

研究集会報告 11ME-S4

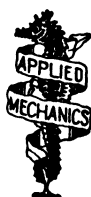
---

---

**非線形波動のメカニズム**  
**— 現象とモデルの数理構造 —**

---

---



九州大学応用力学研究所

2000年3月

**Reports of RIAM Symposium**

**No.11ME-S4**

*Nonlinear Wave Phenomena and Mathematical Structure of  
their Models*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 8 - 10, 1999

**Research Institute for Applied Mechanics**

**Kyushu University**

**March, 2000**

研究集会「非線形波動のメカニズム—現象とモデルの数理構造」報告集

1999年11月8日～10日

研究代表者 早稲田大学理工学部 高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)

目 次

1. Topology of the Iso-Spectral Real Manifolds Associated with the Generalized Toda Lattices on Semisimple Lie Algebras	..... 1
Dep. Math. Ohio State Univ.    Luis CASIAN	
Dep. Math. Ohio State Univ.    児玉 裕治 (KODAMA Yuji)	
2. 非線形結合回転体系と機能発現—線形結合回転体系との相違—	..... 9
大阪工業大学情報科学部    武野 正三 (TAKENO Shozo)	
3. 離散 Euler 作用素と Semi-discrete 発展方程式	..... 16
同志社大学工学部    安田 久也 (YASUDA Hisaya)	
同志社大学工学部    渡邊 芳英 (WATANABE Yoshihide)	
4. Note on Determinant Formulas for Discrete Toda Equations	..... 22
同志社大学工学部    増田 哲 (MASUDA Tetsu)	
同志社大学工学部    梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
5. 離散 Lotka Volterra 方程式の解の振舞い	..... 30
東京都立大学理学部    成田 康明 (NARITA Yasuaki)	
東京都立大学理学部    斉藤 暁 (SAITO Satoru)	
横浜国立大学工学部    斉藤 革子 (SAITO Noriko)	
北里大学理学部    吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
6. Lotka-Volterra 系の可積分性について	..... 35
北里大学理学部    吉田 勝彦 (YOSHIDA Katsuhiko)	
東京都立大学理学部    成田 康明 (NARITA Yasuaki)	
東京都立大学理学部    斉藤 暁 (SAITO Satoru)	
横浜国立大学工学部    斉藤 革子 (SAITO Noriko)	
7. 離散 BKP, DKP 方程式の対称な Bäcklund 変換方程式	..... 40
東京都立大学理学部    新沢 信彦 (SHINZAWA Nobuhiko)	
8. 単位円周上の直交多項式と可積分系	..... 47
大阪大学基礎工学研究科    中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
三菱総研                    向平 敦史 (MUKAIHIRA Atsushi)	

9. ニュートン法と可解カオスの行列式解	.....	53
大阪大学基礎工学研究科	近藤 弘一 (KONDO Koichi)	
大阪大学基礎工学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)	
10. Optimal Chaotic Spread Spectrum Sequences for Uplink CDMA Systems	.....	59
EE, UCLA	Chi-Chung CHEN	
EE, UCLA	Kung YAO	
郵政省通信総合研究所	梅野 健 (UMENO Ken)	
Politecnico di Torino	Ezio BIGLIERI	
11. アーベリアン・ボルテックス解のリアプノフ指数と相転移	.....	65
九州芸術工科大学芸術工学部	河辺 哲次 (KAWABE Tetsuji)	
九州大学総合理工学研究科	太田 正之輔 (OHTA Shonosuke)	
12. 非対称多変数エルミート多項式のロドリゲ公式	.....	73
群馬工業高等専門学校一般教科	宇治野 秀晃 (UJINO Hideaki)	
東京大学理学系研究科	西野 晃徳 (NISHINO Akinori)	
13. $BC_N$ 型のルート系に付随する非対称多変数多項式の Rodrigues 公式	.....	79
東京大学理学系研究科	西野 晃徳 (NISHINO Akinori)	
東京大学理学系研究科	小森 靖 (KOMORI Yasushi)	
群馬工業高等専門学校一般教科	宇治野 秀晃 (UJINO Hideaki)	
14. アフィンリー代数の指標と楕円型 Ruijsenaars 模型	.....	85
東京大学理学系研究科	小森 靖 (KOMORI Yasushi)	
15. 無限個の保存量 (マルチンゲール) をもつ確率モデルと tree の数えあげ	.....	91
統計数理研究所	伊藤 栄明 (ITOH Yoshiaki)	
16. ソリトンセルオートマトンとクリスタル理論	.....	96
東京大学総合文化研究科	国場 敦夫 (KUNIBA Atsuo)	
17. Construction of Soliton Cellular Automaton from the Vertex Model by Crystallization	.....	103
東京大学理学系研究科	井上 玲 (INOUE Rei)	
18. 番号付箱玉系と Hungry 戸田分子	.....	109
大阪大学基礎工学研究科	永井 敦 (NAGAI Atsushi)	

