超離散系に対する特異点閉じ込めテスト

同志社大学工学部　梶原 健司　(Kenji Kajiwara)
早稲田大学理工学部　高橋 大輔　(Daisuke Takahashi)
龍谷大学理工学部　松木平 淳太　(Junta Matsukidaira)
龍谷大学理工学部　西成 活裕　(Katsuhiro Nishinari)

1　緒言

ソリトンセルオートマトンの研究から生まれた「超離散化」の概念 [1] によって，セルオートマトンに対して，力学系の理論におけるさまざまな概念・手法が，対応する微分方程式・差分方程式とパラレルな形で展開されるようになることは意義が大きいと思われる．

離散ソリトン系から超離散化によってさまざまなソリトンセルオートマトンが構成される．それらはもちろん可積分系と考えられるべきであろう．可積分と考えるべきセルオートマトンが増えてくれば，逆に，超離散系が与えられたときに，その可積分性をある程度の精度で判定できる方法が必要となってくる．

連続系ではいわゆる Painlevé テスト [2] がその要望に答える方法として知られている．離散系では特異点閉じ込め (Singularity Confinement, SC) テスト [3] が離散版 Painlevé テストの役割を果たす．両方とも，厳密に言えば，テストに通ることが可積分性の必要条件でも十分条件でもない．しかし，テストの簡便さ，テストの適用範囲の広さなどから可積分性判定テストとして十分実用的であると考えられる．

本稿では SC テストの精神を持った可積分性判定テストを超離散系に対して構築する試みの一つを報告する．

2　特異点閉じ込めテスト

よく知られているように，SC テストは与えられた（代数）差分方程式に対して，以下の 2 点をチェックするものである．

(1) 初期値に特殊な値を取ることで発生する特異点（動く特異点）が何ステップかの後にキャンセルして消失する．
(2) 特異点を通過後に初期値の情報が残っている．

この性質は，Quispel-Roberts-Thompson(QRT) 系 [4] と呼ばれる 2 階の可積分な非線形差分方程式の一群から抽出されたものであり，Grammaticos たちは逆にこの性質を可積分性の判定に使うことを提案した．SC テストの大きな利点は，テストが数式処理ソフトウエアを使って極めて簡単に行えること，副産物として，方程式の拡張が簡単に行えることや，τ 函数や双線形形式に関する情報が組織的に得られることなどが挙げられる [5, 6]．具体的に例を挙げておく．

例： multiplicative autonomous dPII

multiplicative autonomous discrete Painlevé II 方程式 [7](madP$_{\rm II}$) と呼ばれる 2 階非線形常差分方程式

$$x_{n+1}x_nx_{n-1}=\frac{1+hx_n}{h+x_n} \tag{1}$$

を考える．ここで h はパラメータである．初期値として $(x_0, x_1) = (x, -h)$ を与えると，$x_2 = \infty$ となって特異点が発生する．特異点の発展を見るために，$(x_0, x_1) = (x, -h+\varepsilon)$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{h^2-1}{xh}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\
x_3 &= -\frac{xh}{h^2-1}\varepsilon^{1} + O(\varepsilon^2) \\
x_4 &= -\frac{1}{h}\varepsilon^{0} + O(\varepsilon^1) \\
x_5 &= -\frac{1}{x}\varepsilon^{0} + O(\varepsilon^1)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

となり，その後特異点は発生しない．同様に，$(x_0, x_1) = (x, -\frac{1}{h})$ から出発しても $x_2 = 0$, $x_3 = \infty$ となって特異点が発生するが，やはり x_5 において特異点が閉じ込められる．重要なことは，∞ すなわち特異点が発生すること自体ではなく，上の x_5 を計算する際に現れる $\frac{0}{0}$ という不定計算が有限確定で，かつそこで情報落ちが起こらないということである．

SC テストの結果から，組織的に双線形化を行うことができる．例えば，上のテストで得られた特異点の伝搬をシンボリックに

$$
\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\} \longrightarrow \{-h, \infty, 0, -\frac{1}{h}\}, \quad \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}\} \longrightarrow \{-\frac{1}{h}, 0, \infty, -h\} \tag{3}
$$

