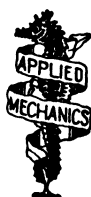


研究集会報告 11ME-S4

非線形波動のメカニズム
— 現象とモデルの数理構造 —



九州大学応用力学研究所

2000年3月

Reports of RIAM Symposium

No.11ME-S4

*Nonlinear Wave Phenomena and Mathematical Structure of
their Models*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 8 - 10, 1999

Research Institute for Applied Mechanics

Kyushu University

March, 2000

研究集会「非線形波動のメカニズム—現象とモデルの数理構造」報告集

1999年11月8日～10日

研究代表者 早稲田大学理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

目 次

1. Topology of the Iso-Spectral Real Manifolds Associated with the Generalized Toda Lattices on Semisimple Lie Algebras 1
Dep. Math. Ohio State Univ. Luis CASIAN	
Dep. Math. Ohio State Univ. 児玉 裕治 (KODAMA Yuji)	
2. 非線形結合回転体系と機能発現—線形結合回転体系との相違— 9
大阪工業大学情報科学部 武野 正三 (TAKENO Shozo)	
3. 離散 Euler 作用素と Semi-discrete 発展方程式 16
同志社大学工学部 安田 久也 (YASUDA Hisaya)	
同志社大学工学部 渡邊 芳英 (WATANABE Yoshihide)	
4. Note on Determinant Formulas for Discrete Toda Equations 22
同志社大学工学部 増田 哲 (MASUDA Tetsu)	
同志社大学工学部 梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
5. 離散 Lotka Volterra 方程式の解の振舞い 30
東京都立大学理学部 成田 康明 (NARITA Yasuaki)	
東京都立大学理学部 斉藤 暁 (SAITO Satoru)	
横浜国立大学工学部 斉藤 革子 (SAITO Noriko)	
北里大学理学部 吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
6. Lotka-Volterra 系の可積分性について 35
北里大学理学部 吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
東京都立大学理学部 成田 康明 (NARITA Yasuaki)	
東京都立大学理学部 斉藤 暁 (SAITO Satoru)	
横浜国立大学工学部 斉藤 革子 (SAITO Noriko)	
7. 離散 BKP, DKP 方程式の対称な Bäcklund 変換方程式 40
東京都立大学理学部 新沢 信彦 (SHINZAWA Nobuhiko)	
8. 単位円周上の直交多項式と可積分系 47
大阪大学基礎工学研究科 中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
三菱総研 向平 敦史 (MUKAIHIRA Atsushi)	

9. ニュートン法と可解カオスの行列式解		53
	大阪大学基礎工学研究科	近藤 弘一 (KONDO Koichi)	
	大阪大学基礎工学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
10. Optimal Chaotic Spread Spectrum Sequences for Uplink CDMA Systems		59
	EE, UCLA	Chi-Chung CHEN	
	EE, UCLA	Kung YAO	
	郵政省通信総合研究所	梅野 健 (UMENO Ken)	
	Politecnico di Torino	Ezio BIGLIERI	
11. アーベリアン・ボルテックス解のリアプノフ指数と相転移		65
	九州芸術工科大学芸術工学部	河辺 哲次 (KAWABE Tetsuji)	
	九州大学総合理工学研究科	太田 正之輔 (OHTA Shonosuke)	
12. 非対称多変数エルミート多項式のロドリゲ公式		73
	群馬工業高等専門学校一般教科	宇治野 秀晃 (UJINO Hideaki)	
	東京大学理学系研究科	西野 晃徳 (NISHINO Akinori)	
13. BC_N 型のルート系に付随する非対称多変数多項式の Rodrigues 公式		79
	東京大学理学系研究科	西野 晃徳 (NISHINO Akinori)	
	東京大学理学系研究科	小森 靖 (KOMORI Yasushi)	
	群馬工業高等専門学校一般教科	宇治野 秀晃 (UJINO Hideaki)	
14. アフィンリー代数の指標と楕円型 Ruijsenaars 模型		85
	東京大学理学系研究科	小森 靖 (KOMORI Yasushi)	
15. 無限個の保存量 (マルチンゲール) をもつ確率モデルと tree の数えあげ		91
	統計数理研究所	伊藤 栄明 (ITOH Yoshiaki)	
16. ソリトンセルオートマトンとクリスタル理論		96
	東京大学総合文化研究科	国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)	
17. Construction of Soliton Cellular Automaton from the Vertex Model by Crystallization		103
	東京大学理学系研究科	井上 玲 (INOUE Rei)	
18. 番号付箱玉系と Hungry 戸田分子		109
	大阪大学基礎工学研究科	永井 敦 (NAGAI Atsushi)	