19. 超離散系に対する特異点閉じ込めテスト	.....	115
同志社大学工学部	梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)	
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
龍谷大学理工学部	松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA Junta)	
龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)	
20. 交通流に関連したいくつかの多値 CA モデルとその性質	.....	123
龍谷大学理工学部	西成 活裕 (NISHINARI Katsuhiro)	
21. 化学振動における引込みの実験	.....	129
横浜国立大学工学部	石渡 信吾 (ISHIWATA Shingo)	
横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)	
22. 反応拡散系のパルスダイナミクス	.....	135
広島大学理学研究科	太田 隆夫 (OHTA Takao)	
23. 反応拡散系と max-plus 方程式	.....	141
早稲田大学理工学部	高橋 大輔 (TAKAHASHI Daisuke)	
24. 跡公式と可積分 Hamilton 系	.....	147
同志社大学工学部	大宮 眞弓 (OHMIYA Mayumi)	
大阪産業大学	浦久保 正美 (URAKUBO Masami)	
25. 1次元ブリーザーの共鳴 (Coupled Klein-Gordon 方程式の厳密解)	.....	153
大阪府立大学工学研究科	新居毅人 (ARAI Takahito)	
大阪府立大学工学部	田尻昌義 (TAJIRI Masayoshi)	
26. Coherent States and Adiabatic Connections, Curvatures : Gauge Theoretic Quantum Computer?	.....	159
横浜市立大学理学部	藤井 一幸 (FUJII Kazuyuki)	
27. Discretization of the Euler Top	.....	166
早稲田大学理工学部	広田 良吾 (HIROTA Ryogo)	
早稲田大学理工学部	木村 欣司 (KIMURA Kinji)	
28. ソリトン方程式ヒエラルキーにおける初期値問題と超幾何関数	.....	172
宇都宮大学工学部	矢嶋 徹 (YAJIMA Tetsu)	
29. 結合型 KP ヒエラルキーの代数構造	.....	178
早稲田大学理工学部	笈 三郎 (KAKEI Saburo)	
30. 零分散結合型 KdV 方程式の厳密解	.....	183
山口大学工学部	松野 好雅 (MATSUNO Yoshimasa)	

3 1 . 3+1D Soliton		..... 190
	広島大学工学部	太田 泰広 (OHTA Yasuhiro)
3 2 . 音響孤立波の発生とその応用		..... 194
	大阪大学基礎工学研究科	杉本 信正 (SUGIMOTO Nobumasa)
3 3 . ソリトン方程式と数値計算		..... 200
	日本原子力研究所	佐々 成正 (SASA Narimasa)
	国立天文台	吉田 春夫 (YOSHIDA Haruo)
3 4 . ボーズ・アインシュタイン凝縮体の安定性とダイナミクス		..... 206
	東京大学理学系研究科	鶴見 剛也 (TSURUMI Takeya)
3 5 . 情報通信路における $1/f$ 雑音と自己相似性		..... 212
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
	横浜国立大学工学部	浅野 裕征 (ASANO Hiroyuki)
	富士通研究所	仲道 耕二 (NAKAMICHI Kouji)
3 6 . 2本の渦糸のダイナミクスに関する研究		..... 217
	横浜国立大学工学部	大塚 一路 (OHTSUKA Kazumichi)
	東京農工大工学部	高木 隆司 (TAKAKI Ryuji)
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)
3 7 . 高レイノルズ数領域における渦度の散逸		..... 223
	横浜国立大学工学部	土門 和幸 (DOMON Kazuyuki)
	横浜国立大学工学部	渡辺 慎介 (WATANABE Shinsuke)