と書き，第一の特異点パターンは函数 F_n が，第 2 のパターンは函数 G_n が，それぞれ n で 0 になるために起ったと仮定すると，

$$
x_n = -h + \frac{F_n G_{n-3}}{F_{n-1} G_{n-2}} = -\frac{1}{h} + \frac{F_{n-3} G_n}{F_{n-2} G_{n-2}} = \frac{F_{n-2} G_{n-1}}{F_{n-1} G_{n-2}} \tag{4}
$$

とおくことで特異点パターンが再現される．さらにこの表式から双線形形式

$$
\begin{gathered}
F_n G_{n+3} - F_{n+3} G_n + \left(h - \frac{1}{h}\right) F_{n+2} G_{n+1} = 0, \\
F_{n-2} G_{n-1} + h F_{n-1} G_{n-2} - F_n G_{n-3} = 0
\end{gathered}
$$

が得られる．これから更なる解析で Bäcklund 変換などを得ることも可能である．

さらに，SC テストを方程式の拡張に使うこともできる．例えば，h に n 依存性を入れて h_n で置き換え，上のテストを実行すると，x_5 で特異点が閉じ込められる条件として $h_4 h_1 = h_2 h_3$ が得られる．これを満たす h_n として例えば $h_n = q^n$ を取ることができる．このような拡張は “de-autonomization” と呼ばれる．得られた方程式は multiplicative $\mathrm{dP_{II}}$ と呼ばれる方程式（の一つ）であり，やはり可積分系として知られている．

SC テストを行う際に特異性が周期的に現れる場合がある．例えば (1) で初期値を $(x_0, x_1) = (x, \varepsilon)$ と取って発展を計算すると，

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1}{xh}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\
x_3 &= xh^2 + O(\varepsilon^1) \\
x_4 &= \frac{xh^3+1}{(xh+1)h^2}\varepsilon^{1} + O(\varepsilon^2) \\
x_5 &= \frac{xh+1}{(xh^3+1)xh}\varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^0) \\
x_6 &= xh^4 + O(\varepsilon^1)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となり，有限値の部分に初期値の情報は残っているものの特異点のパターンは周期的に繰り返す．これは「動かない特異点」として SC テストの対象から除くべきであると考えられる．実際，$h \to h_n$ と置き換えて上の拡張に使おうとしても，任意の h_n について同様のパターンを繰り返し，拡張の役に立たない．∎

離散系に対する可積分性判定テストは他にもいくつかのものが提案されている．現時点でもっとも「精度」がよいと考えられている考え方は,「可積分な mapping は複雑度が mapping の繰り返しに関して高々多項式的にしか増大しない」というものであろう．その例として，与えられた代数的常差分方程式を同次座標で多項式写像として表現し，逐次代入による次数の増大度の多項式性を調べるテスト（代数的エントロピー）が挙げられる [9]．実際，Hietarinta-Viallet は常差分方程式

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{a}{x_n^2} + b$$

を考察し，この方程式の解軌道がカオティックであるにもかかわらず SC テストに通ること，また上記の代数的エントロピーは正であって非可積分と判断できることを示している [8]．しかしながら，代数的エントロピーを求めることは解析的にもコンピュータを援用したとしても簡単なことではない．実際，多項式写像を繰り返すことは数式処理システムにも極めて負荷の大きい計算を要求する．

そういう意味で，SC テストはその実用性と副産物の豊富さから，差分方程式が与えられたときにまず第一に試すテストとして十分価値があるものと考えられる．

3 超離散系に対する SC テスト

3.1 超離散系での特異性

超離散系に対して SC の精神を持ったテストを構成することを考える．そのためには，まず第一に，超離散系に対して「動く特異点」の概念を導入しなければならない．例として，(1) に対して超離散化を行って得られる方程式

$$X_{n+1} + X_n + X_{n-1} = \max(0, H + X_n) - \max(H, X_n) \tag{6}$$

を考え，(6) を autonomous ultradiscrete Painlevé II 方程式 (auP$_{\mathrm{II}}$) と呼ぶことにしよう．(1) から (6) を得るに当っては，変数変換

$$x_n = \exp\left(\frac{X_n}{\varepsilon}\right), \quad h = \exp\left(\frac{H}{\varepsilon}\right) \tag{7}$$