19. 超離散系に対する特異点閉じ込めテスト	115
同志社大学工学部	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
龍谷大学理工学部	松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)	
龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)	
20. 交通流に関連したいくつかの多値 CA モデルとその性質	123
龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)	
21. 化学振動における引込みの実験	129
横浜国立大学工学部	石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)	
横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)	
22. 反応拡散系のパルスダイナミクス	135
広島大学理学研究科	太田 隆夫 (OHTA Takao)	
23. 反応拡散系と max-plus 方程式	141
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
24. 跡公式と可積分 Hamilton 系	147
同志社大学工学部	大宮 眞弓 (OHMIYA Mayumi)	
大阪産業大学	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
25. 1次元ブリーザーの共鳴 (Coupled Klein-Gordon 方程式の厳密解)	153
大阪府立大学工学研究科	新居毅人 (ARAI Takahito)	
大阪府立大学工学部	田尻昌義 (TAJIRI Masayoshi)	
26. Coherent States and Adiabatic Connections, Curvatures : Gauge Theoretic Quantum Computer?	159
横浜市立大学理学部	藤井 一幸 (FUJII Kazuyuki)	
27. Discretization of the Euler Top	166
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
早稲田大学理工学部	木村 欣司 (KIMURA Kinji)	
28. ソリトン方程式ヒエラルキーにおける初期値問題と超幾何関数	172
宇都宮大学工学部	矢嶋 徹 (YAJIMA Tetsu)	
29. 結合型 KP ヒエラルキーの代数構造	178
早稲田大学理工学部	笈 三郎 (KAKEI Saburo)	
30. 零分散結合型 KdV 方程式の厳密解	183
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	

3 1. 3+1D Soliton	 190
	広島大学工学部	太田 泰広 (OHTA Yasuhiro)
3 2. 音響孤立波の発生とその応用	 194
	大阪大学基礎工学研究科	杉本 信正 (SUGIMOTO Nobumasa)
3 3. ソリトン方程式と数値計算	 200
	日本原子力研究所	佐々 成正 (SASA Narimasa)
	国立天文台	吉田 春夫 (YOSHIDA Haruo)
3 4. ボーズ・アインシュタイン凝縮体の安定性とダイナミクス	 206
	東京大学理学系研究科	鶴見 剛也 (TSURUMI Takeya)
3 5. 情報通信路における $1/f$ 雑音と自己相似性	 212
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
	横浜国立大学工学部	浅野 裕征 (ASANO Hiroyuki)
	富士通研究所	仲道 耕二 (NAKAMICHI Kouji)
3 6. 2本の渦糸のダイナミクスに関する研究	 217
	横浜国立大学工学部	大塚 一路 (OHTSUKA Kazumichi)
	東京農工大工学部	高木 隆司 (TAKAKI Ryuji)
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
3 7. 高レイノルズ数領域における渦度の散逸	 223
	横浜国立大学工学部	土門 和幸 (DOMON Kazuyuki)
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)