## 超離散系に対する特異点閉じ込めテスト

同志社大学工学部	梶原 健司	(KENJI KAJIWARA)
早稲田大学理工学部	高橋 大輔	(DAISUKE TAKAHASHI)
龍谷大学理工学部	松木平 淳太	(JUNTA MATSUKIDAIRA)
龍谷大学理工学部	西成 活裕	(KATSUHIRO NISHINARI)

### 1 緒言

ソリトンセルオートマトンの研究から生まれた「超離散化」の概念 [1] によって、セルオートマトンに対して、力学系の理論におけるさまざまな概念・手法が、対応する微分方程式・差分方程式とパラレルな形で展開されるようになることは意義が大きいと思われる。

離散ソリトン系から超離散化によってさまざまなソリトンセルオートマトンが構成される。それらはもちろん可積分系と考えられるべきであろう。可積分と考えるべきセルオートマトンが増えてくれば、逆に、超離散系が与えられたときに、その可積分性をある程度の精度で判定できる方法が必要となってくる。

連続系ではいわゆる Painlevé テスト [2] がその要望に答える方法として知られている。離散系では特異点閉じ込め (Singularity Confinement, SC) テスト [3] が離散版 Painlevé テストの役割を果たす。両方とも、厳密に言えば、テストに通ることが可積分性の必要条件でも十分条件でもない。しかし、テストの簡便さ、テストの適用範囲の広さなどから可積分性判定テストとして十分実用的であると考えられる。

本稿では SC テストの精神を持った可積分性判定テストを超離散系に対して構築する試みの一つを報告する。

### 2 特異点閉じ込めテスト

よく知られているように、SC テストは与えられた (代数) 差分方程式に対して、以下の2点をチェックするものである。

- (1) 初期値に特殊な値を取ることで発生する特異点 (動く特異点) が何ステップかの後にキャンセルして消失する。
- (2) 特異点を通過後に初期値の情報が残っている。

この性質は、Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 系 [4] と呼ばれる2階の可積分な非線形差分方程式の一群から抽出されたものであり、Grammaticos たちは逆にこの性質を可積分性の判定に使うことを提案した。SC テストの大きな利点は、テストが数式処理ソフトウェアを使って極めて簡単に行えること、副産物として、方程式の拡張が簡単に行えることや、 $\tau$  関数や双線形形式に関する情報が組織的に得られることなどが挙げられる [5, 6]。具体的に例を挙げておく。

例: **multiplicative autonomous dPII**

multiplicative autonomous discrete Painlevé II 方程式 [7] (madPII) と呼ばれる2階非線形常差分方程式

$$x_{n+1}x_nx_{n-1} = \frac{1 + hx_n}{h + x_n} \quad (1)$$

を考える。ここで  $h$  はパラメータである。初期値として  $(x_0, x_1) = (x, -h)$  を与えると、 $x_2 = \infty$  となって特異点が発生する。特異点の発展を見るために、 $(x_0, x_1) = (x, -h + \varepsilon)$  とおくと、

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{h^2 - 1}{xh} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\ x_3 &= -\frac{xh}{h^2 - 1} \varepsilon^1 + O(\varepsilon^2) \\ x_4 &= -\frac{1}{h} \varepsilon^0 + O(\varepsilon^1) \\ x_5 &= -\frac{1}{x} \varepsilon^0 + O(\varepsilon^1) \end{aligned} \quad (2)$$

となり、その後特異点は発生しない。同様に、 $(x_0, x_1) = (x, -\frac{1}{h})$  から出発しても  $x_2 = 0, x_3 = \infty$  となって特異点が発生するが、やはり  $x_5$  において特異点が閉じ込められる。重要なことは、 $\infty$  すなわち特異点が発生すること自体ではなく、上の  $x_5$  を計算する際に現れる  $\frac{0}{0}$  という不定計算が有限確定で、かつそこで情報落ちが起こらないということである。