を行い，公式

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left(\exp\frac{A}{\varepsilon} + \exp\frac{B}{\varepsilon} + \cdots \right) = \max(A, B, \cdots) \tag{8}$$

を用いた．(1) および (6) は保存量

$$x_{n-1}x_n + h(x_{n-1} + x_n) + h(\frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_{n-1}}) + \frac{1}{x_{n-1}x_n} \tag{9}$$

および

$$\max(X_{n-1} + X_n, H + \max(X_{n-1}, X_n), H + \max(X_{n-1} - X_n, X_n - X_{n-1}), -X_n - X_{n-1}) \tag{10}$$

を持つ，という意味で可積分系とみなすことができる．

まず，(6) の動く特異点とは何だろうか．ここで，(6) をどのような方程式と見なすかによって，二つの立場があり得る．

(1) (6) は実数体上で定義された差分方程式であり，max は四則演算に付加的に付け加わった非線形演算である．すなわち (6) は区分線形系である．

(2) (6) は max-plus 代数 [10, 11] 上の力学系である．従って max が加法すなわち線形演算である．

第 1 の立場に従えば，区分線形系であるからそもそも動く特異点は存在し得ない．しかし，第 2 の立場に立てば，離散系の場合の 0 に相当する量として max のゼロ元である $-\infty$ を取ることができる．第 1 の立場では $-\infty$ を与えることが手で特異点をドープしたことになってしまうが，第 2 の立場では $-\infty$ はただのゼロ元なので安心して扱うことができる．

実際の計算では離散系での微小量に対応して，$-\omega$ なるシンボルを導入することにする．より正確には，$\mathcal{R} = \mathbb{R} \cup \mathbb{R}\omega$ とし，$\forall X \in \mathcal{R}$ に対して $\pm$ と定数倍の演算は通常の文字式の演算と同様に扱い，max の演算は $-\omega$ を $-\infty$，ω を $+\infty$ のように扱う．より正確には，

$$\max(k\omega + K, L) = \begin{cases} L & k < 0 \\ k\omega + K & k > 0 \end{cases}, \quad k, K, L \in \mathbb{R} \tag{11}$$

として，他の max の演算ルールは全て通常と同様に適用する．

例えば，(6) の初期値を $(X_0, X_1) = (X, -\omega)$ として逐次計算してみよう．その結果，

$$\begin{aligned}
X_2 &= -X_1 - X_0 + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1) \\
&= -X + \omega + \max(0, H - \omega) - \max(H, -\omega) \\
&= -X + \omega - H \\
X_3 &= -X_2 - X_1 + \max(0, H + X_2) - \max(H, X_2) \\
&= -(-X + \omega - H) + \omega + \max(0, -X + \omega) - \max(H, -X + \omega - H) \\
&= X + H + \omega - X - (-X + \omega - H) = X + 2H \\
X_4 &= -X_3 - X_2 + \max(0, H + X_3) - \max(H, X_3) \\
&= -(X + 2H) - (-X + \omega - H) + \max(0, X + 3H) - \max(H, X + 2H) \\
&= -2H - \omega + \max(0, X + 3H) - \max(0, X + 3H)
\end{aligned} \tag{12}$$