反応拡散系と max-plus 方程式

早稲田大学 理工学部 数理科学科
高橋 大輔

1 はじめに

反応拡散系は神経パルス波や Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応などに代表されるパターン形成系である [1, 2, 3, 4]。反応拡散の反応という言葉が示すように、神経パルス波では 2 種のパルス、BZ 反応では複数の化学物質というふうに 2 種あるいはそれ以上の成分同士が相互作用することが系の第一の特徴である。さらに、反応拡散の拡散という言葉が示すように、ある成分が空間内で局在していても拡散効果によっていずれ周囲へ拡がろうとする。そしてこの反応の効果と拡散の効果があいまって、特徴的な波が多様な相互作用を示し、そのグローバルパターンがしばしば興味深い秩序だった変化を示すのである。

反応拡散系全体を統一的に論じるのはたいへんなので、以下では BZ 反応に話題を限定しよう。BZ 反応ではシャーレ内の化学反応によって図 1 のような美しいパターンが実験で観察できる。図 1 (a) はターゲットパターンといい、中央から周囲に同心円状のリングが周期的に発生しては拡がっていく。図 1 (b) はスパイラルパターンといい、らせん (図の場合は二重のらせん) が安定に回り続ける。このようなパターンの生成メカニズムについては、すでにさまざまな研究者がいろいろ解析を行っている。そして化学反応の詳細を調べることから始まる一連の研究によって、微分方程式モデルとしてたとえば次式が提案されている [3]。

$$\begin{cases} u_t = D_u \Delta u + \frac{1}{\varepsilon} \left\{ u(1-u) - \frac{Fv(u-q)}{u+q} \right\} \\ v_t = D_v \Delta v + u - v \end{cases} \quad (1)$$

$D_u, D_v, \varepsilon, F, q$ は物理定数であり、 Δ は 2 次元のラプラシアン $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。この方程式の数値計算を行うと図 2 のようにパターンが再現できる。またなぜそのようなパターンが生じるかの理由も (1) を用いて理解できる。そしてその理解は他の反応拡散系にも応用可能な汎用性をもっている。

ところで、このパターン生成メカニズムを模倣した Gerhardt らによる Cellular Automaton (CA) モデルというのがある [5, 6]。モデルの詳細はここではふれないが元の現象を驚くほどよく再現している (図 3)。CA の定義自身は元の系の本質を抽出した簡単なものである。パターンを再現するメカニズムとして、微分方程式よりも CA の方がある意味で柔軟性に富み、応用の別の可能性が開かれることになる。

さて、本研究では BZ 反応のモデルとして上記の CA のようにすべての量が離散的なモデルを提案することを目指している。ただし上記 CA では微分方程式のパターンを再現するためにメカニズムの模倣が行われている。これに対し、本研究では以下に述べる超離散化手法によって微分方程式のパターン生成メカニズムの本質的な部分だけを離散モデル上で数学的に直接かつ厳密に実現することを目指している。言い換えると、シミュレーターとして現象を忠実に再現することよりも、元の系に潜んでいる数理構造を可能な限り忠実に離散系で再現することを優先させるのである。

超離散化手法は可積分系の分野で生まれた手法であり、微分方程式と完全離散系 (たとえば CA) とを結びつける新しい道筋をつけた [7]。その典型例を以下に示す。差分方程式

$$u_j^{t+1} = u_{j-1}^t \frac{1 + u_j^t u_{j+1}^t}{1 + u_{j-1}^t u_j^t} \quad (2)$$

を考えよう。ここで j, t はそれぞれ整数の空間、時間変数である。 $v(x, t)$ を $v(j\Delta x, t\Delta t) = (\log u_j^t)/\Delta x$ で定義し $\Delta t/(\Delta x)^2 = 1/2$ を保ちながら $\Delta x \rightarrow 0$ とすると (2) から

$$v_t = 2vv_x + v_{xx} \quad (3)$$

が得られる。すなわち (2) は (3) の差分近似となっている。さらに u から U への変数変換 $u_j^t = e^{(U_j^t - 1/2)/\varepsilon}$ を用いて $\varepsilon \rightarrow +0$ とすると (2) から

$$U_j^{t+1} = U_j^t + \min(U_{j-1}^t, 1 - U_j^t) - \min(U_j^t, 1 - U_{j+1}^t) \quad (4)$$