SC テストの結果から、組織的に双線形化を行うことができる。例えば、上のテストで得られた特異点の伝搬をシンボリックに

$$\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\} \rightarrow \{-h, \infty, 0, -\frac{1}{h}\}, \quad \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\} \rightarrow \{-\frac{1}{h}, 0, \infty, -h\} \quad (3)$$

と書き、第一の特異点パターンは函数  $F_n$  が、第2のパターンは函数  $G_n$  が、それぞれ  $n$  で0になるために起ったと仮定すると、

$$x_n = -h + \frac{F_n G_{n-3}}{F_{n-1} G_{n-2}} = -\frac{1}{h} + \frac{F_{n-3} G_n}{F_{n-2} G_{n-2}} = \frac{F_{n-2} G_{n-1}}{F_{n-1} G_{n-2}} \quad (4)$$

とおくことで特異点パターンが再現される。さらにこの表式から双線形式

$$\begin{aligned} F_n G_{n+3} - F_{n+3} G_n + \left(h - \frac{1}{h}\right) F_{n+2} G_{n+1} &= 0, \\ F_{n-2} G_{n-1} + h F_{n-1} G_{n-2} - F_n G_{n-3} &= 0 \end{aligned}$$

が得られる。これから更なる解析で Bäcklund 変換などを得ることも可能である。

さらに、SC テストを方程式の拡張に使うこともできる。例えば、 $h$  に  $n$  依存性を入れて  $h_n$  で置き換え、上のテストを実行すると、 $x_5$  で特異点が閉じ込められる条件として  $h_4 h_1 = h_2 h_3$  が得られる。これを満たす  $h_n$  として例えば  $h_n = q^n$  を取ることができる。このような拡張は“de-autonomization”と呼ばれる。得られた方程式は multiplicative dP<sub>II</sub> と呼ばれる方程式 (の一つ) であり、やはり可積分系として知られている。

SC テストを行う際に特異性が周期的に現れる場合がある。例えば (1) で初期値を  $(x_0, x_1) = (x, \varepsilon)$  と取って発展を計算すると、

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{xh} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\ x_3 &= xh^2 + O(\varepsilon^1) \\ x_4 &= \frac{xh^3 + 1}{(xh + 1)h^2} \varepsilon^1 + O(\varepsilon^2) \\ x_5 &= \frac{xh + 1}{(xh^3 + 1)xh} \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\ x_6 &= xh^4 + O(\varepsilon^1) \end{aligned} \quad (5)$$



となり、有限値の部分に初期値の情報は残っているものの特異点のパターンは周期的に繰り返す。これは「動かない特異点」として SC テストの対象から除くべきであると考えられる [8]。実際、 $h \rightarrow h_n$  と置き換えて上の拡張に使おうとしても、任意の  $h_n$  について同様のパターンを繰り返し、拡張の役に立たない。 ■

離散系に対する可積分性判定テストは他にもいくつかのものが提案されている。現時点でもっとも「精度」がよいと考えられている考え方は、「可積分な mapping は複雑度が mapping の繰り返しに関して高々多項式的にしかならない」というものである。その例として、与えられた代数的常差分方程式を同次座標で多項式写像として表現し、逐次代入による次数の増大度の多項式性を調べるテスト（代数的エントロピー）が挙げられる [10]。実際、Hietarinta-Viallet は常差分方程式

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{a}{x_n^2} + b$$

を考察し、この方程式の解軌道がカオティックであるにもかかわらず SC テストに通ること、また上記の代数的エントロピーは正であって非可積分と判断できることを示している [9]。しかしながら、代数的エントロピーを求めることは解析的にもコンピュータを援用したとしても簡単なことではない。実際、多項式写像を繰り返すことは数式処理システムにも極めて負荷の大きい計算を要求する。