などというように計算できる．この結果と (5) を比べてみると，通常の対応

離散系	超離散系	離散系	超離散系
$+$	max	ε	$-\omega$
$\times$	$+$	0	1
$\div$	$-$	h	H
次数	係数	x	X

が完全に取れていることがわかる．このように，SC テストを考える際には (6) を max-plus 代数上の力学系と考える立場が有効である．

3.2 負号の問題：max に関する逆元

しかしながら，第 1 節で注意したように，(5) のような周期的な特異点パターンは動かない特異点とみなすべきであり，SC テストの対象にはならない．この事情は超離散系でも同様で，(12) のパターンを方程式の拡張などに使うことはできない．実際，パラメータ H に n 依存性を仮定して H_n としても，任意の H_n に対して (12) と同じパターンが得られてしまう．従って，我々は $\mathrm{mdP_{II}}$(1) の特異点パターン (2) と同様のものを $\mathrm{auP_{II}}$(6) に対しても作る必要に迫られることになる．

特異点パターン (2) を与える初期値は，(1) に対して $x_0 = x$ とおき，

$$x_2 = \frac{1}{x_1 x} \frac{1 + h x_1}{h + x_1} = 0 \longrightarrow 1 + h x_1 = 0 \tag{13}$$

となるように x_1 を決めた．では，auP$_{\mathrm{II}}$ (6) に対しては，$X_0 = X$ として，

$$X_2 = -X_1 - X + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1) = -\infty \quad \longrightarrow \max(0, H + X_1) = -\infty \tag{14}$$

となるような X_1 を取る必要があるが，そのような X_1 は実数の範囲で存在しない．

そこで，我々は仮想的に，実数体の -1 に相当する

$$\max(\Omega, 0) = \max(0, \Omega) = -\omega \tag{15}$$

なるシンボル Ω を導入しよう．もちろん，Ω というシンボルは仮想的なものであるから，単純に max-plus 代数の計算ルールを適用すればすぐに矛盾が発生するのは明らかである．我々は

- 用途を特異点閉じ込めテストに限定する．
- 表 の対応に加えて，Ω を 離散系での -1 に対応させたときに，離散系の特異点パターンと超離散系の特異点パターンの対応がきちんとつくように計算ルールを制限する．

という方針で Ω に対する「妥当な」計算ルールを検討した．その結果，次のルールを提案する．

簡略化ルール

$$\max(\Omega + K, K) = -\omega, \quad K \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

max の分配則

$$\max(\Omega + K, L) = L + \max(\Omega + K - L, 0) = K + \max(\Omega, L - K), \quad K \neq L. \tag{17}$$

注意

- Ω を含んだ項に対する $+$ 演算 や $-\Omega$ は定義していないことに注意．従って，次のような計算

$$\max(\Omega + K, L) = \Omega + \max(K, L - \Omega), \quad (-\Omega \text{ は定義されていない})$$

$$\begin{aligned} \max(\Omega + K, L) + \max(\Omega + M, N) \quad &= \quad \max(\Omega + \Omega + K + M, \Omega + K + N, \Omega + M + L, L + N), \\ &\quad\quad (\Omega + \Omega \text{ は定義されていない}) \end{aligned}$$

  は許していない．事実上 Ω は max の中でのみ用いることになる．

- 上のルールで変形不可能なものは，当然そのままの形で残す．例えば，

$$\max(\Omega + K, -\omega + L) \neq \Omega + K, \quad \max(\Omega + K, \omega + L) \neq \omega + L,$$

  など．

このルールによって，Ω を用いることで auP$_{\mathrm{II}}$(6) に動く特異点を発生させることができるようになる．このようにして動く特異点を発生させ，(1) 有限ステップで ω の正係数の項が打ち消しあってなくなり，(2) その後，初期値の情報が残っているかどうかを見るテストを考えることができるだろう．