が得られる。この式は $U \in \{0, 1\}$ のルール番号 184 の CA と等価であるとみなせる。(3) から (4) を得るような手続きを超離散化と呼び、(4) のような方程式を超離散方程式と総称する。(2), (3), (4) は方程式・解の離散度合いが異なるが、どれも Cole-Hopf 変換

で線形の拡散方程式に帰着でき、解の代数構造が同じという点において等価なものであるとみなせる。すなわち、方程式の性質を壊さずに微分方程式、差分方程式、CA を自由に行き来できるのである。

2 BZ 反応のパターンを再現する max-plus 方程式

ではいよいよ (1) の超離散化を行うといきたいところであるが、実は現在のところ成功していない。微分方程式から出発して超離散方程式を得るには、まず微分方程式を差分化し、得られた差分方程式を超離散化するのだが、以下の理由によりいつでもこのことが可能であるとは限らない。

- 差分方程式から超離散方程式を得る際に $u = \exp(U/\varepsilon)$ タイプの変数変換を行う。このため差分方程式とその解に正値性が要求される。
- この点をクリアしつつ、元の微分方程式をその性質を壊さずに差分化しなければならない。ただし差分方程式の候補は無限にあり、その中から超離散化したときに意味のあるものを得なければならない。

現在は上の困難がクリアできず、微分方程式→差分方程式→超離散方程式という正攻法が難しい。そこで、微分方程式の性質をにらみながらいきなり超離散方程式をでっちあげるといふ搦め手の攻め方を試みた。もちろん超離散方程式であるかどうかは対応する差分方程式があるか否かによっているので、その点がクリアされない限り超離散方程式とは呼びたくない。むしろ得られた方程式が max 関数と和で構成されているので、max-plus 方程式と呼ぶ方がふさわしいであろう。

さて、BZ 反応を特徴づけているのは

- (a) 2 成分の相互作用 (反応効果)
- (b) 拡散効果
- (c) ターゲット、スパイラルパターン

である。そこで唐突であるが、

$$\begin{cases} U_{i,j}^{t+1} = \max(U_{i-1,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i,j-1}^t, \\ U_{i,j+1}^t, U_{i,j}^t) - V_{i,j}^t \\ V_{i,j}^{t+1} = U_{i,j}^t \end{cases} \quad (5)$$

という max-plus 方程式を考える。この方程式は U, V の 2 成分相互作用の式である。また $\max(U_{i-1,j}^t, \dots)$ という効果により任意の格子点での U は周囲に影響を及ぼし、この意味で拡散効果に近いものが期待できる。(周囲に情報を伝えるという意味合いだけであるので拡散とまでは呼べないかもしれないが。) そしてその効果は相互作用を通じて V にも影響する。また図 4 に示すように、適当な初期値よりターゲット、スパイラルパターンが生まれる。さらにスパイラルパターンは図 1 にも見られるように実験でしばしば二重スパイラルとして実現されるが、(5) の解にも図 5 に示すように二重スパイラルが安定して存在する。以上のことから (5) は BZ 反応の本質 (a)-(c) をある程度実現した単純な離散モデルと考えられなくはない。