そういう意味で、SC テストはその実用性と副産物の豊富さから、差分方程式が与えられたときにまず第一に試すテストとして十分価値があるものと考えられる。

### 3 超離散系に対する SC テスト

#### 3.1 超離散系での特異性

超離散系に対して SC の精神を持ったテストを構成することを考える。そのためには、まず第一に、超離散系に対して「動く特異点」の概念を導入しなければならない。例として、(1) に対して超離散化を行って得られる方程式

$$X_{n+1} + X_n + X_{n-1} = \max(0, H + X_n) - \max(H, X_n) \quad (6)$$

を考え、(6) を autonomous ultradiscrete Painlevé II 方程式 (auP<sub>II</sub>) と呼ぶことにしよう。(1) から (6) を得るに当たっては、変数変換

$$x_n = \exp\left(\frac{X_n}{\varepsilon}\right), \quad h = \exp\left(\frac{H}{\varepsilon}\right) \quad (7)$$

を行い、公式

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left( \exp \frac{A}{\varepsilon} + \exp \frac{B}{\varepsilon} + \dots \right) = \max(A, B, \dots) \quad (8)$$

を用いた。(1) および (6) は保存量

$$x_{n-1}x_n + h(x_{n-1} + x_n) + h\left(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}\right) + \frac{1}{x_{n-1}x_n} \quad (9)$$

および

$$\max(X_{n-1} + X_n, H + \max(X_{n-1}, X_n), H + \max(X_{n-1} - X_n, X_n - X_{n-1}), -X_n - X_{n-1}) \quad (10)$$

を持つ、という意味で可積分系とみなすことができる。

まず、(6) の動く特異点とは何だろうか。ここで、(6) をどのような方程式と見なすかによって、二つの立場があり得る。

- (1) (6) は実数体上で定義された差分方程式であり、 $\max$  は四則演算に付加的に付け加わった非線形演算である。すなわち (6) は区分線形系である。

(2) (6) は max-plus 代数 [11, 12] 上の力学系である。従って max が加法すなわち線形演算である。

第1の立場に従えば、区分線形系であるからそもそも動く特異点は存在し得ない。しかし、第2の立場に立てば、離散系の場合の0に相当する量として max のゼロ元である  $-\infty$  を取ることができる。第1の立場では  $-\infty$  を与えることが手で特異点をドープしたことになるが、第2の立場では  $-\infty$  はただのゼロ元なので安心して扱うことができる。

実際の計算では離散系での微小量に対応して、 $-\omega$  なるシンボルを導入することにする。より正確には、 $\mathcal{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}\omega$  とし、 $\forall X \in \mathcal{R}$  に対して  $\pm$  と定数倍の演算は通常の文字式の演算と同様に扱い、max の演算は  $-\omega$  を  $-\infty$ ,  $\omega$  を  $+\infty$  のように扱う。より正確には、

$$\max(k\omega + K, L) = \begin{cases} L & k < 0 \\ k\omega + K & k > 0 \end{cases}, \quad k, K, L \in \mathbb{R} \quad (11)$$

として、他の max の演算ルールは全て通常と同様に適用する。

例えば、(6) の初期値を  $(X_0, X_1) = (X, -\omega)$  として逐次計算してみよう。その結果、

$$\begin{aligned} X_2 &= -X_1 - X_0 + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1) \\ &= -X + \omega + \max(0, H - \omega) - \max(H, -\omega) \\ &= -X + \omega - H \\ X_3 &= -X_2 - X_1 + \max(0, H + X_2) - \max(H, X_2) \\ &= -(-X + \omega - H) + \omega + \max(0, -X + \omega) - \max(H, -X + \omega - H) \\ &= X + H + \omega - X - (-X + \omega - H) = X + 2H \\ X_4 &= -X_3 - X_2 + \max(0, H + X_3) - \max(H, X_3) \\ &= -(X + 2H) - (-X + \omega - H) + \max(0, X + 3H) - \max(H, X + 2H) \\ &= -2H - \omega + \max(0, X + 3H) - \max(0, X + 3H) \end{aligned} \quad (12)$$

