\begin{aligned}
f_8 &= \exp(\log x_n \log x_{n+1} + \log x_{n+1} \log x_{n+2} + \log x_{n+2} \log x_{n+3} \\
&\qquad + \log x_{n+3} \log x_{n+4} + \log x_{n+4} \log x_n) \\
f_9 &= \exp(\log x_n \log x_{n+2} + \log x_{n+1} \log x_{n+3} + \log x_{n+2} \log x_{n+4} \\
&\qquad + \log x_{n+3} \log x_n + \log x_{n+4} \log x_{n+1}) \\
f_{10} &= \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+1}) \\
f_{11} &= \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+3} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+2}) \\
f_{12} &= \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} \log x_{n+3} + \cdots + \log x_{n+4} \log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2}) \\
f_{13} &= \exp(\log x_n \log x_{n+1} \log x_{n+2} \log x_{n+3} \log x_{n+4})
\end{aligned}
$$

も f_1, f_2 に従属な保存量である．以下の図は，ある (x_n, x_{n+1}), (X_n, X_{n+1}) を通る (6)，(7) それぞれの保存量の等高線を示したものである．



ここで，全ての保存量曲線に共通の交点は，それら交点自体が (6)，(7) で計算される周期点であることを意味する．すなわち，独立な保存量を用いることによって全ての周期点を得ることができるので，保存量が解の表現そのものを与えている．

3　おわりに

本稿では，特別な方程式について，さらにパラメータが特別な場合についてのみ再帰性を検証した．さらに，その方程式を超離散化した場合でも差分方程式の場合と同じ構造で再帰性が成り立つことを確認した．取り扱った対象が特別なケースにすぎないが，そこで得られたことから次のような一般的予想を立てることはそれほど不自然とは思えない．

> 再帰方程式は一般の可積分方程式よりも保存量の個数は多いであろう．そして，独立な保存量は初期値の自由度と同じ数だけ存在し，その交点が解を与えるであろう．

今まで，可積分方程式の特殊な場合としてのみ取り扱われていた再帰方程式であるが，本稿で触れたように興味深い数理構造を有している．可積分中の可積分とも言える再帰性について調べることは，意外と面白い展開を見せるかもしれない．