一方、物理的なしなげに立ち戻って考えると (1) と大きく異なる特徴も目につく。(5) はまず時間に関して可逆な方程式である。このことは (5) で記号 U と V を入れ替えて $t \rightarrow -t$ とすれば再び同じ方程式が得られることからすぐにわかる。これに対し現実の BZ 反応系や (1) は拡散過程が存在することより明らかに非可逆である。また、(5) は (1) と異なり $U-V$ 相平面において単一のリミットサイクルを持たない。実は (5) で $U \rightarrow \alpha U, V \rightarrow \alpha V$ とスケール変換をしてもやはり同じ式が導かれ、(5) がこの意味でスケール不変な方程式になっているので「単一の」リミットサイクルはありえない。このようにしなげが異なるふたつの方程式を同一視することには議論の余地が大いにある。しかし、たとえば可積分な Korteweg-de Vries 方程式は、元の流体系と明らかに異なる性質を持っておりながら、元の流体系に現れるある現象の本質を美しい数理構造として表現できている。このことを考えあわすと、先ほど述べたことからただちに BZ 反応系と (5) との関連性について否定的な見解を持つ必要はないであろう。

3 パターンの生成メカニズム

以下では元の BZ 反応系のことを脇におき、(5) がなぜターゲット、スパイラルパターンを生成できるかについて議論する。まず (5) の 1 次元版の

$$\begin{cases} U_i^{t+1} = \max(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) - V_i^t \\ V_i^{t+1} = U_i^t \end{cases} \quad (6)$$

を考えよう。この方程式をひとつにまとめると

$$U_i^{t+1} = \max(U_{i-1}^t, U_i^t, U_{i+1}^t) - U_i^{t-1} \quad (7)$$

という U についての時間 2 階の方程式になる。さらに速さ ± 1 の進行波を仮定して $U_i^t = F_{i\pm t}$ を仮定すると F は

$$F_{i+1} + F_{i-1} = \max(F_{i-1}, F_i, F_{i+1}) \quad (8)$$

を満たす。これは常差分方程式なので解くことができ、解 F_i は i 格子空間上で「0 a a 0」タイプか「0 a a + b b 0」タイプの値のパターンを適当な間隔で並べ、間を 0 で埋めればよいことがわかる。たとえば

$$\dots 00011001100013200220000242000 \dots$$

は (8) を満たしているので、右あるいは左へ速さ 1 で進む (6) の進行波解となりうる。

(8) 式は実は Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 系と呼ばれる可積分方程式

$$g_{i+1} g_{i-1} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} g_i \quad (9)$$

の超離散化によって得ることができる。実際 $F = \varepsilon \log(1 + \sqrt{2}g)$ という変数変換を行い $\varepsilon \rightarrow +0$ の極限をとると (9) から (8) が得られる。また (9) の解は一般に楕円関数を用いて表すことができ、その解の超離散化によって (8) の解が得られることも容易に示すことができる。図 6 (a), (b) に (9) の解とそれに対応する (8) の解をそれぞれ示す。楕円関数の周期を無限大にする極限からコンパクトな台を持つ (8) の解を得ることもできるであろう。

では次に (5) の解を構成しよう。今、ある j に対して $U_{i,j}^t = F_{i-t}$ であるとしよう。すると $U_{i,j\pm 1}^t$ はそれぞれ $F_{i-t}, F_{i-t-1}, F_{i-t+1}$ のどれかであれば、その j で (5) が満たされることがわかる。というのは、もしそうならば $U_{i,j\pm 1}^t$ が $U_{i,j}^t, U_{i+1,j}^t, U_{i-1,j}^t$ のどれかと等しく、(5) が (6) に帰着するからである。ということは、ある j_0 で $U_{i,j_0}^t = F_{i-t}$ を満たし、任意の j で $U_{i,j+1}^t = U_{i,j}^t$ or $U_{i-1,j}^t$ or $U_{i+1,j}^t$ を満たせば、それによって得られた $U_{i,j}^t$ が右へ 1 の速さで進む (5) の進行波 (平面波) になることがわかる。図 7 にこの進行波の例を示す。左、上、下方向に 1 の速さで進む進行波も同様にして (6) の 1 次元進行波を「ずらして並べ」ることにより作ることができる。