などというように計算できる。この結果と(5)を比べてみると、通常の対応

離散系	超離散系	離散系	超離散系
+	max	$\varepsilon$	$-\omega$
$\times$	+	0	1
$\div$	-	$h$	$H$
次数	係数	$x$	$X$

が完全に取れていることがわかる。このように、SC テストを考える際には(6)を max-plus 代数上の力学系と考える立場が有効である。

### 3.2 負号の問題：max に関する逆元

しかしながら、第1節で注意したように、(5)のような周期的な特異点パターンは動かない特異点とみなすべきであり、SC テストの対象にはならない。この事情は超離散系でも同様で、(12)のパターンを方程式の拡張などに使うことはできない。実際、パラメータ  $H$  に  $n$  依存性を仮定して  $H_n$  としても、任意の  $H_n$  に対して(12)と同じパターンが得られてしまう。従って、我々は  $\text{mdP}_{\text{II}}(1)$  の特異点パターン(2)と同様のものを  $\text{auP}_{\text{II}}(6)$  に対しても作る必要に迫られることになる。

特異点パターン (2) を与える初期値は, (1) に対して  $x_0 = x$  とおき,

$$x_2 = \frac{1}{x_1 x} \frac{1 + hx_1}{h + x_1} = 0 \rightarrow 1 + hx_1 = 0 \quad (13)$$

となるように  $x_1$  を決めた. では,  $\text{auP}_{\text{II}}$  (6) に対しては,  $X_0 = X$  として,

$$X_2 = -X_1 - X + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1) = -\infty \rightarrow \max(0, H + X_1) = -\infty \quad (14)$$

となるような  $X_1$  を取る必要があるが, そのような  $X_1$  は実数の範囲で存在しない.

そこで, 我々は仮想的に, 実数体の  $-1$  に相当する

$$\max(\Omega, 0) = \max(0, \Omega) = -\omega \quad (15)$$

なるシンボル  $\Omega$  を導入しよう. もちろん,  $\Omega$  というシンボルは仮想的なものであるから, 単純に max-plus 代数の計算ルールを適用すればすぐに矛盾が発生するのは明らかである. 我々は

- 用途を特異点閉じ込めテストに限定する.
- 表の対応に加えて,  $\Omega$  を離散系での  $-1$  に対応させたときに, 離散系の特異点パターンと超離散系の特異点パターンの対応がきちんとつくように計算ルールを制限する.

という方針で  $\Omega$  に対する「妥当な」計算ルールを検討した. その結果, 次のルールを提案する.

#### 簡略化ルール

$$\max(\Omega + K, K) = -\omega, \quad K \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

#### max の分配則

$$\max(\Omega + K, L) = L + \max(\Omega + K - L, 0) = K + \max(\Omega, L - K), \quad K \neq L. \quad (17)$$

#### 注意

- $\Omega$  を含んだ項に対する  $+$  演算 や  $-\Omega$  は定義していないことに注意. 従って, 次のような計算

$$\max(\Omega + K, L) = \Omega + \max(K, L - \Omega), \quad (-\Omega \text{ は定義されていない})$$

$$\max(\Omega + K, L) + \max(\Omega + M, N) = \max(\Omega + \Omega + K + M, \Omega + K + N, \Omega + M + L, L + N),$$

( $\Omega + \Omega$  は定義されていない)

は許していない. 事実上  $\Omega$  は  $\max$  の中でのみ用いることになる.

- 上のルールで変形不可能なものは, 当然そのままの形で残す. 例えば,

$$\max(\Omega + K, -\omega + L) \neq \Omega + K, \quad \max(\Omega + K, \omega + L) \neq \omega + L,$$

など.

このルールによって,  $\Omega$  を用いることで  $\text{auP}_{\text{II}}$ (6) に動く特異点を発生させることができるようになる. このようにして動く特異点を発生させ, (1) 有限ステップで  $\omega$  の正係数の項が打ち消しあってなくなり, (2) その後, 初期値の情報が残っているかどうかを見るテストを考えることができるだろう.