4　いくつかの計算例

4.1　Autonomous Ultradiscrete Painlevé II

実際に，auP$_{\rm II}$(6) に対して計算を行ってみよう．その結果，

$$
\begin{aligned}
X_0 &= X, \quad X_1 = \max(\Omega + H, -\omega),\\
X_2 &= -X_1 - X_0 + \max(0, H + X_1) - \max(H, X_1)\\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + \max(0, H + \max(\Omega + H, -\omega)) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega))\\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + H + \max(-H, \max(\Omega + H, -\omega)) - \max(\max(H, \Omega + H), -\omega))\\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) - X + H + \max(\Omega + H, -H) - \max(-\omega, -\omega))\\
&= -\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega,\\
X_3 &= = -\max(\Omega + H, -\omega) - (-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega)\\
&\quad + \max(0, H - \max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega)\\
&\quad - \max(H, -\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega)\\
&= -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega\\
&\quad + (H - \max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega)\\
&\quad - (-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega)\\
&= -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H,\\
X_4 &= -(-\max(\Omega + H, -\omega) + \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega) - (-\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H)\\
&\quad + \max(0, H - \max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H)\\
&\quad - \max(H, -\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H)\\
&= \max(\Omega + H, -\omega) - 2H,\\
X_5 &= -(-\max(\Omega + 2H, 0) + X - \omega + H) - (\max(\Omega + H, -\omega) - 2H)\\
&\quad + \max(0, H + \max(\Omega + H, -\omega) - 2H) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega) - 2H)\\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega - \max(\Omega + H, -\omega) + H\\
&\quad + \max(0, \max(\Omega + H, -\omega) - H) - \max(H, \max(\Omega + H, -\omega) - 2H)\\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - X + \omega - \max(\Omega + H, -\omega) + 2H - \omega - \max(3H, \max(\Omega + H, -\omega))\\
&= \max(\Omega + 2H, 0) - \max(\Omega + H, -\omega) - \max(\Omega, 2H) - X + H,
\end{aligned}
$$

となり，離散系の特異点パターン (2) をきちんとシミュレートできていることがわかる．さらに，詳細は省略するが，パラメータ H を H_n で置き換えると，X_5 で特異点が閉じ込められる条件として $H_4 + H_1 = H_3 + H_2$ が得られ，特に $H_n = an + b$ はこの条件を満足する．このように，ここで提案するテストは超離散系の de-autonomization にも使うことができる．

4.2　Ultradiscrete 2-dimensional Lotka-Volterra

Ultradiscrete 2-dimensional Lotka-Volterra(U2dLV)

$$
Y_n = \max(0, X_{n-1}) + Y_n - B, \quad X_n = X_{n-1} - \max(0, Y_n) + A, \tag{18}
$$

および Discrete 2-dimensional Lotka-Volterra(D2dLV) 方程式

$$y_n = \frac{(1+x_{n-1})y_{n-1}}{b}, \quad x_n = \frac{ax_{n-1}}{1+y_n}, \tag{19}$$

の SC テストを考えよう．D2dLV の動く特異点は，初期値を $(y_0, x_0) = (-\frac{b}{1+x}, x)$ と選ぶことで発生する．従って，SC テストの結果は，

$$\begin{aligned}
y_0 &= \frac{b}{1+x}(-1+\varepsilon), & x_0 &= x, \\
y_1 &= -1+O(\varepsilon), & x_1 &= ax\varepsilon^{-1}+O(\varepsilon^0), \\
y_2 &= -\frac{ax}{b}\varepsilon^{-1}+O(\varepsilon^0), & x_2 &= -ab+O(\varepsilon), \\
y_3 &= \frac{ax(ab-1)}{b^2}\varepsilon^{-1}+O(\varepsilon^0), & x_3 &= -\frac{ab^3}{x(ab-1)}\varepsilon+O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \tag{20}$$