すると、図 8 (a) に示すような正方形のパターンは 1 時刻で格子 1 つ分だけ周囲へ広がる安定なパターンになることがわかる。なぜならばその正方形の左半分は左へ速さ 1 で進む進行波の一部であるとみなせ、右半分は右へ速さ 1、上半分は上へ速さ 1、下半分は下へ速さ 1 で進む進行波の一部とみなせ、それぞれが矛盾無く接続できるからである。さらに 1 次元の進行波は、前に述べたように進行波を構成するパターン同士の間には適当な個数の 0 をはさめば相互作用することがない。ということは図 8 (b) のように同心 (?) 円上に正方形パターンをおけばそれらは安定に同じ速度で外へ広がる波になりうるのである。

以上のようにして、ターゲットパターンの周辺の同心円部がなぜ外方向に安定に伝播するかの理由を説明できた。その波動の基本部品は、(9) という 1 次元可積分方程式の超離散化解から作ることができる。ただし、ターゲットパターンの中央部の同心円パルスに常に生み出す部分についてはこれでは説明できない。なお、スパイラルパターンの周辺部の伝播の様子も上と同様の理由で説明できる。なぜならターゲットパターンのひとつの同心円では上下左右に進む 4 種類の進行波をたまたま閉じた形で接続しているが、スパイラルパターンではその接続をうまくずらしてスパイラル状にしているだけであり、周囲に伝播していくこと理由はターゲットパターンと同じなのである。この場合も中央でスパイラルを常に生み出している部分についての説明はできない。

4 おわりに

以上のようにして、BZ 反応で見られるパターンと似たものを生み出す max-plus 方程式を提案することができた。そのパターンが安定に伝播する理由については、1 次元の超離散化可積分方程式から作られる進行波をもとにして部分的に説明がついた。(5) は一見したところ非常に単純な式であり、パターンの変化を手にとるように説明できる。この利点を大事にしつつ、今後は元の物理系や微分方程式系とのもっと直接的なつながりを解明し、パターン形成に対する新たな見方を提案したい。

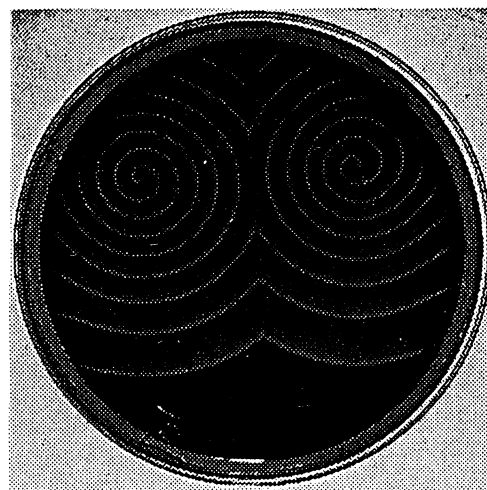
参考文献

図

- [1] 太田隆夫, 「界面ダイナミクスの数理」(チュートリアル/応用数理の最前線), 日本評論社 (1997).
- [2] 西浦廉政, 「非線形問題 1 パターン形成の数理」(岩波講座 現代数学の展開), 岩波書店 (1999).
- [3] 三池秀俊・森義仁・山口智彦, 「非平衡系の科学 III 反応・拡散系のダイナミクス」, 講談社サイエンティフィク (1998).
- [4] 森肇・蔵本由紀, 「散逸構造とカオス」(岩波講座 現代の物理学 15), 岩波書店 (1994).
- [5] M.Gerhardt, H.Schuster and J.J.Tyson, "A cellular automaton model of excitable media including curvature and dispersion", *Science* 247 (1990) 1563-1566.
- [6] A.K. デュードニー, 「遊びの探索」別冊サイエンス コンピューターレクリエーション II, 日経サイエンス (1989).
- [7] (例えば) 高橋大輔, "超離散的からくり", *数理科学* 435 (1999) 12-17.