## 4 いくつかの計算例

### 4.1 Autonomous Ultradiscrete Painlevé II

実際に,  $\text{auP}_{\text{II}}(6)$  に対して計算を行ってみよう. その結果,

$$\begin{aligned}
X_0 &= X, & X_1 &= \max(\Omega + H, -\omega), \\
X_2 &= -X_1 - X_0 + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1) \\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + \max(0, H + \max(\Omega + H, -\omega)) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega)) \\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + H + \max(-H, \max(\Omega + H, -\omega)) - \max(\max(H, \Omega + H), -\omega) \\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + H + \max(\Omega + H, -H) - \max(-\omega, -\omega) \\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega, \\
X_3 &= = -\max(\Omega + H, -\omega) - (-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) \\
&\quad + \max(0, H - \max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) \\
&\quad - \max(H, -\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) \\
&= -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega \\
&\quad + (H - \max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) \\
&\quad - (-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) \\
&= -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H, \\
X_4 &= -(-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) - (-\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H) \\
&\quad + \max(0, H - \max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H) \\
&\quad - \max(H, -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H) \\
&= \max(\Omega + H, -\omega) - 2H, \\
X_5 &= -(-\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H) - (\max(\Omega + H, -\omega) - 2H) \\
&\quad + \max(0, H + \max(\Omega + H, -\omega) - 2H) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega) - 2H) \\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega - \max(\Omega + H, -\omega) + H \\
&\quad + \max(0, \max(\Omega + H, -\omega) - H) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega) - 2H) \\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega - \max(\Omega + H, -\omega) + 2H - \omega - \max(3H, \max(\Omega + H, -\omega)) \\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - \max(\Omega + H, -\omega) - \max(\Omega, 2H) - X + H,
\end{aligned}$$

となり, 離散系の特異点パターン (2) をきちんとシミュレートできていることがわかる. さらに, 詳細は省略するが, パラメータ  $H$  を  $H_n$  で置き換えると,  $X_5$  で特異点が閉じ込められる条件として  $H_4 + H_1 = H_3 + H_2$  が得られ, 特に  $H_n = an + b$  はこの条件を満足する. このように, ここで提案するテストは超離散系の de-autonomization にも使うことができる.

### 4.2 Ultradiscrete 2-dimensional Lotka-Volterra

Ultradiscrete 2-dimensional Lotka-Volterra(U2dLV)

$$Y_n = \max(0, X_{n-1}) + Y_n - B, \quad X_n = X_{n-1} - \max(0, Y_n) + A, \quad (18)$$

および Discrete 2-dimensional Lotka-Volterra(D2dLV) 方程式

$$y_n = \frac{(1 + x_{n-1})y_{n-1}}{b}, \quad x_n = \frac{ax_{n-1}}{1 + y_n}, \quad (19)$$

の SC テストを考えよう. D2dLV の動く特異点は, 初期値を  $(y_0, x_0) = (-\frac{b}{1+x}, x)$  と選ぶことで発生する. 従って, SC テストの結果は,

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{b}{1+x}(-1 + \varepsilon), & x_0 &= x, \\ y_1 &= -1 + O(\varepsilon), & x_1 &= ax\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0), \\ y_2 &= -\frac{ax}{b}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0), & x_2 &= -ab + O(\varepsilon), \\ y_3 &= \frac{ax(ab-1)}{b^2}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0), & x_3 &= -\frac{ab^3}{x(ab-1)}\varepsilon + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \quad (20)$$

となり, 一般にはテストに通らない. しかし,  $y_3$  で特異点を閉じ込めるために,  $ab = 1$  とおいて改めて計算すると, テストに通ることがわかる.