となり，一般にはテストに通らない．しかし，y_3 で特異点を閉じ込めるために，$ab=1$ とおいて改めて計算すると，テストに通ることがわかる．

同様に，U2dLV においては次のように計算できる．

$$\begin{aligned}
Y_0 &= B - \max(0,X) + \max(\Omega,-\omega), \quad X_0 = X, \\
Y_1 &= \max(0,X) + B - \max(0,X) + \max(\Omega,-\omega) - B \\
&= \max(\Omega,-\omega), \\
X_1 &= X - \max(0,\max(\Omega,-\omega)) + A = X + A + \omega, \\
Y_2 &= \max(0, X+A+\omega) + \max(\Omega,-\omega) - B = X + A - B + \max(\Omega,-\omega) + \omega, \\
X_2 &= X + A + \omega - \max(0, X + A - B + \max(\Omega,-\omega) + \omega) + A \\
&= A + B - \max(\Omega,-\omega), \\
Y_3 &= \max(0, A + B - \max(\Omega,-\omega)) + X + A - B + \max(\Omega,-\omega) + \omega - B \\
&= X + A - 2B + \max(\max(\Omega,-\omega), A+B) + \omega, \\
X_3 &= A + B - \max(\Omega,-\omega) - \max(0, X + A - 2B + \max(\max(\Omega,-\omega), A+B) + \omega) + A \\
&= -X + A + 3B - \max(\Omega,-\omega) - \max(\max(\Omega,-\omega), A+B) - \omega,
\end{aligned}$$

Y_3 において，もし $A+B=0$ であれば，$\max(\max(\Omega,-\omega), A+B) = \max(\Omega,-\omega), 0) = -\omega$ であるから ω が打ち消し合い，$Y_3 = X + 3A$ となる．さらに，これ以降 ω の正符号の項は出現しない．従って，$A+B=0$ の時にテストに通ることになる．

5 結言

本稿では，超離散系における「可積分系」を判別するテストを構築する試みを報告した．離散系に対する可積分性判別テストのうち，実用性という観点から SC テストを取り上げ，それと同様の機能を持ったテストを超離散系に対して提案した．論じた要点は以下の通りである．

- 超離散系を実数体上の区分線形力学系と捉えるよりは，max-plus 代数上の力学系として捉える方が有効である．
- この見方によって $-\infty$ を「特異点」ではなく，離散系の 0 に対応する通常の元として扱うことが可能になる．

- テストにより多くの機能を求めるためには，どうしても超離散化の「負号」，もしくは max の逆元の問題に触れざるを得ない．そこで，実数体の -1 に相当する Ω という元を仮想的に導入し，適当な計算ルールを課すことにより矛盾を押さえ込み，有用な情報を取り出すことができる．

以下に，今後の課題を列挙する．

- max の逆元のような対象を扱うための方法はこれが唯一ではない．例えば対称化 max-plus 代数 [10, 11] 上で SC テストを行うなどの方法が検討されるべきであろう．
- 超離散系では，離散系以上に「可積分性」の概念がはっきりしておらず，ここで提案したテスト（もしくは対称化 max-plus 代数上でのテスト）に通ることをもって「可積分」と主張することの根拠は非常に弱い．テストでの結果を用いて双線形形式，Bäcklund 変換や保存量を離散系を経由せず，直接構成できるようになることが望ましい．

最後に，本研究は文部省科学研究費奨励研究 (A) No.97040164 による補助を受けたことを付記する．

参考文献

[1] T. Tokihiro, D. Takahashi, J. Matsukidaira and J. Satsuma, Phys. Rev. Lett. **76**(1996) 3247.

[2] 例えば，M.J. Ablowitz and H. Segur 著, 薩摩 順吉，及川正行 訳,「ソリトンと逆散乱変換」(日本評論社, 1994) を参照.

[3] B. Grammaticos, A. Ramani and V. Papageorgiou, Phys. Rev. Lett. **67**(1991) 1825.

[4] G.R.W. Quispel, J.A.G. Roberts and C.J. Thompson, Phys. Lett. **126**(1988) 419; Physica **D34**(1989) 183.

[5] A. Ramani, B. Grammaticos and J. Satsuma, J. Phys. A **28**(1995) 4655.

[6] N. Joshi, A. Ramani and B. Grammaticos, Phys. Lett. **A???**(1999)???

[7] A. Ramani and B. Grammaticos, Physica **A 228**(1996) 160.

[8] J. Hietarinta and C.M Viallet, Phys. Rev. Lett.**81**(1998) 325.

[9] M.P. Vellon and C.M. Viallet, preprint, chao-dyn/9805006.

[10] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder and J.P. Quadrat, “*Synchronization and Linearization*”(John Wiley & Son, 1992).

[11] 潮 俊光，京都大学数理解析研究所講究録 **1020**「離散可積分系と離散解析」(1997) 165.