(a)



(b)

図 1: シャーレで観察される BZ 反応のパターン (a) ターゲットパターン ([3] から引用), (b) スパイラルパターン ([4] から引用)

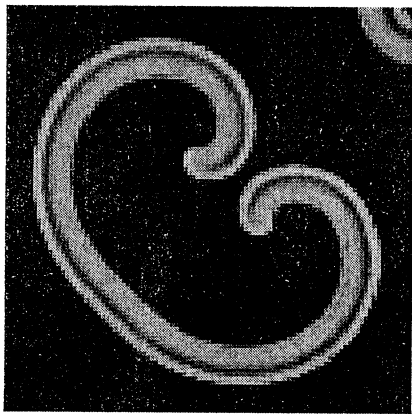
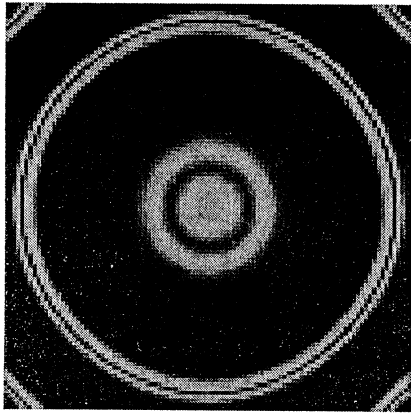


図 2: (1) の数値計算によるパターン再現。 u のプロット

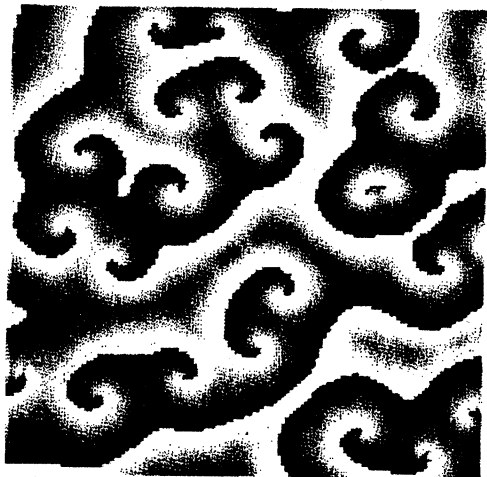
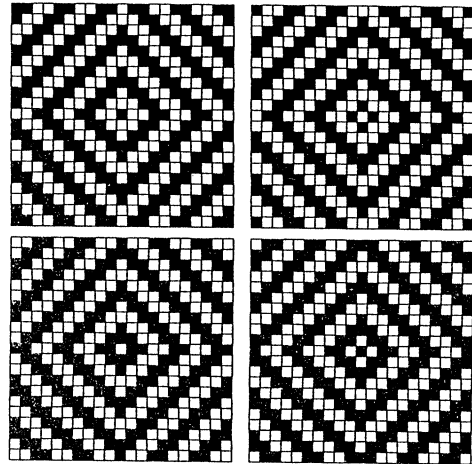
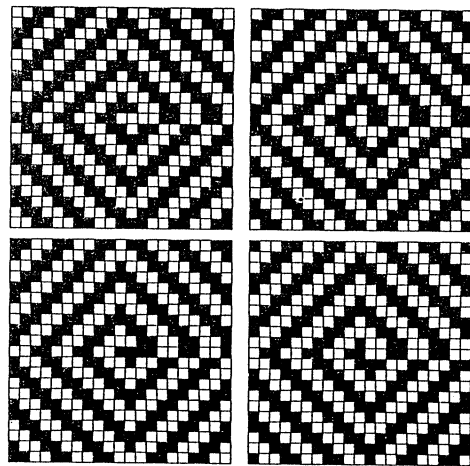


図 3: Gerhardt らの CA によるパターン再現。 ([6] から引用)



(a)



(b)

図 4: (5) の (a) ターゲット, (b) スパイラルパターンの時間変化。 U のプロットで、■が 1 を□が 0 を表す (以降の図も同様)。どちらも 4 ステップで元に戻る周期パターンとなる