同様に, U2dLV においては次のように計算できる.

$$\begin{aligned} Y_0 &= B - \max(0, X) + \max(\Omega, -\omega), & X_0 &= X, \\ Y_1 &= \max(0, X) + B - \max(0, X) + \max(\Omega, -\omega) - B \\ &= \max(\Omega, -\omega), \\ X_1 &= X - \max(0, \max(\Omega, -\omega)) + A = X + A + \omega, \\ Y_2 &= \max(0, X + A + \omega) + \max(\Omega, -\omega) - B = X + A - B + \max(\Omega, -\omega) + \omega, \\ X_2 &= X + A + \omega - \max(0, X + A - B + \max(\Omega, -\omega) + \omega) + A \\ &= A + B - \max(\Omega, -\omega), \\ Y_3 &= \max(0, A + B - \max(\Omega, -\omega)) + X + A - B + \max(\Omega, -\omega) + \omega - B \\ &= X + A - 2B + \max(\max(\Omega, -\omega), A + B) + \omega, \\ X_3 &= A + B - \max(\Omega, -\omega) - \max(0, X + A - 2B + \max(\max(\Omega, -\omega), A + B) + \omega) + A \\ &= -X + A + 3B - \max(\Omega, -\omega) - \max(\max(\Omega, -\omega), A + B) - \omega, \end{aligned}$$

$Y_3$  において, もし  $A + B = 0$  であれば,  $\max(\max(\Omega, -\omega), A + B) = \max(\Omega, -\omega, 0) = -\omega$  であるから  $\omega$  が打ち消し合い,  $Y_3 = X + 3A$  となる. さらに, これ以降  $\omega$  の正符号の項は出現しない. 従って,  $A + B = 0$  の時にテストに通ることになる.

## 5 結言

本稿では, 超離散系における「可積分系」を判別するテストを構築する試みを報告した. 離散系に対する可積分性判別テストのうち, 実用性という観点から SC テストを取り上げ, それと同様の機能を持ったテストを超離散系に対して提案した. 論じた要点は以下の通りである.

- 超離散系を実数体上の区分線形力学系と捉えるよりは, max-plus 代数上の力学系として捉える方が有効である.
- この見方によって  $-\infty$  を「特異点」ではなく, 離散系の 0 に対応する通常元として扱うことが可能になる.

- テストにより多くの機能を求めるためには、どうしても超離散化の「負号」、もしくは  $\max$  の逆元の問題に触れざるを得ない。そこで、実数体の  $-1$  に相当する  $\Omega$  という元を仮想的に導入し、適当な計算ルールを課すことにより矛盾を押さえ込み、有用な情報を取り出すことができる。

以下に、今後の課題を列挙する。

- $\max$  の逆元のような対象を扱うための方法はこれが唯一ではない。例えば対称化  $\max$ -plus 代数 [11, 12] 上で SC テストを行うなどの方法が検討されるべきであろう。
- 超離散系では、離散系以上に「可積分性」の概念がはっきりしておらず、ここで提案したテスト（もしくは対称化  $\max$ -plus 代数上でのテスト）に通ることをもって「可積分」と主張することの根拠は非常に弱い。テストでの結果を用いて双線形形式、Bäcklund 変換や保存量を離散系を経由せず、直接構成できるようにすることが望ましい。

最後に、本研究は文部省科学研究費奨励研究 (A) No.97040164 による補助を受けたことを付記する。

## 参考文献

- [1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76**(1996) 3247.
- [2] 例えば, M.J. Ablowitz and H. Segur 著, 薩摩 順吉, 及川正行 訳, 「ソリトンと逆散乱変換」(日本評論社, 1994) を参照.
- [3] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67**(1991) 1825.
- [4] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, Phys. Lett. **126**(1988) 419; Physica **D34**(1989) 183.
- [5] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma, J. Phys. A **28**(1995) 4655.
- [6] N. Joshi, A. Ramani and B. Grammaticos, Phys. Lett. **A 249**(1998) 59.
- [7] A. Ramani and B. Grammaticos, Physica **A 228**(1996) 160.
- [8] A. Ramani and B. Grammaticos, private communication.
- [9] J. Hietarinta and C.M. Viallet, Phys. Rev. Lett. **81**(1998) 325.
- [10] M.P. Vellon and C.M. Viallet, preprint, chao-dyn/9805006.
- [11] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder and J.P. Quadrat, “Synchronization and Linearization”(John Wiley & Son, 1992).
- [12] 潮 俊光, 京都大学数理解析研究所講究録 **1020** 「離散可積分系と離散解析」(1997) 165.