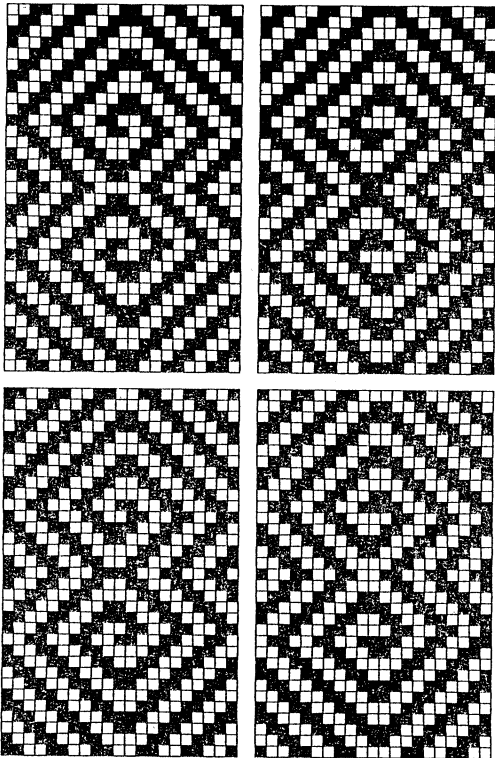
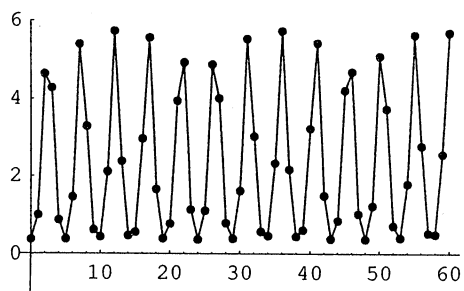
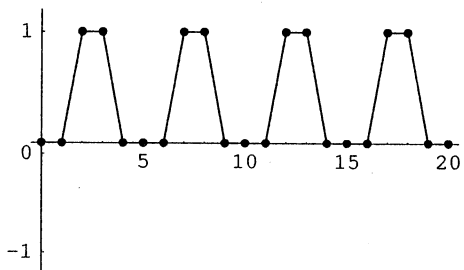


図 5: (5) の二重スパイラルパターンの時間変化



(a)



(b)

図 6: (a) (9) の解の例、(b) 対応する (8) の解

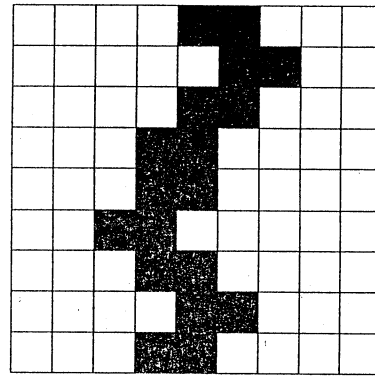
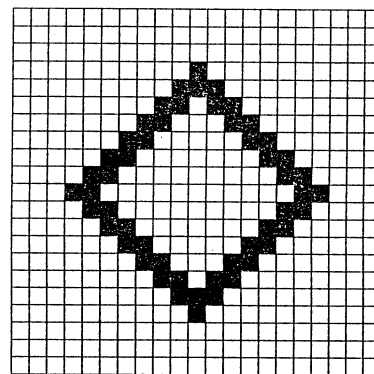
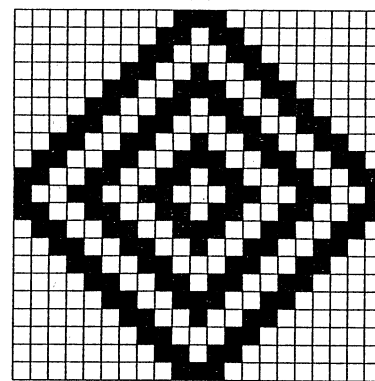


図 7: (5) の進行波。右あるいは左へ 1 の速さで進む



(a)



(b)

図 8: 安定に外へ拡がる (a) ひとつの同心円, (b) 3 つの同心円